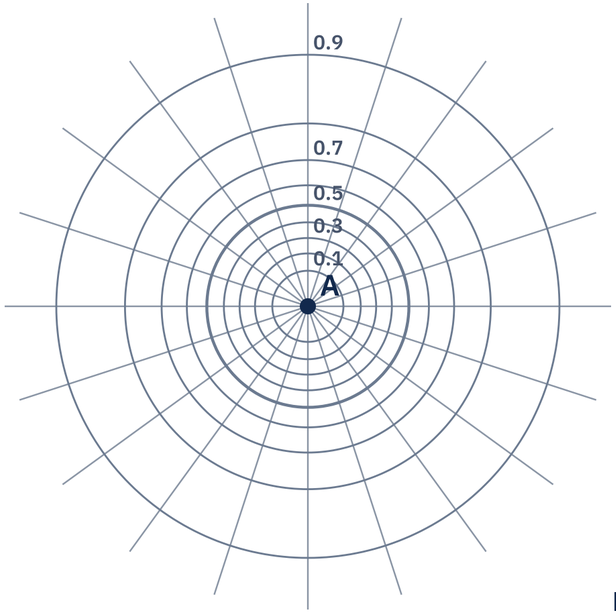
Geotechnische Vorlesungspräsentation · Spannungen im Baugrund

Einflusskarte nach Newmark

Vorlesung: Einflusskarte nach Newmark; der Grundriss der belasteten Fläche wird auf die Karte gelegt, die überdeckten Elemente werden gezählt, und man erhält $\Delta\sigma_z$ = (IV) q M.

- Ringe gleichen Spannungszuwachses
- Einflusswert IV = 0.005
- Elementzählung
- Beliebiger Grundriss
- Handrechnung möglich



Einführung

Was lernen wir in dieser Vorlesung?

Wie das Diagramm aufgebaut ist: aus der Lösung für die Kreislast Kreise mit dem Radius **$R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}$**

10 Ringe × 20 Sektoren = 200 Elemente: jedes Element wirkt gleich, **IV = 1/N = 0.005**

Anwendung: Der Grundriss wird im Maßstab **AB = z** gezeichnet, der Punkt A in den Mittelpunkt der Karte gelegt, **M** Elemente gezählt; **$\Delta\sigma_z$ = (IV) q M**

Die Kontrolle der ringweisen Auszählung von Hand mit der **rechteckigen Ecklösung**; Tiefe, L-förmiger Grundriss und ein Punkt außerhalb der Fläche

Dass für jede Tiefe **ein gesonderter Grundriss** erforderlich ist

VORLESUNGSABLAUF

Jedes Thema wird in **drei Schritten** behandelt:

1 · **Theorie**: Formel und Begründung

2 · **Aufgabe**: Gegeben und Gesucht

3 · **Lösung**: Schritt für Schritt, mit Zahlen

Beispiel: Stützenfundament 3 m × 3 m, 660 kN (q = 73.33 kN/m²); Punkt A liegt 3 m unter dem Fundament, unterhalb des Mittelpunkts einer Kante.

Kreise gleichen Spannungszuwachses

THEORIE

Unter dem Mittelpunkt einer gleichmäßig belasteten Kreisfläche gilt $\Delta\sigma_z/q = 1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}$. Durch Umkehren der Beziehung erhält man den **Radius** der Kreisfläche, die ein gewähltes Spannungsverhältnis erzeugt (beide Seiten sind dimensionslos).

Für $\Delta\sigma_z/q = 0.1; 0.2 \ldots 0.9$ teilen die mit diesen Radien gezeichneten Kreise die Ebene in **Ringe**. Wird jeder Ring allein belastet, entsteht unter dem Mittelpunkt in der Tiefe z ein Spannungszuwachs von **0.1 q**; der letzte Ring (zwischen 0.9 und 1.0) reicht bis ins Unendliche

$$\frac{R}{z} = \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q}\right)^{-2/3} - 1}$$

