GeoTerva

Apresentação de aula de geotecnia · Empuxo de terra

Empuxo sísmico de Mononobe–Okabe

Aula: forças pseudoestáticas horizontal e vertical da cunha atrás do muro durante o sismo, coeficiente ativo de Mononobe–Okabe, limite de equilíbrio, linha de ação; sobrecarga e água subterrânea; exemplo resolvido em cada tópico.

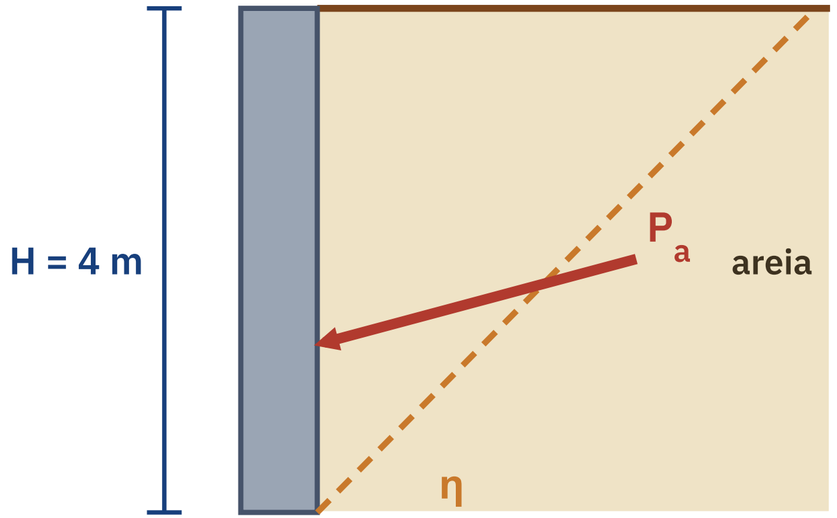
Cunha pseudoestática

$\psi = \tan^{-1} k_h/(1 - k_v)$

Seed – Whitman

Sobrecarga · água

Limite de equilíbrio



Introdução

O que veremos nesta aula?

- Representar o sismo por forças **pseudoestáticas** horizontal ($k_h W$) e vertical ($k_v W$)
- **Ângulo sísmico** ψ e coeficiente de Mononobe–Okabe $\mathbf{K'_a}$; $P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$
- **Limite de equilíbrio**: se $k_{h,cr} = (1 - k_v) \tan \varphi'$ for excedido, nenhuma cunha permanece em equilíbrio
- Determinar a **posição** da força com Seed–Whitman: $P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$, com ΔP_{ae} a 0.6H
- Levar em conta a sobrecarga e a **água subterrânea** (que se move ou não junto com o solo)
- Ver como a força varia quando k_h, k_v e a geometria mudam

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: qual é a regra e por que é assim?

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

As forças referem-se à unidade de comprimento do muro (kN/m); k_h, k_v são as razões entre a aceleração e g; k_v é positivo para cima.

Okabe (1926) e Mononobe–Matsuo (1929)

TEORIA

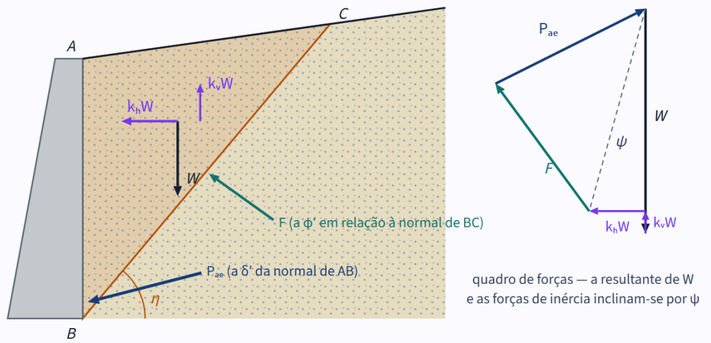
Durante um sismo, a cunha atrás do muro é acelerada. O método pseudoestático representa a vibração por duas **forças de massa constantes** atuando sobre a cunha de Coulomb:

- **k_hW**: horizontal, em direção ao muro (k_h = aceleração horizontal / g)
- **k_vW**: vertical (aqui para cima; reduz o peso)
- W, F (inclinada de φ′) e P_{ae} (inclinada de δ′) são como em Coulomb.

