GeoTerva

岩土工程课程讲义 · 侧向土压力

Mononobe–Okabe地震土压力

讲义：地震时墙后土楔的拟静力水平力和竖向力、Mononobe–Okabe主动土压力系数、平衡极限、作用线；超载与地下水；每个专题均配有工程算例。

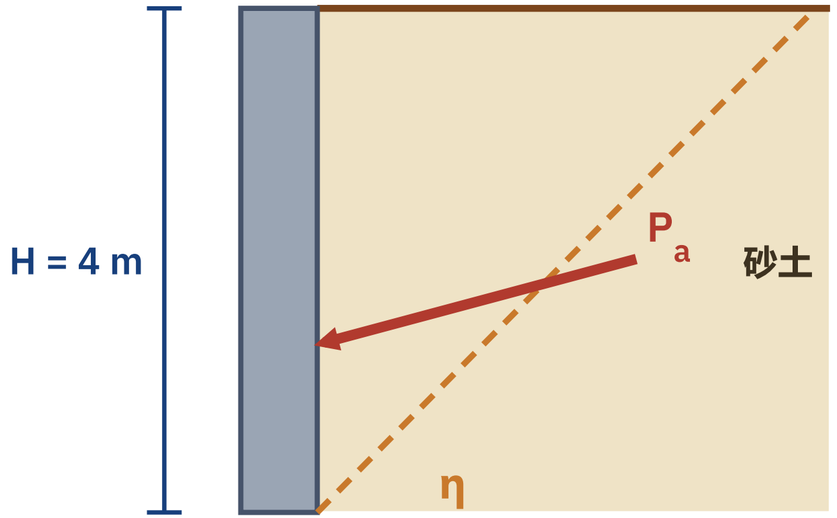
拟静力土楔

$\psi = \tan^{-1} k_h/(1 - k_v)$

Seed – Whitman

超载 · 水

平衡极限



引言

本讲内容

- 掌握以**拟静力**水平力(k_hW)和竖向力(k_vW)表示地震作用
- **地震角**ψ和Mononobe–Okabe系数K'_a；$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$
- **平衡极限**：若超过$k_{h,cr} = (1 - k_v)\tan\varphi'$，则没有任何土楔能保持平衡
- 用Seed–Whitman法确定合力的**作用位置**：$P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$，$\Delta P_{ae}$作用于0.6H处
- 计入超载与**地下水**（随土体一起运动或不随土体运动）
- 了解k_h、k_v及几何参数变化时合力如何变化

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：规则是什么，为什么如此?

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

力均按墙体单位长度计(kN/m)；k_h、k_v为加速度与g之比；k_v以向上为正。

Okabe (1926)和Mononobe–Matsuo (1929)

理论

地震时，墙后土楔产生加速度。拟静力法用作用于Coulomb土楔的两个**恒定刚体力**来表示地震振动：

$k_h W$：水平方向，指向墙（k_h = 水平加速度/g）

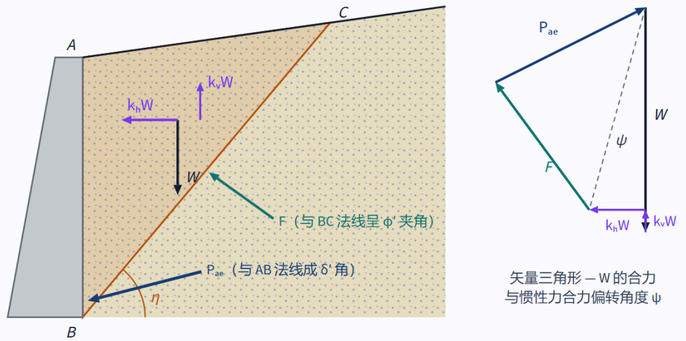
$k_v W$：竖向（此处向上；减小重量）

W、F（倾角φ′）和P_{ae}（倾角δ′）与Coulomb理论中相同。

W、$k_h W$与$k_v W$之和为一个自竖直方向旋转地震角**ψ**的力；也就是说，地震土楔是重力方向旋转了ψ的Coulomb土楔（墙面θ + ψ，填土α + ψ）：