$\Delta\sigma_z/q$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
R/z	0.0000	0.1865	0.2698	0.3383	0.4005	0.4598	0.5181	0.5768	0.6370	0.6998
$\Delta\sigma_z/q$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
R/z	0.7664	0.8384	0.9176	1.0067	1.1097	1.2328	1.3871	1.5944	1.9083	2.5235

200 Elemente, Einflussbeiwert 0.005

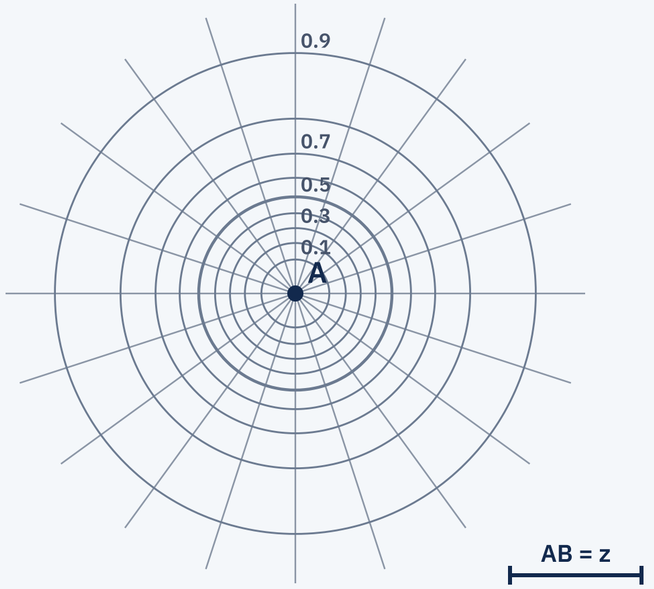
THEORIE

Newmark (1942) unterteilte die Ringe mit gleichmäßig angeordneten **Radialgeraden**. Aufgrund der Symmetrie ist der Einfluss jedes Elements im selben Ring gleich

Ist die Gesamtzahl der Elemente **N**, so ist der Beitrag jedes belasteten Elements zur Spannung unter seinem Mittelpunkt das **IV = 1/N**-Fache von q: der **Einflusswert**. Für 10 Ringe und 20 Sektoren ist N = 200, IV = 0.005

Da die Wirkung jedes Elements von seiner Lage in der Einflusskarte unabhängig ist, kann eine beliebig geformte belastete Fläche **durch Abzählen der Elemente** ermittelt werden

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = 0.005$$



$\Delta\sigma_z = (IV)\ q\ M$

THEORIE

1. Es wird die **Tiefe z** unter der belasteten Fläche gewählt, für die die Spannung gesucht ist

2. Der Grundriss der belasteten Fläche wird in einem Maßstab gezeichnet, bei dem die Tiefe z der **Einheitslänge AB** des Diagramms entspricht

3. Der Grundriss wird so auf das Diagramm gelegt, dass der Punkt, dessen Spannung gesucht ist, mit dem **Mittelpunkt** des Diagramms zusammenfällt

4. Die Anzahl der im Grundriss verbleibenden **M**-Elemente wird bestimmt; teilweise innerhalb liegende Elemente werden durch Schätzung berücksichtigt

