GeoTerva

Лекция по геотехнике · Боковое давление грунта

Давление грунта при землетрясении по Mononobe–Okabe

Лекция: псевдостатические горизонтальные и вертикальные силы, действующие на призму обрушения за стеной при землетрясении, коэффициент активного давления Mononobe–Okabe, предел равновесия, линия действия; пригрузка и грунтовые воды; пример расчёта по каждой теме.

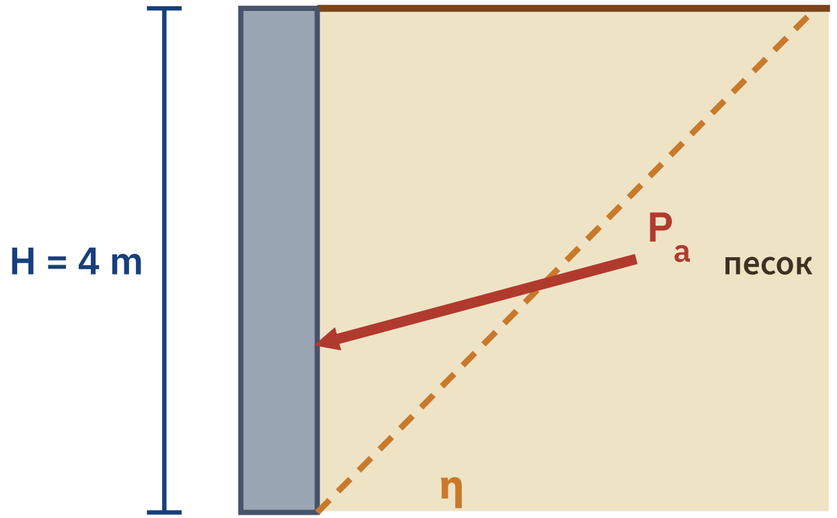
Псевдостатическая призма

$\psi = \tan^{-1} k_h/(1 - k_v)$

Seed – Whitman

Пригрузка · вода

Предельное равновесие



Что мы изучим на этой лекции?

- Представлять землетрясение **псевдостатическими** горизонтальной (k_hW) и вертикальной (k_vW) силами
- **Сейсмический угол** ψ и коэффициент Mononobe–Okabe $\mathbf{K'_a}$; $P_{ae} = ½\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$
- **Предел равновесия**: если превышено $k_{h,cr} = (1 - k_v)\tan\varphi'$, ни одна призма не остаётся в равновесии
- Определение **положения** силы по Seed–Whitman: $P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$, ΔP_{ae} приложена на высоте 0.6H
- Учёт пригрузки и **грунтовых вод** (перемещающихся или не перемещающихся вместе с грунтом)
- Наблюдение за тем, как меняется сила при изменении k_h, k_v и геометрии

ХОД ЛЕКЦИИ

Каждая тема излагается **в три шага**:

1 · **Теория**: в чём правило и почему оно таково?

2 · **Условие**: дано и требуется определить

3 · **Решение**: пошагово, с числами

Силы приведены на единицу длины стены (kN/m); k_h, k_v — отношения ускорения к g; k_v положителен при направлении вверх.

Okabe (1926) и Mononobe–Matsuo (1929)

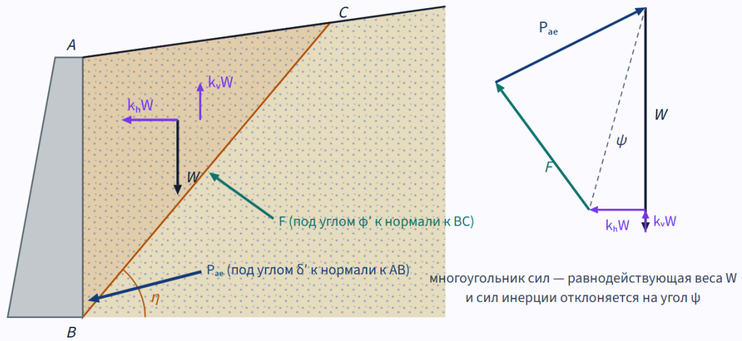
ТЕОРИЯ

При землетрясении призма за стеной движется с ускорением. Псевдостатический метод представляет сотрясение двумя **постоянными массовыми силами**, действующими на призму Coulomb:

k_hW: горизонтальная, направлена к стене (k_h = горизонтальное ускорение / g)

k_vW: вертикальная (здесь направлена вверх; уменьшает вес)

W, F (наклонена на φ′) и P_{ae} (наклонена на δ′) — как у Coulomb.