A soma de W, k_hW e k_vW é uma força girada em relação à vertical pelo ângulo sísmico **ψ**; ou seja, a cunha sísmica é uma cunha de Coulomb em que a gravidade é girada de ψ (face do muro θ + ψ, reaterro α + ψ):

$$\psi = \tan^{-1}\frac{k_h}{1-k_v} \qquad W' = \frac{W(1-k_v)}{\cos\psi}$$

A força ativa é, novamente, a **maior** das cunhas de tentativa.



quadro de forças — a resultante de W e as forças de inércia inclinam-se por ψ

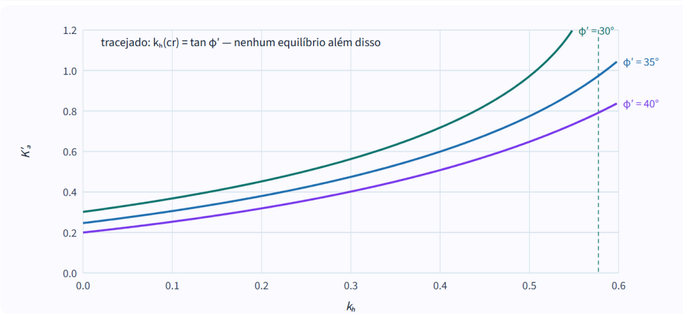
Força ativa dinâmica

TEORIA

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 (1 - k_v) K'_a$$

$$K'_a = \frac{\cos^2(\varphi' - \theta - \psi)}{\cos\psi \cos^2\theta \cos(\delta' + \theta + \psi)\left[1 + \sqrt{\dfrac{\sin(\varphi' + \delta')\sin(\varphi' - \alpha - \psi)}{\cos(\delta' + \theta + \psi)\cos(\theta - \alpha)}}\right]^2}$$

k_h	φ′ = 28°	30°	35°	40°	45°
0.1	0.396	0.368	0.306	0.253	0.207
0.2	0.485	0.452	0.380	0.319	0.267
0.3	0.604	0.563	0.474	0.402	0.340
0.4	0.778	0.718	0.599	0.508	0.433
0.5	1.115	0.972	0.774	0.648	0.552



Para $k_h = k_v = 0$, tem-se ψ = 0 e K'_a é o K_a de Coulomb. Tabela: θ = α = 0, δ′ = φ′/2.

K'_a cresce rapidamente com k_h; aumenta sem limite ao se aproximar do limite.

Enunciado

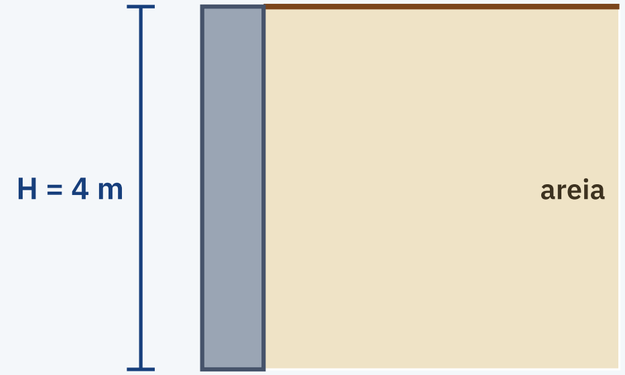
EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 4$ m, vertical; reaterro horizontal; sem sobrecarga
Solo	areia seca: $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30^\circ$, $\delta' = 15^\circ$
Sismo	$k_h = 0.2$, $k_v = 0$

PEDE-SE

ψ, **K′a**, **Pae** e a cunha crítica; comparação com Coulomb estático. O módulo é aberto com este muro.



γ = 15.5 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k_h = 0.2

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Ângulo sísmico

$$\psi = \tan^{-1}\frac{0.2}{1-0} = \mathbf{11.31^\circ}$$

2 Coeficiente de Mononobe–Okabe (θ = α = 0)

$$\cos^2(30^\circ - 11.31^\circ) = 0.8973 \qquad \cos\psi = 0.9806 \qquad \cos(15^\circ + 11.31^\circ) = 0.8964$$

$$\sqrt{\frac{\sin 45^\circ \sin(30^\circ - 11.31^\circ)}{\cos(15^\circ + 11.31^\circ)}} = \sqrt{0.2528} = 0.5028$$

$$K'_a = \frac{0.8973}{0.9806(0.8964)(1+0.5028)^2} = \mathbf{0.4520}$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