$$\psi = \tan^{-1}\frac{k_h}{1-k_v} \qquad W' = \frac{W(1-k_v)}{\cos\psi}$$

主动土压力合力仍是各试算土楔中的**最大值**。



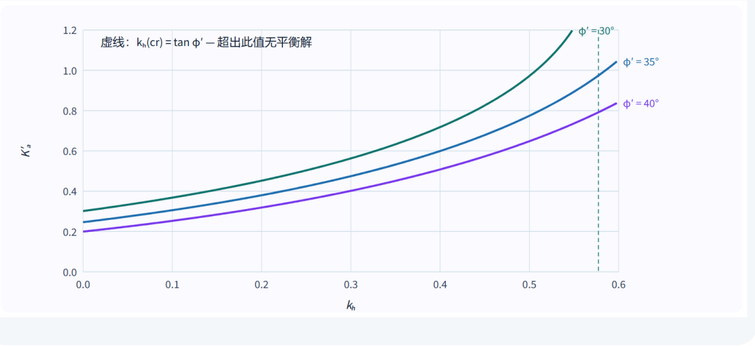
动主动土压力合力

理论

$$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2 (1 - k_v) K'_a$$

$$K'_a = \frac{\cos^2(\varphi' - \theta - \psi)}{\cos\psi \cos^2\theta \cos(\delta' + \theta + \psi)\left[1 + \sqrt{\dfrac{\sin(\varphi' + \delta')\sin(\varphi' - \alpha - \psi)}{\cos(\delta' + \theta + \psi)\cos(\theta - \alpha)}}\right]^2}$$

k_h	φ′ = 28°	30°	35°	40°	45°
0.1	0.396	0.368	0.306	0.253	0.207
0.2	0.485	0.452	0.380	0.319	0.267
0.3	0.604	0.563	0.474	0.402	0.340
0.4	0.778	0.718	0.599	0.508	0.433
0.5	1.115	0.972	0.774	0.648	0.552



当$k_h = k_v = 0$时，ψ = 0，K'_a即为Coulomb的K_a。表中：θ = α = 0，δ′ = φ′/2。

K'_a随k_h迅速增大；趋近极限时趋于无穷大。

题目

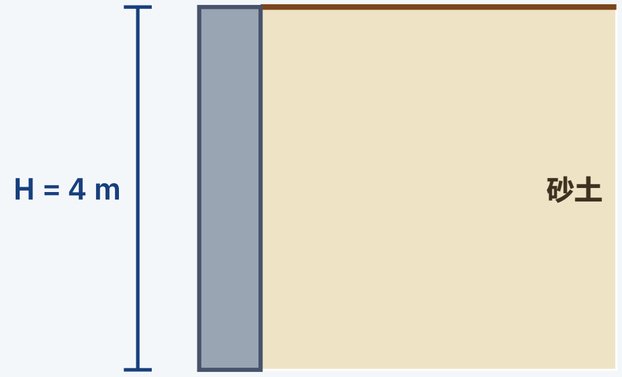
算例

求

ψ、K′a、Pae及临界土楔；与静力Coulomb解的比较。模块默认载入该挡土墙。

已知条件

墙	$H = 4$ m，竖直；水平填土；无地面超载
土	干砂：$\gamma = 15.5$ kN/m^3，$\varphi' = 30^\circ$，$\delta' = 15^\circ$
地震	$k_h = 0.2$，$k_v = 0$



γ = 15.5 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k_h = 0.2

解答 (1/2)

解答

1 地震角

$$\psi = \tan^{-1}\frac{0.2}{1-0} = \mathbf{11.31^\circ}$$

2 Mononobe–Okabe系数(θ = α = 0)

$$\cos^2(30^\circ - 11.31^\circ) = 0.8973 \qquad \cos\psi = 0.9806 \qquad \cos(15^\circ + 11.31^\circ) = 0.8964$$

$$\sqrt{\frac{\sin 45^\circ \sin(30^\circ - 11.31^\circ)}{\cos(15^\circ + 11.31^\circ)}} = \sqrt{0.2528} = 0.5028$$

$$K'_a = \frac{0.8973}{0.9806(0.8964)(1+0.5028)^2} = \mathbf{0.4520}$$

解答 (2/2)