Сумма W, k_hW и k_vW — это сила, повёрнутая от вертикали на сейсмический угол **ψ**; иначе говоря, сейсмическая призма — это призма Coulomb с силой тяжести, повёрнутой на ψ (грань стены θ + ψ, засыпка α + ψ):

$$\psi = \tan^{-1}\frac{k_h}{1-k_v} \qquad W' = \frac{W(1-k_v)}{\cos\psi}$$

Активная сила вновь **наибольшая** среди пробных призм обрушения.

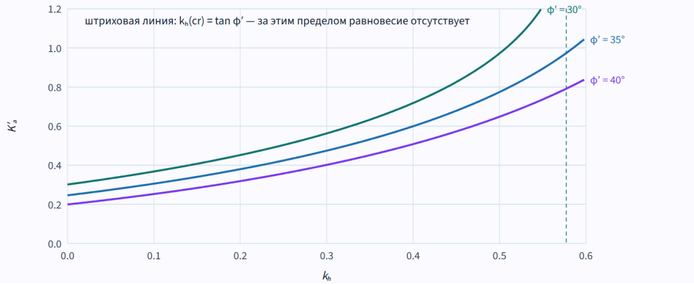
Динамическая активная сила

ТЕОРИЯ

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 (1 - k_v) K'_a$$

$$K'_a = \frac{\cos^2(\varphi' - \theta - \psi)}{\cos\psi \cos^2\theta \cos(\delta' + \theta + \psi)\left[1 + \sqrt{\dfrac{\sin(\varphi' + \delta')\sin(\varphi' - \alpha - \psi)}{\cos(\delta' + \theta + \psi)\cos(\theta - \alpha)}}\right]^2}$$

k_h	φ′ = 28°	30°	35°	40°	45°
0.1	0.396	0.368	0.306	0.253	0.207
0.2	0.485	0.452	0.380	0.319	0.267
0.3	0.604	0.563	0.474	0.402	0.340
0.4	0.778	0.718	0.599	0.508	0.433
0.5	1.115	0.972	0.774	0.648	0.552



при $k_h = k_v = 0$ имеем ψ = 0, и K'_a — это коэффициент K_a по Coulomb. Таблица: θ = α = 0, δ′ = φ′/2.

K'_a быстро растёт с увеличением k_h; при приближении к предельному значению возрастает неограниченно.

Условие

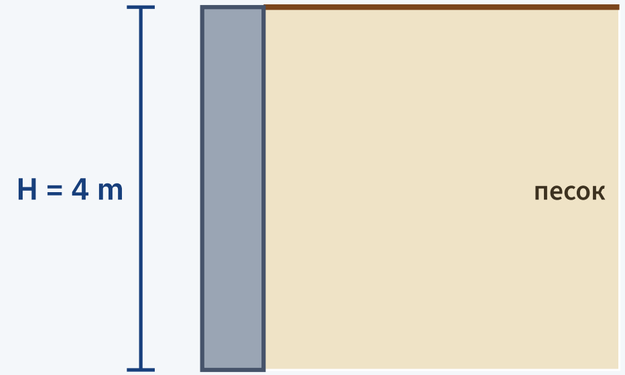
ПРИМЕР

Дано

Стена	$H = 4$ **m, вертикальная; горизонтальная засыпка; без пригрузки**
Грунт	**сухой песок:** $\gamma = 15.5$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$, $\delta' = 15^\circ$
Землетрясение	$k_h = 0.2$, $k_v = 0$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

ψ, **K′a**, **Pae** и критическая призма; сравнение со статическим решением Coulomb. Модуль открывается с этой стены.



γ = 15.5 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k_h = 0.2

Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Сейсмический угол

$$\psi = \tan^{-1}\frac{0.2}{1-0} = \mathbf{11.31^\circ}$$

2 Коэффициент Mononobe–Okabe (θ = α = 0)

$$\cos^2(30^\circ - 11.31^\circ) = 0.8973 \qquad \cos\psi = 0.9806 \qquad \cos(15^\circ + 11.31^\circ) = 0.8964$$

$$\sqrt{\frac{\sin 45^\circ \sin(30^\circ - 11.31^\circ)}{\cos(15^\circ + 11.31^\circ)}} = \sqrt{0.2528} = 0.5028$$