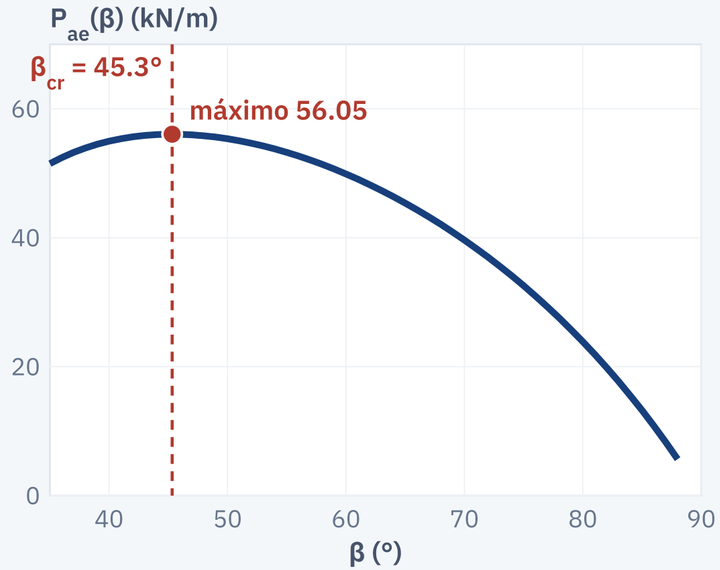
3 Força dinâmica

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2(1-k_v)K'_a$$
$$= \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(1-0)(0.4520) = \mathbf{56.05}\ \mathrm{kN/m}$$

4 Cunha crítica (vértice das cunhas de tentativa)

$$\beta_{cr} = \mathbf{45.3}^\circ\ (\text{com a horizontal})$$

P_{ae} = **56.05 kN/m**; a força estática de Coulomb (K_a = 0.3014) era 37.38 kN/m: o sismo **elevou a força em 50%**. A cunha crítica forma 45.3° com a horizontal.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Aceleração horizontal crítica

TEORIA

A expressão sin(φ′ − α − ψ) sob a raiz quadrada não é real quando φ′ − α − ψ < 0: **nenhuma cunha pode estar em equilíbrio**, independentemente do comportamento do muro. O reaterro só é estável sob a seguinte condição:

$$\alpha \leq \varphi' - \psi$$

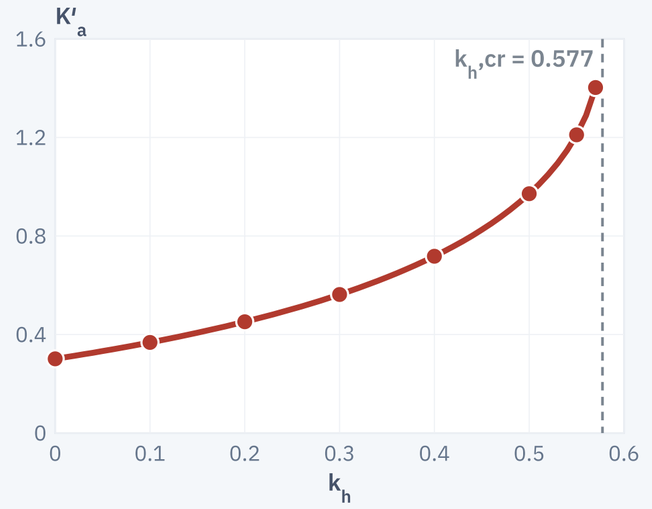
Para aterro horizontal, isso exige ψ ≤ φ′, ou seja, a aceleração horizontal não pode exceder:

$$k_{h(cr)} = (1 - k_v)\tan\varphi' \qquad (\alpha \neq 0 :\ \tan(\varphi' - \alpha))$$

Ao se aproximar do limite, K'_a aumenta muito rapidamente ($k_{h,cr}$ = 0.577 para φ′ = 30°).

O módulo interrompe o cálculo com uma mensagem se k_h estiver acima do limite.