解答

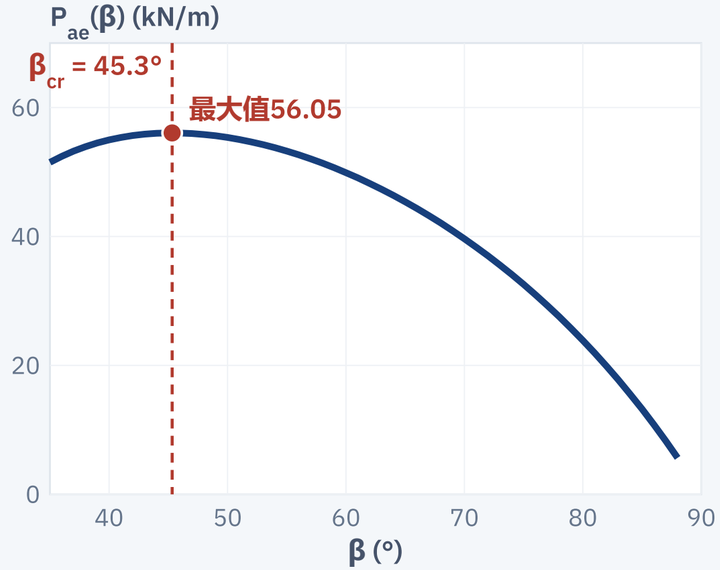
3 动态力

$$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1-k_v)K'_a$$
$$= \frac{1}{2}(15.5)(4)^2(1-0)(0.4520) = \mathbf{56.05}\ \text{kN/m}$$

4 临界土楔（试算土楔的顶点）

$$\beta_{cr} = \mathbf{45.3}^\circ \quad \text{（与水平方向）}$$

P_{ae} = **56.05 kN/m**；静力Coulomb土压力(K_a = 0.3014)为37.38 kN/m：地震作用使其**增大了50%**。临界土楔与水平面成45.3°角。



在GeoTerva中验算解答 ↗

临界水平加速度

理论

根号下的sin(φ′ − α − ψ)在φ′ − α − ψ < 0时不是实数：**任何土楔都不可能处于平衡**，与墙的性状无关。填土仅在下列条件下稳定：

$$\alpha \le \varphi' - \psi$$

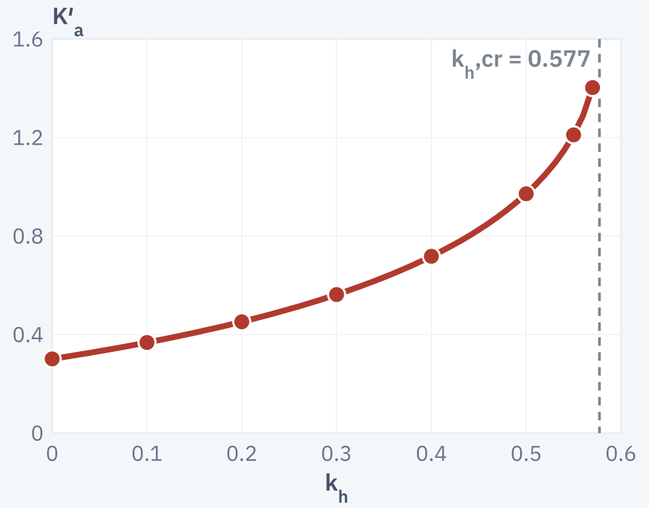
对于水平填土，这要求ψ ≤ φ′，即水平加速度不能超过：

$$k_{h(cr)} = (1 - k_v)\tan\varphi' \qquad (\alpha \neq 0:\ \tan(\varphi' - \alpha))$$

接近极限时K'_a增长极快（φ′ = 30°时，$k_{h,cr}$ = 0.577）。

k_h超过限值时，模块以提示信息终止计算。

K'_a – k_h (φ′ = 30°, δ′ = 15°)