$$K'_a = \frac{0.8973}{0.9806(0.8964)(1+0.5028)^2} = \mathbf{0.4520}$$

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

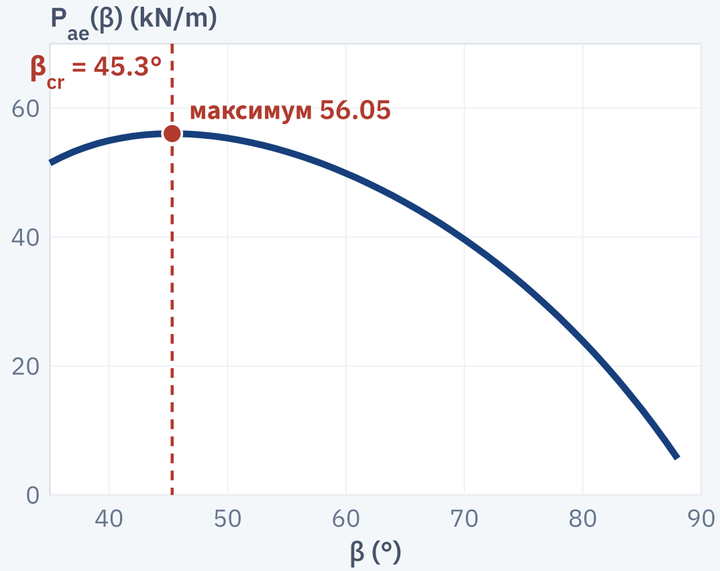
3 Динамическая сила

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2(1-k_v)K'_a$$
$$= \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(1-0)(0.4520) = \mathbf{56.05}\ \text{kN/m}$$

4 Критическая призма (вершина пробных призм)

$$\beta_{cr} = \mathbf{45.3}^\circ \text{ (с горизонталью)}$$

P_{ae} = **56.05 kN/m**; статическая сила по Coulomb (K_a = 0.3014) составляла 37.38 kN/m: сейсмическая сила **увеличила её на 50%**. Критическая призма образует с горизонтом угол 45.3°.



Проверить решение в GeoTerva ↗

Критическое горизонтальное ускорение

ТЕОРИЯ

Выражение $\sin(\varphi' - \alpha - \psi)$ под знаком квадратного корня не является вещественным при $\varphi' - \alpha - \psi < 0$: **ни одна призма не может находиться в равновесии** независимо от поведения стены. Засыпка устойчива только при условии:

$$\alpha \leq \varphi' - \psi$$

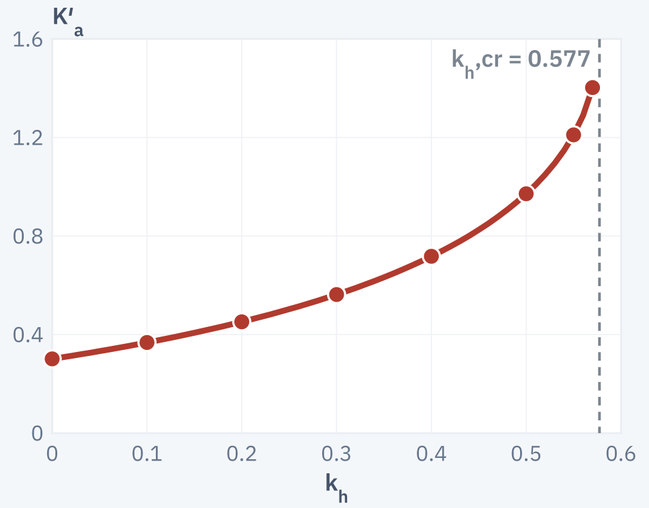
Для горизонтальной засыпки требуется $\psi \leq \varphi'$, т. е. горизонтальное ускорение не может превышать:

$$k_{h(cr)} = (1 - k_v)\tan\varphi' \qquad (\alpha \neq 0 :\ \tan(\varphi' - \alpha))$$

При приближении к пределу K'_a растёт очень быстро ($k_{h,cr}$ = 0.577 при φ' = 30°).

Если k_h выше предела, модуль останавливает расчёт с выводом сообщения.