K'_a – k_h (φ′ = 30°, δ′ = 15°)



Enunciado

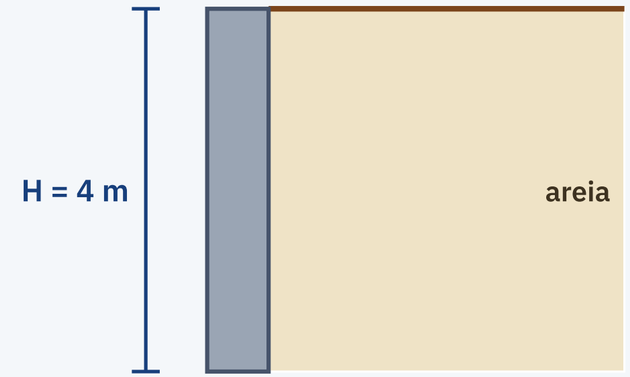
EXEMPLO

PEDE-SE

Para cada k_h: **ψ**, **K'_a** e **P_{ae}**; k_h crítico; resultado para $k_h = 0.6$.

Dados

Muro e solo	**Muro do Exemplo 1:** $H = 4$ **m,** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$, $k_v = 0$
Variável	$k_h = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5;\ 0.55;\ 0.57$



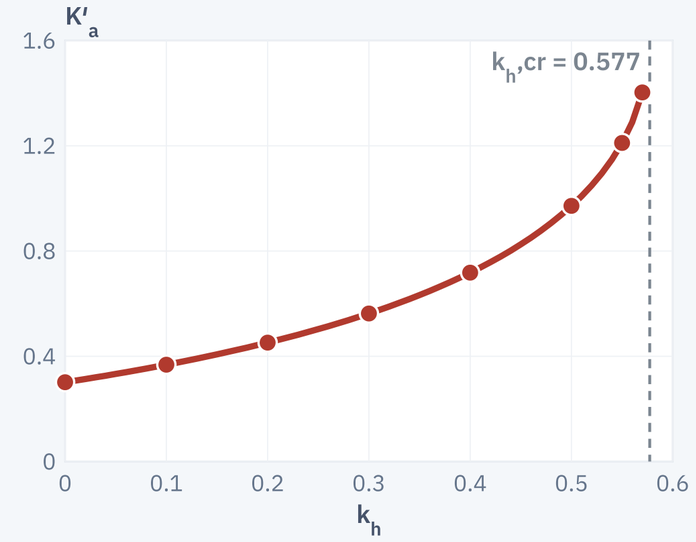
γ = 15.5 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°

Solução

SOLUÇÃO

1 $\psi = \tan^{-1} k_h$; $k_{h,cr} = \tan 30° = 0.577$

k_h	ψ (°)	K'_a	P_{ae} (kN/m)
0.00	0.0	0.301	37.4
0.10	5.7	0.368	45.6
0.20	11.3	0.452	56.1
0.30	16.7	0.563	69.8
0.40	21.8	0.718	89.0
0.50	26.6	0.972	120.5
0.55	28.8	1.211	150.1
0.57	29.7	1.403	174.0



De k_h = 0 a 0.2, P_{ae} passa de 37.4 para 56.1 kN/m (50%); em 0.5, vale 120.5 kN/m (3.2 vezes); à medida que k_h se aproxima de 0.57, K'_a cresce sem limite. **k_h = 0.6 > 0.577**: a raiz quadrada não é real, nenhuma cunha está em equilíbrio: o módulo interrompe o cálculo.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

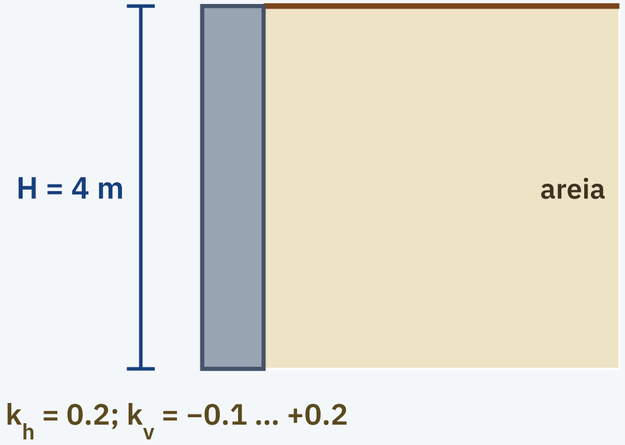
EXEMPLO

PEDE-SE

Para cada k_V: **ψ**, **K'_a**, **$(1 - k_V)$** e **P_{ae}**; qual sentido é mais desfavorável?