Für jede Tiefe ist eine **gesonderte Zeichnung des Grundrisses** erforderlich

$$\Delta\sigma_z = (IV)\, q\, M$$

Anzahl der erfassten Elemente M

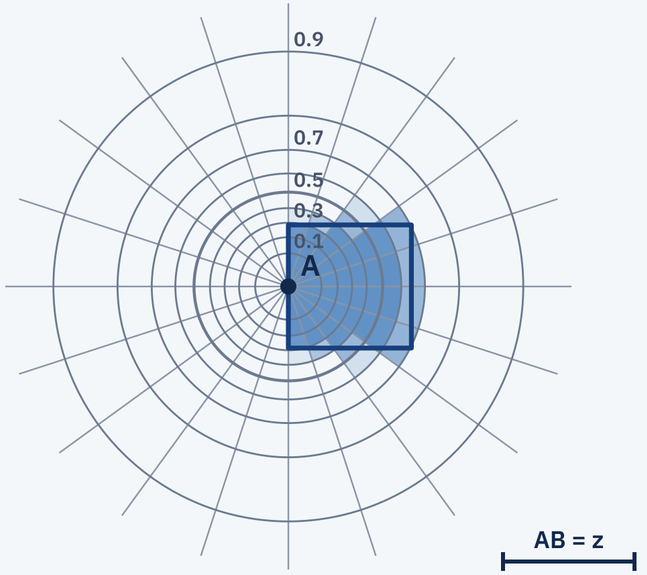
THEORIE

Das Modul zeichnet für die eingegebene Tiefe: Die erfassten Elemente werden nach den **im Grundriss verbleibenden Anteilen** schraffiert

Für die Auszählung wird ein **exakter Wert** verwendet: die Boussinesq-Lösung wird, wie beim Kreis, in Polarkoordinaten um den Punkt **über das Polygon integriert** und es ergibt sich **M = ($\Delta\sigma_z$/q)/IV**. Dieser Wert ist derjenige, den eine fehlerfreie Auszählung liefern würde

Der Grundriss kann ein beliebiges Vieleck mit höchstens sechs Eckpunkten sein

$$M = \frac{\Delta\sigma_z / q}{IV}$$



Aufgabe

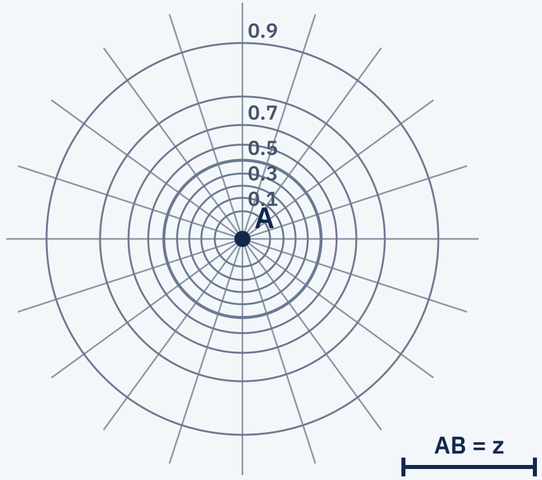
BEISPIEL

GESUCHT

Die **R/z**-Verhältnisse der Kreise; die Elementanzahl **N**, der Einflussbeiwert **IV**; die von jedem Kreis überdeckte Elementanzahl.

Gegeben

Spannungsverhältnisse	$\Delta\sigma_z/q = 0.1;\ 0.2 \ldots 0.9$ **(neun Kreise; der zehnte Ring reicht bis ins Unendliche)**
Branche	**20 gleich große radiale Lamellen**



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Für $\Delta\sigma_z/q = 0.3$

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.3)^{-2/3} - 1} = \sqrt{1.2684 - 1} = \sqrt{0.2684} = \mathbf{0.5181}$$

2 Für $\Delta\sigma_z/q = 0.9$

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.9)^{-2/3} - 1} = \sqrt{4.6416 - 1} = \sqrt{3.6416} = \mathbf{1.9083}$$

Der dritte Kreis hat den **0.5181**-fachen Radius von z, der neunte Kreis den **1.9083**-fachen; die Radien wachsen mit steigendem Spannungsverhältnis rasch an und gehen gegen unendlich, wenn sich das Verhältnis dem Wert 1 nähert.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

1 N = 10 Ringe × 20 Sektoren = 200 Elemente

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = \mathbf{0.005} \qquad k.\ \text{Kreis}: \ 20\,k\ \text{Element} \ \Rightarrow \ IV\,(20\,k) = 0.1\,k = \frac{\Delta\sigma_z}{q}$$

Kreis	$\Delta\sigma_z/q$	R/z	Abgedecktes Element	Gesamteinfluss = IV × Element
1	0.1	0.2698	20 (= 20 × 1)	0.10
2	0.2	0.4005	40 (= 20 × 2)	0.20
3	0.3	0.5181	60 (= 20 × 3)	0.30
4	0.4	0.6370	80 (= 20 × 4)	0.40
5	0.5	0.7664	100 (= 20 × 5)	0.50
6	0.6	0.9176	120 (= 20 × 6)	0.60
7	0.7	1.1097	140 (= 20 × 7)	0.70
8	0.8	1.3871	160 (= 20 × 8)	0.80
9	0.9	1.9083	180 (= 20 × 9)	0.90
10. Ring	1.0	∞	200	1.00