K'_a – k_h (φ' = 30°, δ' = 15°)



Условие

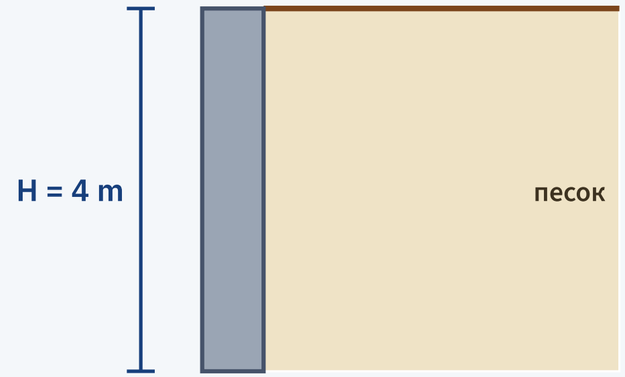
ПРИМЕР

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Для каждого k_h — **ψ**, **K'_a** и **P_{ae}**; критическое k_h; результат при $k_h = 0.6$.

Дано

Стена и грунт	**Стена из примера 1:** $H = 4$ m, $\gamma = 15.5$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$, $\delta' = 15^\circ$, $k_v = 0$
Переменная	$k_h = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5;\ 0.55;\ 0.57$



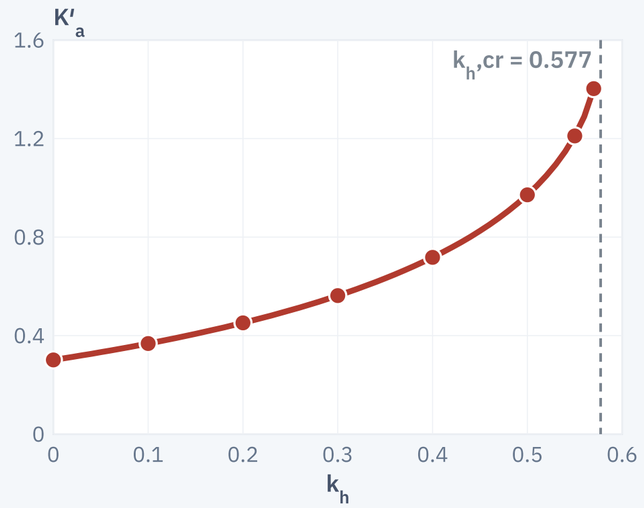
γ = 15.5 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°

Решение

РЕШЕНИЕ

1 $\psi = \tan^{-1} k_h$; $k_{h,cr} = \tan 30° = 0.577$

k_h	ψ (°)	K'_a	P_{ae} (kN/m)
0.00	0.0	0.301	37.4
0.10	5.7	0.368	45.6
0.20	11.3	0.452	56.1
0.30	16.7	0.563	69.8
0.40	21.8	0.718	89.0
0.50	26.6	0.972	120.5
0.55	28.8	1.211	150.1
0.57	29.7	1.403	174.0



При k_h от 0 до 0.2 значение P_{ae} возрастает с 37.4 до 56.1 kN/m (на 50 %), при 0.5 составляет 120.5 kN/m (в 3.2 раза); при приближении k_h к 0.57 значение K'_a неограниченно возрастает. **k_h = 0.6 > 0.577**: квадратный корень не является вещественным, ни одна призма не находится в равновесии: модуль останавливает расчёт.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

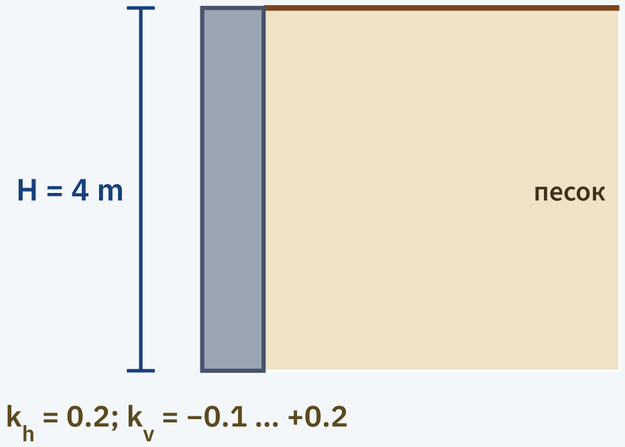
ПРИМЕР

Дано

Стена и грунт	**Стена и грунт в примере 1;** $k_h = 0.2$
Переменная	$k_v = -0.1$ **(вниз),** 0**,** $+0.1$**,** $+0.2$ **(вверх)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Для каждого k_v — **ψ**, **K'_a**, **$(1 - k_v)$** и **P_{ae}**; какое направление более неблагоприятно?