Dados

Muro e solo	**Muro e solo do Exemplo 1; $k_h = 0.2$**
Variável	**$k_v = -0.1$ (para baixo), 0, $+0.1$, $+0.2$ (para cima)**



Solução

SOLUÇÃO

1 $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; $P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a = 124\,(1 - k_v)\,K'_a$

k_v	ψ (°)	K'_a	$1 - k_v$	P_{ae} (kN/m)
-0.1	10.30	0.4351	1.1	59.35
0.0	11.31	0.4520	1.0	56.05
0.1	12.53	0.4739	0.9	52.89
0.2	14.04	0.5032	0.8	49.92

O k_v descendente (−0.1) eleva a força para 59.3 kN/m (+6%), e o k_v = 0.2 ascendente a reduz para 49.9 kN/m. Embora ψ aumente com k_v ascendente, o fator $(1 - k_v)$ predomina. Na prática, adota-se $k_v = \pm 0.5\,k_h$, escolhendo-se o sentido que resulta na maior força.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Seed e Whitman (1970)

TEORIA

A análise de Mononobe–Okabe fornece a intensidade e a direção da força, mas **não indica onde ela atua**. Seed e Whitman decompõem a força na força estática de Coulomb e no acréscimo sísmico:

$$P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$$

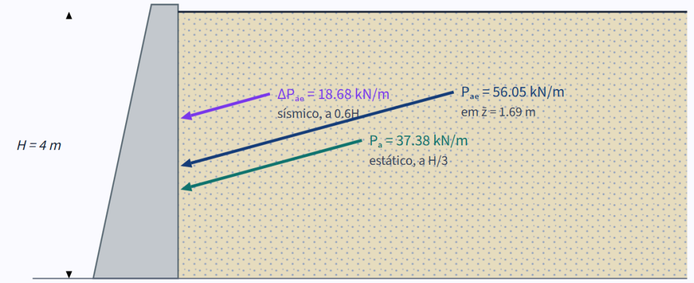
$$\bar{z} = \frac{P_a \dfrac{H}{3} + \Delta P_{ae}\,(0.6H)}{P_{ae}}$$

P_a (com os mesmos δ′, θ, α de ½K_aγH^2) atua a **H/3** acima da base; ΔP_{ae} atua em **0.6H** (o diagrama triangular é um triângulo invertido que se estreita em direção à base).

A resultante é novamente inclinada de δ′ em relação à normal à face do muro.

O acréscimo é, por vezes, tomado à meia altura; 0.6H resulta em maior momento de tombamento e é o valor adotado.

ESTÁTICO + INCREMENTO SÍSMICO



Enunciado

EXEMPLO

Dados

Muro e sismo

Muro do Exemplo 1: $H = 4$ **m,** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$, $k_h = 0.2$

PEDE-SE

P_a, ΔP_{ae} e **$\bar{z}$**; $\bar{z}$ se ΔP_{ae} for tomado na meia altura.

Solução

SOLUÇÃO

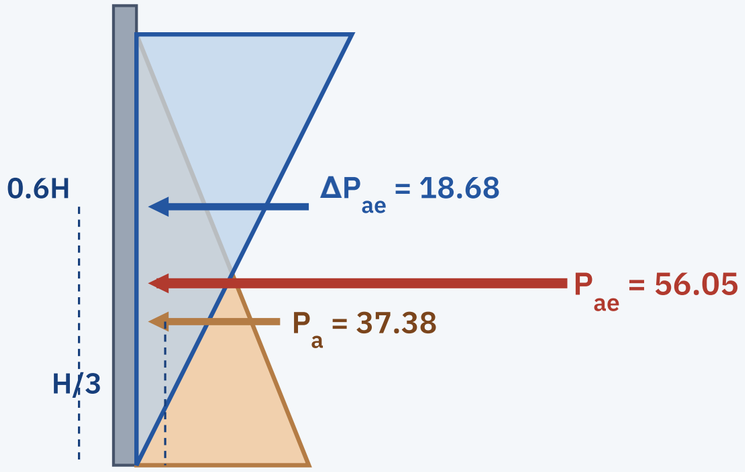
1 Força estática (K_a = 0.3014) e acréscimo sísmico

$$P_a = \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(0.3014) = 37.38\ \text{kN/m}$$

$$\Delta P_{ae} = P_{ae} - P_a = 56.05 - 37.38 = \mathbf{18.68}\ \text{kN/m}$$

2 Altura de aplicação (a partir da base)

$$\bar{z} = \frac{37.38(4/3) + 18.68(2.4)}{56.05} = \mathbf{1.69}\ \text{m}$$



$\bar{z}$ = **1.69 m** (no caso estático era 1.33 m). Se o acréscimo fosse tomado na meia altura (2.0 m), resultaria $\bar{z}$ = 1.56 m: a hipótese de 0.6H desloca a força para cima e **aumenta o momento de tombamento**.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