Jeder Ring besteht aus 20 Elementen und wirkt allein mit **0.1 q**: Die Wirkung der 20 k Elemente innerhalb des k-ten Kreises ist dieselbe wie $\Delta\sigma_z/q = 0.1\ k$ nach der Lösung für die Kreislast.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

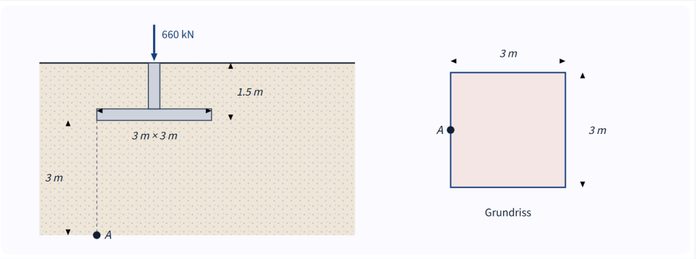
BEISPIEL

Gegeben

Fundament	3×3 **m, Stützenlast** 660 **kN (**$q = 660/(3 \times 3)$**)**
Punkt A	$z = 3$ **m unter dem Fundament, unter der Mitte einer Kante**
Diagramm	$IV = 0.005$ **(10 Ringe, 20 Sektoren)**

GESUCHT

q, Maßstab im Grundriss, **M**, **$\Delta\sigma_z$**;
Kontrolle von M mit der Rechtecklösung.



Lösung (1/3)

LÖSUNG

1 Fundamentdruck

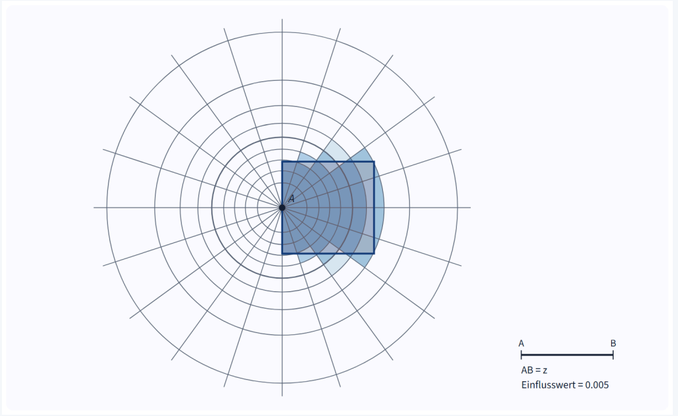
$$q = \frac{660}{3 \times 3} = \mathbf{73.33}\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 Maßstab im Grundriss: AB = z = 3 m

$$\text{Fundamentrand} = \frac{3\ \mathrm{m}}{AB} = \frac{3}{3} = 1\ AB$$

3 Anordnung: Der Punkt A wird in die Mitte des Diagramms gelegt, sodass der linke Rand des Fundaments durch die Mitte verläuft

Das Fundament wird als Quadrat mit der Seitenlänge **AB** gezeichnet, und der Mittelpunkt seiner linken Kante (A) wird in den Mittelpunkt des Diagramms gelegt (Abbildung rechts).



Lösung (2/3)

LÖSUNG

4 A liegt in der Mitte des Randes: Das Fundament wird in zwei Rechtecke mit einer Ecke bei A aufgeteilt (1.5 m × 3 m)

$$m = \frac{1.5}{3} = 0.5\,, \quad n = \frac{3}{3} = 1\,, \quad m^2 = 0.25\,, \quad n^2 = 1\,, \quad \sqrt{m^2+n^2+1} = 1.50$$

5 Boussinesq-Lösung für die Rechteck-Ecke $I_3(0.5; 1)$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \tan^{-1}\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+1-m^2n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1.5}{2.5}\cdot\frac{3.25}{2.25} + \tan^{-1}\frac{1.5}{2.0}\right] = \frac{0.8667+0.6435}{4\pi} = \mathbf{0.12018}$$

Der Einflussbeiwert des Rechtecks 1.5 m × 3 m mit einer Ecke in A beträgt **I_3 = 0.12018**; da die beiden Rechtecke symmetrisch zu beiden Seiten von A liegen, ergibt sich insgesamt 2 I_3.