Решение

РЕШЕНИЕ

1 $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; $P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a = 124\,(1 - k_v)\,K'_a$

k_v	ψ (°)	K'_a	$1 - k_v$	P_{ae} (kN/m)
-0.1	10.30	0.4351	1.1	59.35
0.0	11.31	0.4520	1.0	56.05
0.1	12.53	0.4739	0.9	52.89
0.2	14.04	0.5032	0.8	49.92

Направленная вниз составляющая k_v (−0.1) увеличивает силу до 59.3 kN/m (+6%), направленная вверх k_v = 0.2 уменьшает её до 49.9 kN/m. Хотя ψ с ростом направленной вверх k_v увеличивается, определяющим оказывается множитель $(1 - k_v)$. На практике принимается $k_v = \pm 0.5\,k_h$ с выбором того направления, при котором сила получается большей.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Seed и Whitman (1970)

ТЕОРИЯ

Анализ Mononobe–Okabe даёт величину и направление силы, **но не место её приложения**. Seed и Whitman разделяют силу на статическую силу по Coulomb и сейсмическое приращение:

$$P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$$

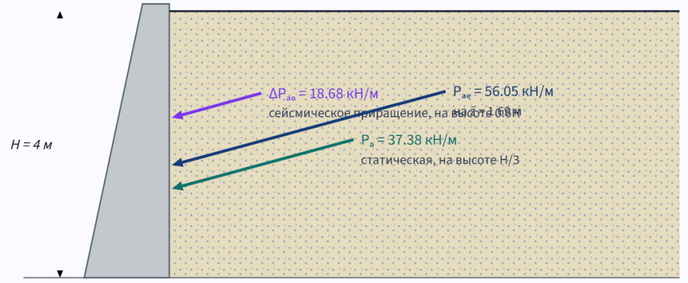
$$\bar{z} = \frac{P_a \dfrac{H}{3} + \Delta P_{ae}\,(0.6H)}{P_{ae}}$$

P_a (½$K_a\gamma H^2$ при тех же δ′, θ, α) действует на высоте **H/3** над подошвой; ΔP_{ae} — на **0.6H** (треугольная эпюра представляет собой перевёрнутый треугольник, сужающийся к подошве).

Равнодействующая, как и ранее, наклонена на угол δ′ от нормали к грани стены.

Приращение иногда принимается на середине высоты; 0.6H даёт больший опрокидывающий момент и принимается за основу.

СТАТИКА + СЕЙСМИЧЕСКОЕ ПРИРАЩЕНИЕ



Условие

ПРИМЕР

Дано

Стена и землетрясение	**Стена из примера 1:** $H = 4$ **m,** $\gamma = 15.5$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$, $\delta' = 15^\circ$, $k_h = 0.2$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

P_a, **ΔP_{ae}** и **$\bar{z}$**; $\bar{z}$ при условии, что ΔP_{ae} приложена на половине высоты.

Решение

РЕШЕНИЕ

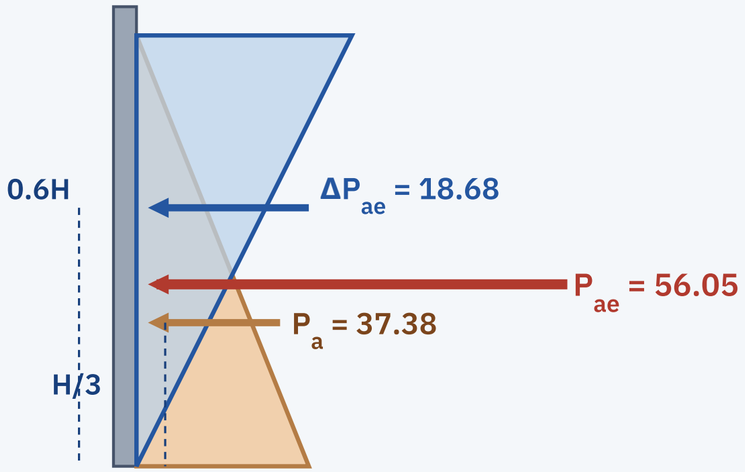
1 Статическая сила (K_a = 0.3014) и сейсмическое приращение

$$P_a = \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(0.3014) = 37.38 \text{ kN/m}$$

$$\Delta P_{ae} = P_{ae} - P_a = 56.05 - 37.38 = \mathbf{18.68} \text{ kN/m}$$

2 Высота приложения (от подошвы)

$$\bar{z} = \frac{37.38(4/3) + 18.68(2.4)}{56.05} = \mathbf{1.69} \text{ m}$$



$\bar{z}$ = **1.69 m** (при статическом расчёте было 1.33 m). Если бы приращение принималось на половине высоты (2.0 m), получилось бы $\bar{z}$ = 1.56 m: допущение 0.6H смещает силу вверх и **увеличивает опрокидывающий момент**.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