题目

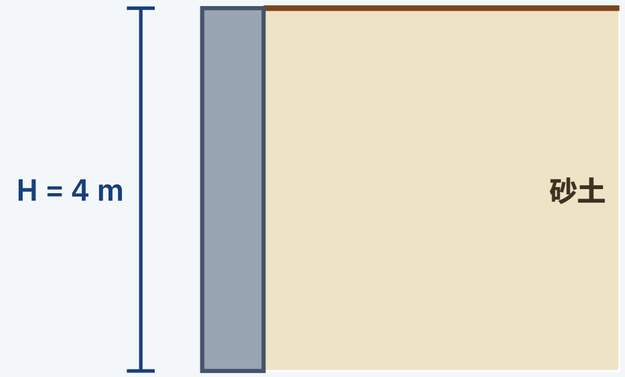
算例

求

对每个k_h，求**ψ**、**K′a**和**Pae**；临界k_h；k_h = 0.6时的结果。

已知条件

墙与土体	**算例1中的墙：** $H = 4$ m，$\gamma = 15.5$ kN/m^3，$\varphi' = 30°$，$\delta' = 15°$，$k_v = 0$
变量	$k_h = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5;\ 0.55;\ 0.57$



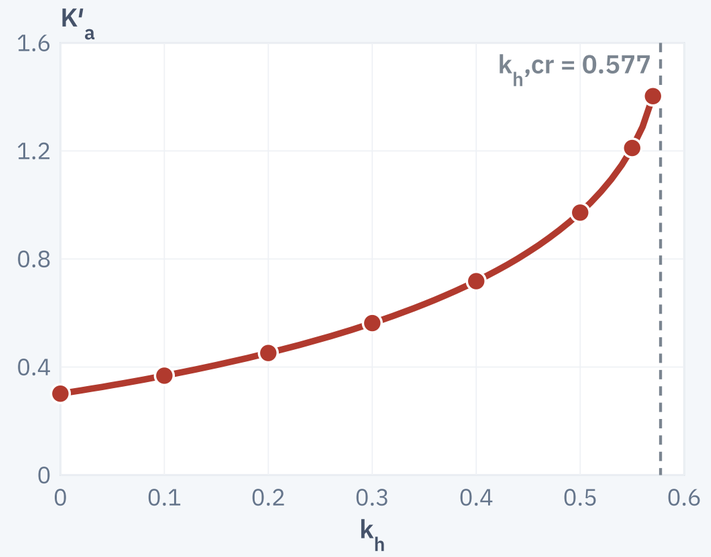
γ = 15.5 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°

解答

解答

1 $\psi = \tan^{-1} k_h$; $k_{h,cr} = \tan 30° = 0.577$

k_h	ψ (°)	K'_a	P_{ae} (kN/m)
0.00	0.0	0.301	37.4
0.10	5.7	0.368	45.6
0.20	11.3	0.452	56.1
0.30	16.7	0.563	69.8
0.40	21.8	0.718	89.0
0.50	26.6	0.972	120.5
0.55	28.8	1.211	150.1
0.57	29.7	1.403	174.0



k_h由0增至0.2时，P_{ae}由37.4增至56.1 kN/m (50%)，增至0.5时则为120.5 kN/m（3.2倍）；当k_h趋近0.57时，K'_a无限增大。**$k_h = 0.6 > 0.577$**：平方根不是实数，没有任何土楔处于平衡：模块停止计算。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

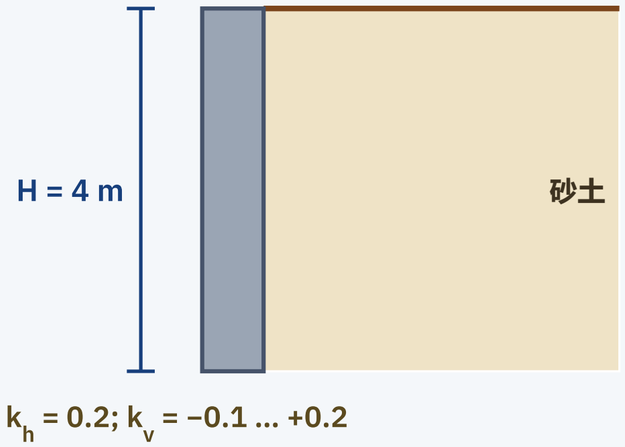
算例

已知条件

墙与土体	**算例1中的墙与土；$k_h = 0.2$**
变量	**$k_v = -0.1$（向下），0，$+0.1$，$+0.2$（向上）**

求

对每个k_v，求**ψ**、**K'_a**、**$(1 - k_v)$**和**P_{ae}**；哪个方向更不利？



解答

解答

1 $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; $P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a = 124\,(1 - k_v)\,K'_a$