Lösung (3/3)

LÖSUNG

6 Anzahl der Elemente

$$M = \frac{\Delta\sigma_z/q}{IV} = \frac{2\,I_3}{IV} = \frac{2\,(0.12018)}{0.005} = \mathbf{48.07}$$

7 Spannungszuwachs

$$\Delta\sigma_z = (IV)\,q\,M = (0.005)\left(\frac{660}{3\times 3}\right)(48.07) = 0.005 \times 73.33 \times 48.07 = \mathbf{17.63}\ \mathrm{kN/m^2}$$

8 Direkt mit der Boussinesq-Lösung für Rechteck

$$\Delta\sigma_z = 2\,q\,I_3 = 2\,(73.33)(0.12018) = \mathbf{17.63}\ \mathrm{kN/m^2}$$

Am Punkt A erfasst das Diagramm **M = 48.07 Elemente** (24.0 % des Grundrisses mit 200 Elementen): **$\Delta\sigma_z$ = 17.63 kN/m²** (24.0 % von q); das Modul liefert denselben Wert.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Plan	**Beispiel 2: Fundament 3×3 m, A Mittelpunkt des linken Randes, $z = 3$ m ($AB = 3$ m)**
Aufgaben	**Anzahl der in jedem Ring erfassten Elemente; Summe M; Beitrag eines Elements zur Spannung**

GESUCHT

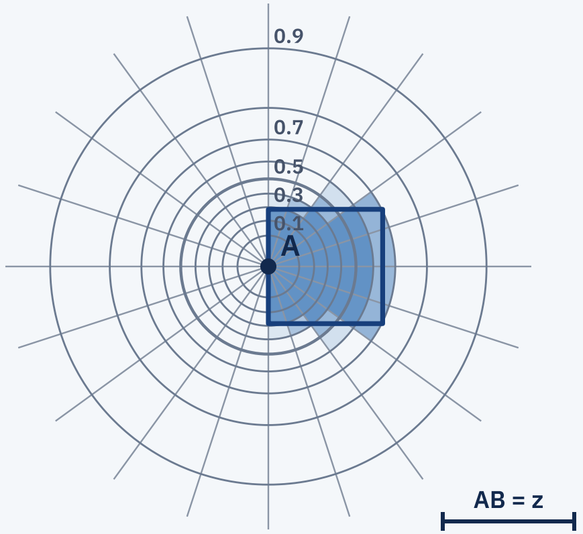
Erfasste Elemente je Ring (von 20 Elementen) und die Summe; der Einfluss eines Fehlers um **ein Element** bei der Zählung.

Lösung

LÖSUNG

Ring	Bereich R/z	Überdecktes Element	Element im Ring
1	0.000 – 0.270	**10.00**	20
2	0.270 – 0.400	**10.00**	20
3	0.400 – 0.518	**9.82**	20
4	0.518 – 0.637	**6.78**	20
5	0.637 – 0.766	**5.09**	20
6	0.766 – 0.918	**4.08**	20
7	0.918 – 1.110	**2.29**	20
8	1.110 – 1.387	**0.00**	20
9	1.387 – 1.908	**0.00**	20
10	1.908 – ∞	**0.00**	20
Summe		**48.07**	200

Die ersten beiden Ringe sind Halbkreise (**10 + 10**): Die Seite A liegt auf dem Rand. Summe **M = 48.07**. Ein Element = IV q = 0.37 kN/m²: Eine Differenz von 1 Element in der Zählung ändert $\Delta\sigma_z$ um 0.37 kN/m² (2.1 %).