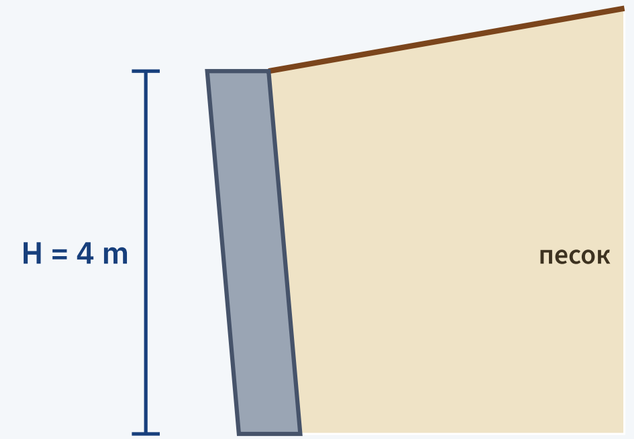
ПРИМЕР

Дано

Стена	$H = 4$ **m; грань наклонена от вертикали на** $\theta = 5^\circ$
Насыпной грунт	**уклон поверхности** $\alpha = 10^\circ$**;** $\gamma = 15$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$, $\delta' = 15^\circ$
Землетрясение	$k_h = 0.15$, $k_v = 0$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

ψ, **K′$_a$**, **P$_{ae}$**, ΔP$_{ae}$, **z̄**; проверка предела равновесия.



γ = 15, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k$_h$ = 0.15

Решение

РЕШЕНИЕ

1 Сейсмический угол и предел равновесия

$$\psi = \tan^{-1} 0.15 = \mathbf{8.53}^\circ \qquad k_{h(cr)} = \tan 20^\circ = 0.364 > 0.15$$

2 Коэффициент и сила (статический $K_a = 0.3872$)

$$K'_a(\theta = 5^\circ, \alpha = 10^\circ, \psi = 8.53^\circ) = \mathbf{0.5435}$$

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}(15)(4)^2(0.5435) = \mathbf{65.22}\ \text{kN/m} \qquad P_a = 46.46\ \text{kN/m}$$

3 Высота приложения нагрузки

$$\Delta P_{ae} = 18.76\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \frac{46.46(1.33) + 18.76(2.4)}{65.22} = \mathbf{1.64}\ \text{m}$$

P_{ae} = **65.22 kN/m**, на 1.64 m выше основания; критическая призма 44.2°; сейсмическое воздействие увеличило её на 40%.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Расширение модуля

ТЕОРИЯ

Пригрузка q добавляется к силе инерции каждой призмы вместе с её весом; критическая призма не меняется:

$$q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} \qquad P_{ae} = (1-k_v)K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right)$$

При наличии грунтовых вод поровая вода либо движется вместе с грунтом (**стеснённая**, мелкозернистая засыпка), либо не движется (**свободная**, k > 5·10^{-4} m/s). Инерционная сила определяется насыщенной или сухой массой, напряжение — весом с учётом взвешивающего действия воды; под водой сейсмический угол увеличивается:

$$\tan\psi_w = \frac{\gamma_{sat}}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{(стеснённая)} \qquad \tan\psi_w = \frac{\gamma_d}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{(свободная)}$$

$$p_{wd} = \tfrac{7}{8}k_h\gamma_w\sqrt{d_w z'} \qquad P_{wd} = \tfrac{7}{12}k_h\gamma_w d_w^2\ (0{,}4\,d_w\ \text{высоты, Westergaard})$$

В свободной воде добавляется гидродинамическое давление по Westergaard. В слоистой засыпке каждый слой принимается со своим K′$_a$: σ′ = (1 − k$_v$)K′$_{a,i}$σ′$_v$cos θ; статическая часть и ΔP$_{ae}$ (0.6H) суммируются раздельно.

ПОЧЕМУ ВАЖНА ВОДА?

Вода увеличивает сейсмический угол ($\psi_w > \psi$) и помимо гидростатического давления вносит **гидродинамическое давление (в свободном состоянии)**.