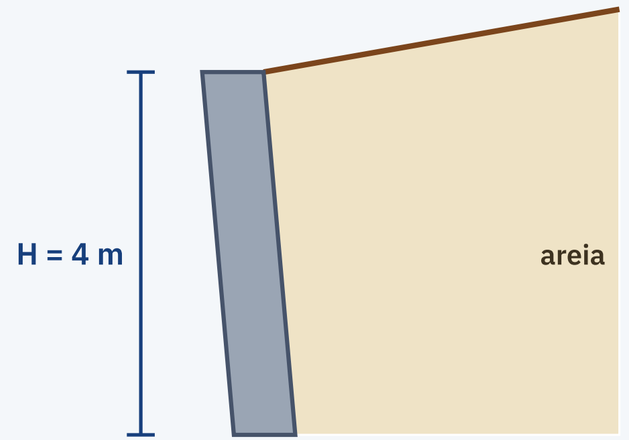
EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 4$ **m; face inclinada de** $\theta = 5^\circ$ **em relação à vertical**
Aterro	**inclinação da superfície** $\alpha = 10^\circ$**;** $\gamma = 15\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ,\ \delta' = 15^\circ$
Sismo	$k_h = 0.15,\ k_v = 0$

PEDE-SE

ψ, **K′$_a$**, **P$_{ae}$**, ΔP$_{ae}$, **z̄**; verificação do limite de equilíbrio.



γ = 15, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k$_h$ = 0.15

Solução

SOLUÇÃO

1 Ângulo sísmico e limite de equilíbrio

$$\psi = \tan^{-1} 0.15 = \mathbf{8.53}^\circ \qquad k_{h(cr)} = \tan 20^\circ = 0.364 > 0.15$$

2 Coeficiente e força (K_a estático = 0.3872)

$$K'_a(\theta = 5^\circ, \alpha = 10^\circ, \psi = 8.53^\circ) = \mathbf{0.5435}$$

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}(15)(4)^2(0.5435) = \mathbf{65.22}\ \text{kN/m} \qquad P_a = 46.46\ \text{kN/m}$$

3 Altura de aplicação da carga

$$\Delta P_{ae} = 18.76\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \frac{46.46(1.33) + 18.76(2.4)}{65.22} = \mathbf{1.64}\ \text{m}$$

P_{ae} = **65.22 kN/m**, 1.64 m acima da base; cunha crítica 44.2°; o sismo aumentou a força em 40%.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Extensão do módulo

TEORIA

A **sobrecarga** q é somada à inércia de cada cunha, juntamente com seu peso; a cunha crítica não muda:

$$q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} \qquad P_{ae} = (1-k_v)K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right)$$

Em presença de lençol freático, a água dos poros se move com o solo (**confinada**, aterro de granulação fina) ou não se move (**livre**, k > 5·10⁻⁴ m/s). A inércia é suportada pela massa saturada ou seca, e a tensão pelo peso submerso; sob a água, o ângulo sísmico aumenta:

$$\tan\psi_w = \frac{\gamma_{sat}}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{(restrita)} \qquad \tan\psi_w = \frac{\gamma_d}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{(livre)}$$

$$p_{wd} = \tfrac{7}{8}k_h\gamma_w\sqrt{d_w z'} \qquad P_{wd} = \tfrac{7}{12}k_h\gamma_w d_w^2\ (0{,}4\,d_w\ \text{de altura, Westergaard})$$

A pressão hidrodinâmica de Westergaard é acrescentada para a água livre. No reaterro estratificado, cada camada adota o seu próprio K'_a com $\sigma' = (1 - k_v)K'_{a,i}\sigma'_v\cos\theta$; a parcela estática e ΔP_{ae} (0.6H) são somadas separadamente.