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Fundament und Punkt	**Das Fundament aus Beispiel 2 und Punkt A ($q = 73.33$ kN/m²)**
Tiefen	**$z = 1.2;\ 2.4;\ 3.6 \ldots 12$ m (die Profiltabelle des Moduls)**

GESUCHT

Der Maßstabsfaktor des Grundrisses in jeder Tiefe, **M** und **$\Delta\sigma_z$**; handschriftlich für z = 6 m.

Lösung (1/2)

LÖSUNG

z (m)	Fundamentkante (Einheit AB)	M (Element)	$\Delta\sigma_z$ = IV q M (kN/m²)
1.2	2.500	87.03	**31.91**
2.4	1.250	59.27	**21.73**
3.6	0.833	39.16	**14.36**
4.8	0.625	26.72	**9.80**
6.0	0.500	19.01	**6.97**
7.2	0.417	14.07	**5.16**
8.4	0.357	10.76	**3.95**
9.6	0.312	8.47	**3.11**
10.8	0.278	6.82	**2.50**
12.0	0.250	5.61	**2.06**

Mit zunehmender Tiefe verkleinert sich das Plandiagramm zum Zentrum hin (Fundamentkante 2.50 AB bei z = 1.2 m, 0.25 AB bei z = 12 m) und erfasst weniger Elemente: **M = 87.03 → 5.61**. Für jede Zeile wurde der Plan neu gezeichnet.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

1 Grundriss-Maßstab und m, n

$$AB = z = 6\ \text{m} \Rightarrow \text{Fundamentrand} = \frac{3}{6} = 0.5\,AB\ ; \quad m = \frac{1.5}{6} = 0.25\ , \quad n = \frac{3}{6} = 0.5$$

2 Anzahl der Elemente und Spannung

$$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753 \ \Rightarrow \ M = \frac{2\,(0.04753)}{0.005} = \mathbf{19.01}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 19.01 = \mathbf{6.97}\ \text{kN/m}^2$$

Bei z = 6 m ist sie relativ zum Mittelpunkt des Fundamentdiagramms sehr klein und umfasst nur **19.01 Elemente**; $\Delta\sigma_z$ = **6.97 kN/m²** (17.63 kN/m² bei z = 3 m).

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

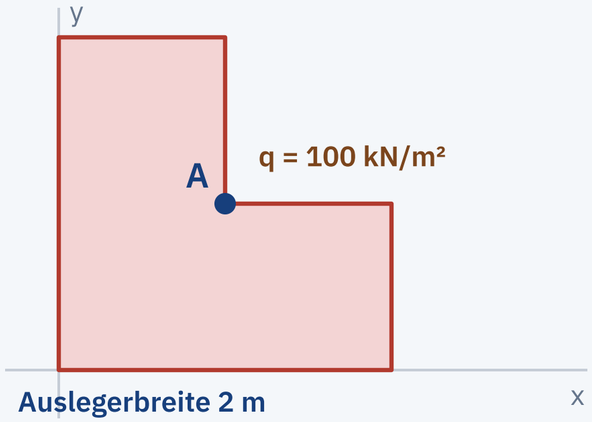
BEISPIEL

Gegeben

Fläche	**L-förmig (6 Ecken):** $(0;0),\ (4;0),\ (4;2),\ (2;2),\ (2;4),\ (0;4)$ **m;** $q = 100$ **kN/m²**
Punkt A	**unter der einspringenden Ecke,** $(2;\ 2)$**;** $z = 2$ **m**
Hinweis	**Drei der vier 2 m × 2 m großen Viertelflächen um A sind belastet**

GESUCHT

M und $\Delta\sigma_z$; ringweise Summation.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Planschlüssel und Quadranten

$$AB = z = 2\,\mathrm{m} \Rightarrow \text{Armbreite} = 1\,AB\,; \quad \text{je Viertel: } m = n = \frac{2}{2} = 1$$

2 Anzahl der Elemente in einem Viertel und die Summe

$$I_3(1;1) = 0.17522 \;\Rightarrow\; M_{\text{Quadrant}} = \frac{0.17522}{0.005} = 35.04$$

$$M = 3\,M_{\text{Quadrant}} = 3\,(35.04) = \mathbf{105.13}$$

3 Spannung

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 100 \times 105.13 = \mathbf{52.57}\ \mathrm{kN/m^2} \qquad \left(= 3\,q\,I_3 = 3\,(100)(0.17522)\right)$$