k_v	ψ (°)	K'_a	$1 - k_v$	P_{ae} (kN/m)
-0.1	10.30	0.4351	1.1	59.35
0.0	11.31	0.4520	1.0	56.05
0.1	12.53	0.4739	0.9	52.89
0.2	14.04	0.5032	0.8	49.92

向下的k_v(−0.1)使该力增至59.3 kN/m(+6%)，向上的k_v = 0.2使其降至49.9 kN/m。尽管ψ随向上的k_v增大，但$(1 - k_v)$这一系数起主导作用。实际中取$k_v = \pm 0.5\,k_h$，并选取使力较大的方向。

在GeoTerva中验算解答 ↗

Seed与Whitman (1970)

理论

Mononobe–Okabe分析给出力的大小和方向，但**不能给出其作用位置。**Seed和Whitman将该力分解为静力Coulomb土压力与地震增量：

$$P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$$

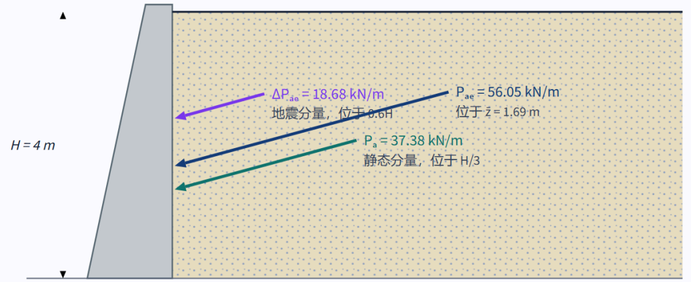
$$\bar{z} = \frac{P_a \dfrac{H}{3} + \Delta P_{ae}\,(0.6H)}{P_{ae}}$$

P_a（采用相同的δ′、θ、α，按$\frac{1}{2}K_a\gamma H^2$计算）作用于距底面**H/3**的高度处；ΔP_{ae}作用于**0.6H**高度处（三角形分布图为向底面收窄的倒三角形）。

合力仍与墙面法线成δ′角。

增量有时取作用于半高处；0.6H处给出更大的倾覆力矩，故以此为准。

静力+地震增量



题目

算例

已知条件

墙体与地震

算例1中的墙： $H = 4\ \mathrm{m}$，$\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3}$，$\varphi' = 30^\circ$，$\delta' = 15^\circ$，$k_h = 0.2$

求

P_a、ΔP_{ae}和$\bar{z}$；ΔP_{ae}作用于半高处时的$\bar{z}$。

解答

解答

1 静力(K_a = 0.3014)与地震增量

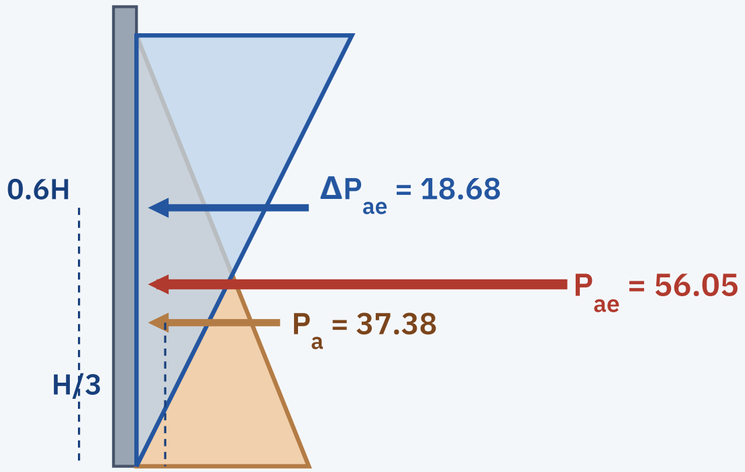
$$P_a = \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(0.3014) = 37.38 \text{ kN/m}$$