Условие

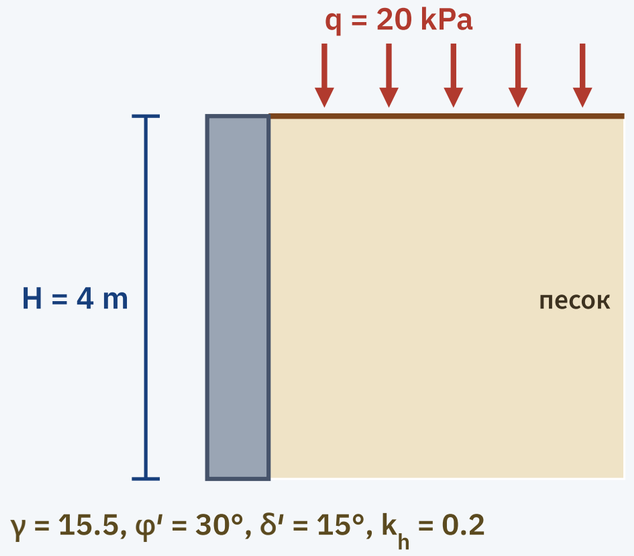
ПРИМЕР

Дано

Стена и грунт	**Стена и грунт в Примере 1 ($k_h = 0.2$)**
Пригрузка	**$q = 20$ kPa (на горизонтальной поверхности)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Полное $\mathbf{P_{ae}}$, статическая часть, сейсмическое приращение и $\bar{\mathbf{z}}$.



Решение

РЕШЕНИЕ

1 Эквивалентное напряжение и силы ($K'_a = 0.4520$)

$$q_e = q\cos 0^\circ / \cos 0^\circ = 20 \text{ kPa}$$

$$P_{ae} = K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right) = 0.4520(124 + 80) = 0.4520(204) = \mathbf{92.21} \text{ kN/m}$$

2 Статическая часть (Coulomb $K_a = 0.3014$) и приращение

$$P_a = K_a(204) = 61.49 \text{ kN/m} \qquad \Delta P_{ae} = 30.73 \text{ kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{(37.38)(1.33) + (24.11)(2.0) + (30.73)(2.4)}{92.21} = \mathbf{1.86} \text{ m}$$

P_{ae} = **92.21 kN/m** (без пригрузки 56.05); $\bar{z}$ = **1.86 m**. Статическая доля пригрузки действует на высоте H/2, её сейсмическое приращение — на высоте 0.6H.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

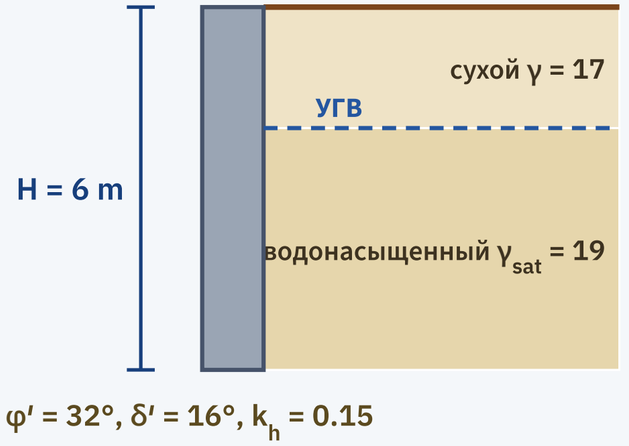
ПРИМЕР

Дано

Стена	$H = 6$ m, вертикальная; горизонтальная засыпка; без пригрузки
Грунт	$\gamma = 17$ kN/m^3 (сухой, 0–2 m), $\gamma_{sat} = 19$ kN/m^3 (2–6 m); $\varphi' = 32^\circ,\ \delta' = 16^\circ$
Землетрясение	$k_h = 0.15$, $k_v = 0$; УГВ 2 m (dw = 4 m)

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Суммарные **P** и **z̄** для случая, когда вода движется вместе с грунтом (**стеснённая**), и когда не движется (**свободная**); сравнение со статическим значением.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Эквивалентные k_h и ψ_w под водой

$$\text{стеснённая: } k_{h,w} = \frac{19}{19-9.81}(0.15) = 0.3101 \;\Rightarrow\; \psi_w = 17.23^\circ$$

$$\text{свободная: } k_{h,w} = \frac{17}{19-9.81}(0.15) = 0.2775 \;\Rightarrow\; \psi_w = 15.51^\circ$$

2 Коэффициенты (сухая зона $\psi = 8.53°$)