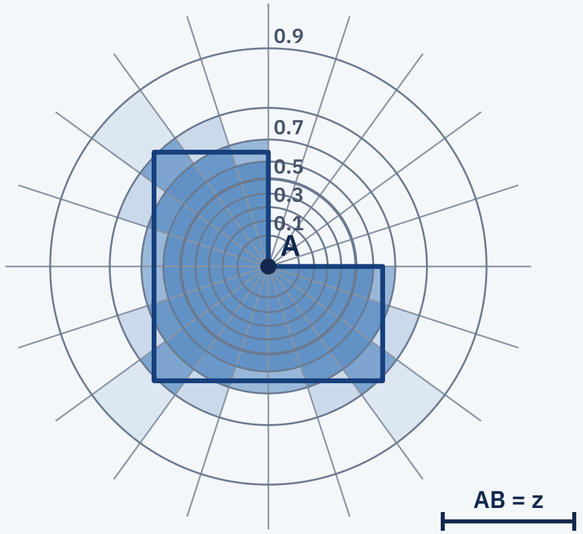
Unter der einspringenden Ecke erfasst die L-förmige Last **105.13 Elemente**: drei der vier Quadranten. Wären alle vier Quadranten belastet, ergäbe sich M = 140.18.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

Ring	Überdecktes Element	Element im Ring
1	**15.00**	20
2	**15.00**	20
3	**15.00**	20
4	**15.00**	20
5	**15.00**	20
6	**15.00**	20
7	**11.94**	20
8	**3.18**	20
9	**0.01**	20
10	**0.00**	20
Summe	**105.13**	200

In den Ringen 1–6 werden **15 Elemente** jedes Rings (drei Viertel von 20) erfasst; in den äußeren Ringen sind nur die Ecken des Grundrisses wirksam (7. Ring: 11.94 Elemente, 8. Ring: 3.18 Elemente). Summe **M = 105.13**.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

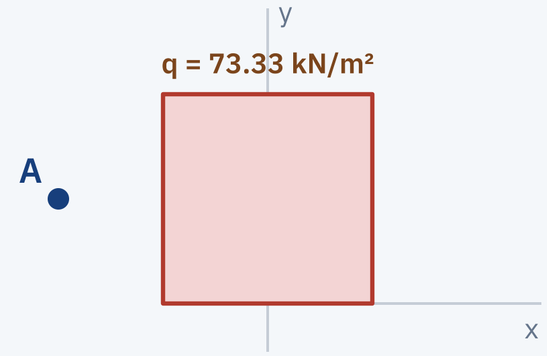
BEISPIEL

Gegeben

Grundriss und Last	**Das Fundament mit 3×3 m aus Beispiel 2 ($q = 73.33$ kN/m²)**
Punkt A	**außerhalb des Fundaments: $x = -3$ m, $y = 1.5$ m (1.5 m vom linken Rand entfernt); $z = 3$ m**

GESUCHT

M und **$\Delta\sigma_z$**; die Bedeutung der Zählung an einem Außenpunkt.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Abstände von A zum Fundament (z = 3 m)

$$x:\ 1.5\ \text{mit m}\ 4.5\ \text{m};\quad y:\ \pm 1.5\ \text{m}\ \Rightarrow\ m=\frac{1.5}{3}=0.5\ \text{und}\ \frac{4.5}{3}=1.5\,,\ \ n=0.5$$