$$\Delta P_{ae} = P_{ae} - P_a = 56.05 - 37.38 = \mathbf{18.68} \text{ kN/m}$$

2 作用高度（自底面起算）

$$\bar{z} = \frac{37.38(4/3) + 18.68(2.4)}{56.05} = \mathbf{1.69} \text{ m}$$

$\bar{z}$ = **1.69 m**（静力情形下为1.33 m）。若增量取在半高处(2.0 m)，则得$\bar{z}$ = 1.56 m：0.6H的假定使合力位置上移，**使倾覆力矩增大。**



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

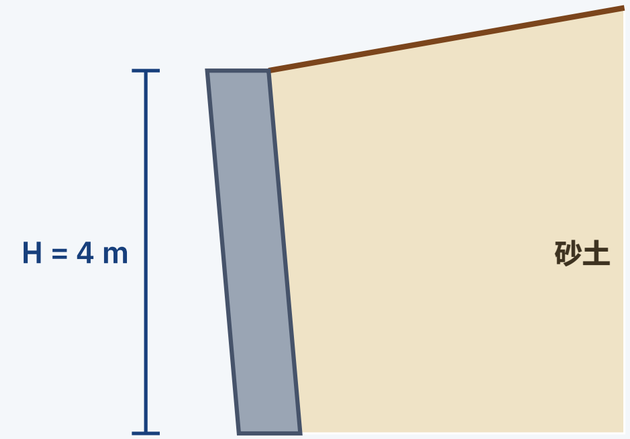
算例

已知条件

墙	$H = 4$ m；**墙面自竖直方向倾斜**$\theta = 5^\circ$
填土	**地表坡度**$\alpha = 10^\circ$；$\gamma = 15$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$, $\delta' = 15^\circ$
地震	$k_h = 0.15$, $k_v = 0$

求

ψ、K'_{ae}、P_{ae}、ΔP_{ae}、$\bar{z}$；平衡极限验算。



γ = 15, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k_h = 0.15

解答

解答

1 地震角与平衡极限

$$\psi = \tan^{-1} 0.15 = \mathbf{8.53}^\circ \qquad k_{h(cr)} = \tan 20^\circ = 0.364 > 0.15$$

2 系数与作用力（静力条件下K_a = 0.3872）

$$K'_a(\theta = 5^\circ, \alpha = 10^\circ, \psi = 8.53^\circ) = \mathbf{0.5435}$$

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}(15)(4)^2(0.5435) = \mathbf{65.22}\ \text{kN/m} \qquad P_a = 46.46\ \text{kN/m}$$

3 作用高度

$$\Delta P_{ae} = 18.76\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \frac{46.46(1.33) + 18.76(2.4)}{65.22} = \mathbf{1.64}\ \text{m}$$

P_{ae} = **65.22 kN/m**，作用于底面以上1.64 m处；临界土楔角为44.2°；地震力使其增大了40%。

在GeoTerva中验算解答 ↗

模块扩展

理论

超载q连同各土楔的自重一起，也计入其惯性力；临界土楔不变：

$$q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} \qquad P_{ae} = (1-k_v)K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right)$$

地下水条件下，孔隙水或与土体一同运动（**受约束**，细粒填土），或不运动（**自由**，k > 5·10⁻⁴ m/s）。惯性力取决于饱和或干燥的质量，应力由浮重度承担；水下时地震角增大：

$$\tan\psi_w = \frac{\gamma_{sat}}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{（受约束）} \qquad \tan\psi_w = \frac{\gamma_d}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{（自由）}$$

$$p_{wd} = \tfrac{7}{8}k_h\gamma_w\sqrt{d_w z'} \qquad P_{wd} = \tfrac{7}{12}k_h\gamma_w d_w^2\ (0{,}4\,d_w\ \text{高度处，Westergaard})$$

对自由水体需加入Westergaard动水压力。在分层填土中，各层按各自的K'_a取$\sigma' = (1-k_v)K'_{a,i}\sigma'_v\cos\theta$；静力部分与$\Delta P_{ae}$ (0.6H)分别求和。

为什么水很重要?