POR QUE A ÁGUA É IMPORTANTE?

A água aumenta o ângulo sísmico ($\psi_w > \psi$) e, além da pressão hidrostática, introduz **pressão hidrodinâmica (no caso livre)**.

Enunciado

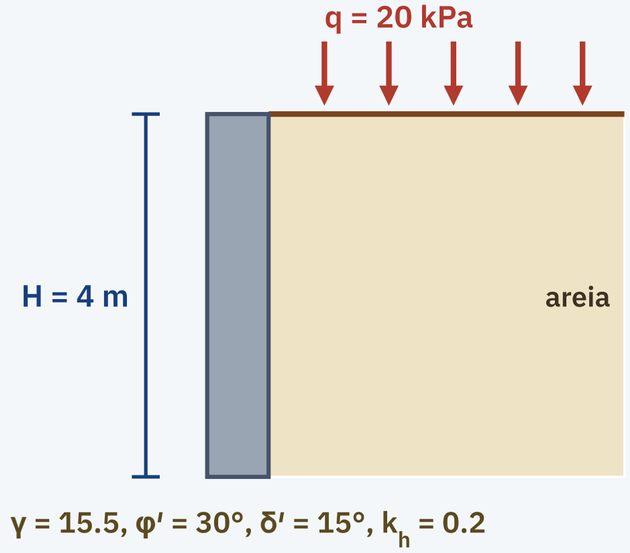
EXEMPLO

Dados

Muro e solo	**O muro e o solo do Exemplo 1 ($k_h = 0.2$)**
Sobrecarga	**$q = 20$ kPa (em superfície horizontal)**

PEDE-SE

P_{ae} total, parcela estática, acréscimo sísmico e **$\bar{z}$**.



Solução

SOLUÇÃO

1 Tensão e forças equivalentes (K'_a = 0.4520)

$$q_e = q\cos 0^\circ / \cos 0^\circ = 20\ \text{kPa}$$

$$P_{ae} = K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right) = 0.4520(124 + 80) = 0.4520(204) = \mathbf{92.21}\ \text{kN/m}$$

2 Parcela estática (K_a de Coulomb = 0.3014) e acréscimo

$$P_a = K_a(204) = 61.49\ \text{kN/m} \qquad \Delta P_{ae} = 30.73\ \text{kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{(37.38)(1.33) + (24.11)(2.0) + (30.73)(2.4)}{92.21} = \mathbf{1.86}\ \text{m}$$

P_{ae} = **92.21 kN/m** (56.05 sem sobrecarga); $\bar{z}$ = **1.86 m**. A parcela estática da sobrecarga atua em H/2; seu acréscimo sísmico, em 0.6H.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

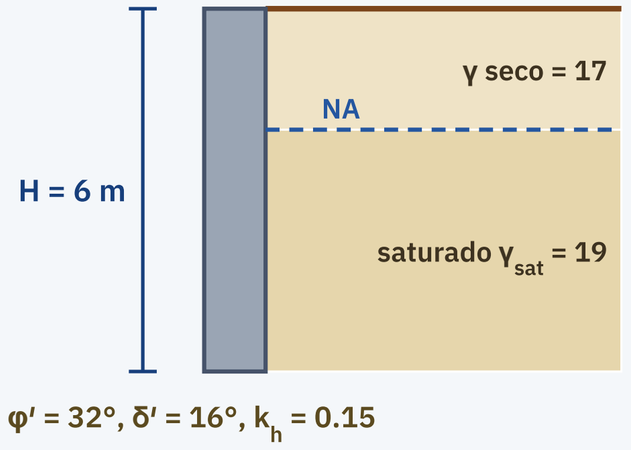
EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 6$ **m, vertical; reaterro horizontal; sem sobrecarga**
Solo	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3}$ **(seco, 0–2 m),** $\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3}$ **(2–6 m);** $\varphi' = 32^\circ,\ \delta' = 16^\circ$
Sismo	$k_h = 0.15,\ k_v = 0$**; nível do lençol freático 2 m (dw = 4 m)**

PEDE-SE

P total e **z̄** para o caso em que a água se move com o solo (**restrita**) e para aquele em que não se move (**livre**); comparação com o valor estático.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 k_h equivalente e ψ_W sob a água

$$\text{restrita: } k_{h,w} = \frac{19}{19 - 9.81}(0.15) = 0.3101 \;\Rightarrow\; \psi_w = 17.23^\circ$$

$$\text{livre: } k_{h,w} = \frac{17}{19 - 9.81}(0.15) = 0.2775 \;\Rightarrow\; \psi_w = 15.51^\circ$$