$K'_a(\text{сухой}) = 0.3792$ $K'_a(\text{стеснённый, под водой}) = 0.5372$ $K'_a(\text{свободный, под водой}) = 0.4991$

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

3 Силы (kN/m); $P_{wd} = (7/12)(0.15)(9.81)(4)^2 = 13.73$ kN/m, на $0.4 \cdot d_w = 1.6$ m выше

	Грунт P_{ae}	Гидростатическая вода	Гидродинамическое (Westergaard)	Итого P	$\bar{z}$ (m)
Статика ($k_h = 0$)	67.74	78.48	–	144.80	1.71
Стеснённая вода	125.46	78.48	–	202.06	2.24
Свободная вода	117.47	78.48	13.73	207.67	2.15

Землетрясение увеличило суммарную силу по сравнению со статикой на **40 %** (стеснённая вода) и на **43 %** (свободная вода); $\bar{z}$ поднялось с 1.71 до 2.24 m. В стеснённом случае сила от грунта больше (ψ_w велико), в свободном добавляется гидродинамическое давление; суммарные значения очень близки (202.1 и 207.7 kN/m).

Проверить решение в GeoTerva ↗

Объём решения

ТЕОРИЯ

Псевдостатика: землетрясение представляется постоянными k_h, k_v; зависимость ускорения от времени и от перемещения стены (сдвиг по Newmark, динамический расчёт) не учитывается.

Плоская призма обрушения, несвязная сухая засыпка (Mononobe–Okabe); случай слоистой засыпки является расширением модуля (замкнутого решения для слоистой засыпки нет), для одного слоя он сводится к замкнутому решению, а при $k_h = k_v = 0$ — к слоистому решению Coulomb.

Вода: стеснённая (мелкозернистые грунты) или свободная ($k > 5 \cdot 10^{-4}$ m/s); для свободной воды добавляется гидродинамическое давление по Westergaard.

Место приложения по Seed–Whitman: P_a на $H/3$, ΔP_{ae} на $0.6H$; вода действует со своим плечом.

Для **пассивного** давления см. модуль «Пассивное давление при землетрясении (Subba Rao–Choudhury)».

Резюме

Главное

Псевдостатический метод: $k_h W$, $k_v W$; $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; сейсмическая призма — это призма Coulomb, повёрнутая на угол ψ

$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$; K'_a быстро растёт с ростом k_h; при $k_h = k_v = 0$ получается решение Coulomb

Предел равновесия: $k_{h,cr} = (1 - k_v)\tan\varphi'$ (на откосе $\tan(\varphi' - \alpha)$); при превышении решения нет

k_v: увеличивает силу, направленную вниз; на практике выбирается худшее из $\pm 0.5 k_h$

Положение: $P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$; P_a приложена на $H/3$, ΔP_{ae} — на $0.6H$; $\bar{z} = [P_a(H/3) + \Delta P_{ae}(0.6H)]/P_{ae}$

Пригрузка учитывается как $q_e = q\cos\theta/\cos(\theta - \alpha)$; при наличии **воды** ψ_w возрастает (при стеснённой воде: γ_{sat}/γ', при свободной: γ_d/γ'), а в свободной воде добавляется гидродинамическое давление $(7/12)k_h\gamma_w d_w^2$

Список литературы

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Mononobe, N. and Matsuo, H. (1929). On the determination of earth pressure during earthquakes. Proceedings, World Engineering Congress, Tokyo, 9, 177–185.

Okabe, S. (1926). General theory of earth pressure. Journal of the Japan Society of Civil Engineering, 12(1).

Seed, H.B. and Whitman, R.V. (1970). Design of earth retaining structures for dynamic loads. Specialty Conference on Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth Retaining Structures, ASCE, 103–147.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1933). Water pressures on dams during earthquakes. Transactions ASCE, 98, 418–433.

ПРИМЕЧАНИЕ

Все числовые примеры получены с помощью собственного расчётного ядра модуля; модуль даёт те же значения. Модуль открывается со стеной из Примера 1 ($k_h = 0.2$, $\delta' = 15°$).

GeoTerva

Геотехнические расчёты онлайн

От теории к практике

Ввести в GeoTerva собственную стену, сейсмические коэффициенты k_h, k_v, пригрузку, слои и грунтовые воды; модуль одновременно выдаёт P_{ae}, высоту точки приложения и критическую призму.

Открыть модуль →

Страница теории →

Открыть на телефоне
Для пробных модулей регистрация не требуется.