水使地震角增大($\psi_w > \psi$)，并在静水压力之外引入**（自由状态下的）动水压力。**

题目

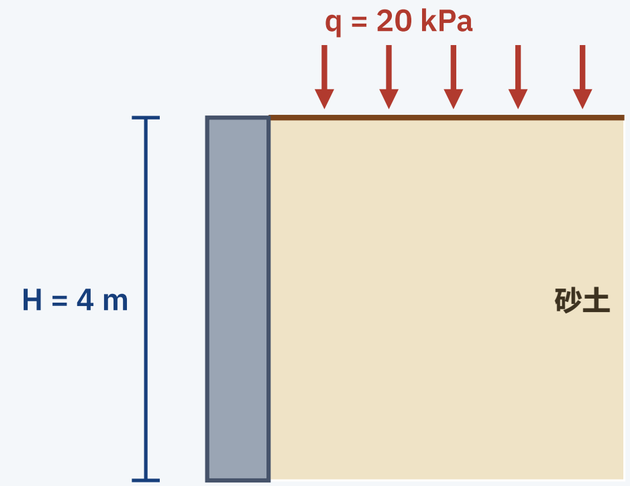
算例

已知条件

墙与土体	**算例1中的墙体与土体($k_h = 0.2$)**
超载	$q = 20$ **kPa（水平地面上）**

求

总P_{ae}、静力部分、地震增量和$\bar{z}$。



解答

解答

1 等效应力及作用力($K'_a = 0.4520$)

$$q_e = q\cos 0^\circ / \cos 0^\circ = 20 \text{ kPa}$$

$$P_{ae} = K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right) = 0.4520(124 + 80) = 0.4520(204) = \mathbf{92.21} \text{ kN/m}$$

2 静力部分(Coulomb $K_a = 0.3014$)及增量

$$P_a = K_a(204) = 61.49 \text{ kN/m} \qquad \Delta P_{ae} = 30.73 \text{ kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{(37.38)(1.33) + (24.11)(2.0) + (30.73)(2.4)}{92.21} = \mathbf{1.86} \text{ m}$$

P_{ae} = **92.21 kN/m**（无超载时为56.05）；$\bar{z}$ = **1.86 m**。超载的静力部分作用于H/2处，其地震增量作用于0.6H处。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

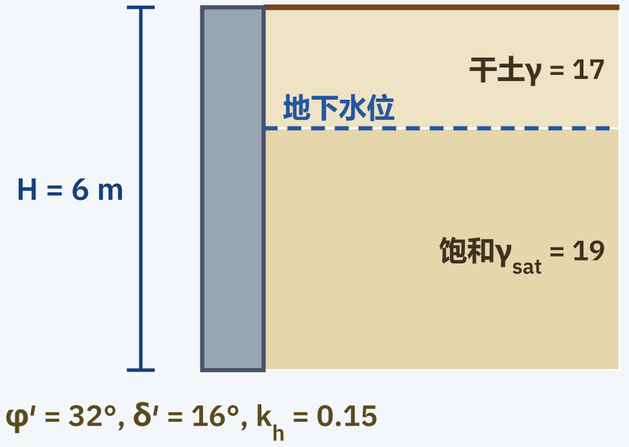
算例

已知条件

墙	$H = 6$ m，竖直；水平填土；无地面超载
土	$\gamma = 17$ kN/m^3（干燥，0–2 m），$\gamma_{sat} = 19$ kN/m^3 (2–6 m)；$\varphi' = 32°$, $\delta' = 16°$
地震	$k_h = 0.15$，$k_v = 0$；地下水位2 m (dw = 4 m)

求

水与土体一起运动（**受约束**）和不一起运动（**自由**）两种情况下的总P与z̄；与静力值的比较。



解答 (1/2)