2 Zwei schraffierte Rechtecke (4.5 × 3 m minus 1.5 × 3 m), symmetrisch: das Doppelte

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q}=2\left[I_3(1.5;0.5)-I_3(0.5;0.5)\right]=2\left[0.13136-0.08403\right]=0.09466$$

$$M=\frac{0.09466}{0.005}=\mathbf{18.93}$$

$$\Delta\sigma_z=0.005\times 73.33\times 18.93=\mathbf{6.94}\ \text{kN/m}^2$$

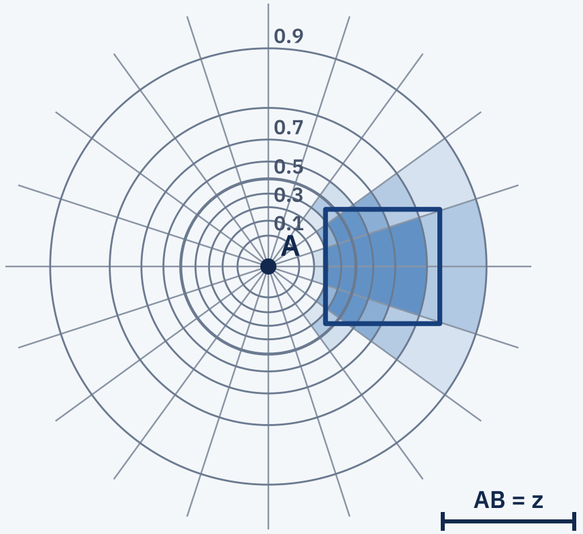
Auch ein äußerer Punkt erhält Spannung: **Element M = 18.93**, **$\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²**; der Grundriss deckt den Mittelpunkt des Diagramms nicht ab.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

Ring	Überdecktes Element	Element im Ring
1	**0.00**	20
2	**0.00**	20
3	**0.18**	20
4	**3.22**	20
5	**4.69**	20
6	**4.08**	20
7	**3.31**	20
8	**2.66**	20
9	**0.80**	20
10	**0.00**	20
Summe	**18.93**	200

Der Grundriss geht ab dem 3. Ring in das Diagramm ein und wirkt am stärksten beim 5. Ring (4.69 Elemente). Gesamt **M = 18.93**; für dasselbe Fundament unter dem Mittelpunkt wäre M = 67.22.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Zusammenfassung

Die wichtigsten Punkte

Diagramm: neun Kreise mit dem Radius $R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}$ und 20 Radialgeraden; **200 Elemente**, der Einfluss jedes Elements ist **IV = 1/N = 0.005**

Anwendung: Grundriss AB = z im Maßstab, Punkt A im Zentrum; Anzahl der bedeckten Elemente M; **$\Delta\sigma_z$ = (IV) q M**; für jede Tiefe ein gesonderter Grundriss

Beispiel (3 m × 3 m, 660 kN, z = 3 m, Seitenmitte): q = 73.33 kN/m²; M = 48.07; $\Delta\sigma_z$ = **17.63 kN/m²**; bei z = 6 m: M = 19.01, $\Delta\sigma_z$ = 6.97 kN/m²

Jede Form: L-förmiger Grundriss, einspringende Ecke (M = 105.13, $\Delta\sigma_z$ = 52.57 kN/m²); Punkt außerhalb der Fläche (M = 18.93, $\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²)

Genauigkeit: der Einfluss eines Elements ist IV q = 0.37 kN/m²; sie liefert den Steifemodul M durch exakte Integration (fehlerfreie Summation)

Literatur

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Newmark, N.M. (1942). Influence charts for computation of stresses in elastic foundations. University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin No. 338.

HINWEIS

Alle Zahlenbeispiele wurden mit der Berechnungsengine des Moduls selbst erzeugt; das Modul liefert dieselben Werte. Das Eröffnungsbeispiel des Moduls: Fundament 3 m × 3 m, 660 kN, 3 m unter der Mitte des Randes A.

GeoTerva

Geotechnische Berechnungen online

Von der Theorie zur Praxis

Der eigene Grundriss (ein Vieleck mit höchstens sechs Eckpunkten), die Last und der Punkt A werden in GeoTerva eingegeben; das Modul zeichnet das Diagramm für die eingegebene Tiefe, schraffiert die erfassten Elemente und liefert M, den Wert $\Delta\sigma_z$, das Tiefenprofil, die schrittweise Lösung und den Bericht zusammen.

Modul öffnen →

Theorieseite →

Auf dem Smartphone öffnen

Die Beispielmodule erfordern keine Registrierung.

Falls Sie sie in Ihren Vorlesungen verwenden möchten: info@geoterva.com