解答

1 水下的等效k_h和ψ_w

$$\text{受约束：}\quad k_{h,w} = \frac{19}{19-9.81}(0.15) = 0.3101 \;\Rightarrow\; \psi_w = 17.23^\circ$$

$$\text{自由：}\quad k_{h,w} = \frac{17}{19-9.81}(0.15) = 0.2775 \;\Rightarrow\; \psi_w = 15.51^\circ$$

2 系数（干区ψ = 8.53°）

$K'_a(\text{干燥}) = 0.3792$　　$K'_a(\text{受约束，水下}) = 0.5372$　　$K'_a(\text{自由，水下}) = 0.4991$

解答 (2/2)

解答

3 各力(kN/m)；$P_{wd} = (7/12)(0.15)(9.81)(4)^2 = 13.73$ kN/m，位于上方$0.4 \cdot d_w = 1.6$ m处

	土体P_{ae}	静水	动水压力（Westergaard）	总P	$\bar{z}$ (m)
静力($k_h = 0$)	67.74	78.48	–	144.80	1.71
受限水	125.46	78.48	–	202.06	2.24
自由水	117.47	78.48	13.73	207.67	2.15

与静力工况相比，地震使总作用力增大了**40%**（受约束）和**43%**（自由）；$\bar{z}$由1.71升至2.24 m。受约束时土体作用力较大（ψ_w较大），自由时则增加动水压力；两者总和非常接近（202.1和207.7 kN/m）。

在GeoTerva中验算解答 ↗

解答范围

理论

拟静力法：地震以恒定的k_h、k_v表示；不考虑加速度随时间及墙体位移的变化（Newmark滑块位移、动力分析）。

平面土楔、无黏聚力干填土(Mononobe–Okabe)；分层情形为模块的扩展（无分层闭合解）；单层时退化为闭合解，$k_h = k_v = 0$ 时退化为分层Coulomb解。

水：受约束（细粒土）或自由($k > 5\cdot10^{-4}$ m/s)；水自由时，加上Westergaard动水压力。

作用位置按Seed–Whitman：P_a在H/3处，ΔP_{ae}在0.6H处；水按其自身力臂计。

被动土压力请参见“地震作用下的被动土压力(Subba Rao–Choudhury)”模块。

小结

要点回顾

拟静力法：$k_h W$，$k_v W$；$\psi = \tan^{-1}[k_h/(1-k_v)]$；地震土楔即旋转$\psi$角后的Coulomb土楔

$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1-k_v)K'_a$；$K'_a$随$k_h$迅速增大；$k_h = k_v = 0$时即为Coulomb解

平衡极限：$k_{h,cr} = (1-k_v)\tan\varphi'$（填土面倾斜时为$\tan(\varphi'-\alpha)$）；超过该值则无解

k_v：使向下的力增大；实践中取$\pm 0.5k_h$中较不利者

作用位置：$P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$；$P_a$作用于H/3处，$\Delta P_{ae}$作用于0.6H处；$\bar{z} = [P_a(H/3) + \Delta P_{ae}(0.6H)]/P_{ae}$

超载按$q_e = q\cos\theta/\cos(\theta-\alpha)$叠加；**水下**$\psi_w$增大（受限：$\gamma_{sat}/\gamma'$，自由：$\gamma_d/\gamma'$），自由水中另加动水压力$(7/12)k_h\gamma_w d_w^2$

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Mononobe, N. and Matsuo, H. (1929). On the determination of earth pressure during earthquakes. Proceedings, World Engineering Congress, Tokyo, 9, 177–185.

Okabe, S. (1926). General theory of earth pressure. Journal of the Japan Society of Civil Engineering, 12(1).

Seed, H.B. and Whitman, R.V. (1970). Design of earth retaining structures for dynamic loads. Specialty Conference on Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth Retaining Structures, ASCE, 103–147.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1933). Water pressures on dams during earthquakes. Transactions ASCE, 98, 418–433.

注

所有数值算例均由模块自带的计算引擎生成；模块给出的数值与之相同。模块打开时载入算例1中的挡土墙(k_h = 0.2, δ' = 15°)。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自己的墙体、地震系数k_h和k_v、超载、土层及地下水；模块同时给出P_{ae}、作用点高度和临界土楔。

打开模块→

理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。

如需在课堂教学中使用：info@geoterva.com