2 Coeficientes (zona seca ψ = 8.53°)

$$K'_a(\text{seco}) = 0.3792 \qquad K'_a(\text{confinado, submerso}) = 0.5372 \qquad K'_a(\text{livre, submerso}) = 0.4991$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Forças (kN/m); $P_{wd} = (7/12)(0.15)(9.81)(4)^2 = 13.73$ kN/m, $0.4 \cdot d_w = 1.6$ m acima

	Solo P_{ae}	Água hidrostática	Hidrodinâmico (Westergaard)	P total	$\bar{z}$ (m)
Estático ($k_h = 0$)	67.74	78.48	–	144.80	1.71
Água restrita	125.46	78.48	–	202.06	2.24
Água livre	117.47	78.48	13.73	207.67	2.15

O sismo aumentou a força total em **40%** (restrita) e **43%** (livre) em relação ao caso estático; $\bar{z}$ subiu de 1.71 para 2.24 m. No caso restrito, a força do solo é maior (ψ_w grande), enquanto no caso livre se soma a pressão hidrodinâmica; os totais são muito próximos (202.1 e 207.7 kN/m).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Escopo da solução

TEORIA

Pseudoestático: o sismo é representado por k_h e k_v constantes; não há dependência da aceleração em relação ao tempo nem ao movimento do muro (deslizamento de Newmark, análise dinâmica).

Cunha plana, reaterro seco e não coesivo (Mononobe–Okabe); o caso estratificado é uma extensão do módulo (não existe solução fechada estratificada); em camada única reduz-se à solução fechada e, para $k_h = k_v = 0$, ao Coulomb estratificado.

Água: confinada (solo de granulação fina) ou livre ($k > 5 \cdot 10^{-4}$ m/s); para água livre, adiciona-se a pressão hidrodinâmica de Westergaard.

Ponto de aplicação de Seed–Whitman: P_a em H/3, ΔP_{ae} em 0.6H; a água atua com seu próprio braço.

Para o empuxo **passivo**, ver o módulo Passivo em sismo (Subba Rao–Choudhury).

Resumo

Pontos-chave

Pseudoestático: $k_h W$, $k_v W$; $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; a cunha sísmica é a cunha de Coulomb girada de ψ

$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$; K'_a aumenta rapidamente com k_h; em $k_h = k_v = 0$, reduz-se ao caso de Coulomb

Limite de equilíbrio: $k_{h,cr} = (1 - k_v) \tan \varphi' (\tan(\varphi' - \alpha)$ em talude); se excedido, não há solução

k_v: aumenta a força para baixo; na prática, escolhe-se o caso mais desfavorável de $\pm 0.5 k_h$

Posição: $P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$; P_a a $H/3$, ΔP_{ae} a $0.6H$; $\bar{z} = [P_a(H/3) + \Delta P_{ae}(0.6H)]/P_{ae}$

A **sobrecarga** $q_e = q \cos\theta/\cos(\theta - \alpha)$ é adicionada; sob **água**, ψ_w aumenta (confinada: γ_{sat}/γ', livre: γ_d/γ') e, em água livre, acrescenta-se a pressão hidrodinâmica $(7/12)k_h \gamma_w d_w^2$

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Mononobe, N. e Matsuo, H. (1929). On the determination of earth pressure during earthquakes. Proceedings, World Engineering Congress, Tokyo, 9, 177–185.

Okabe, S. (1926). General theory of earth pressure. Journal of the Japan Society of Civil Engineering, 12(1).

Seed, H.B. e Whitman, R.V. (1970). Design of earth retaining structures for dynamic loads. Specialty Conference on Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth Retaining Structures, ASCE, 103–147.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1933). Water pressures on dams during earthquakes. Transactions ASCE, 98, 418–433.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o próprio motor de cálculo do módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O módulo abre com o muro do Exemplo 1 (k_h = 0.2, δ′ = 15°).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva o muro em análise, os coeficientes sísmicos k_h, k_v, a sobrecarga, as camadas e o lençol freático; o módulo fornece juntos P_{ae}, a altura do ponto de aplicação e a cunha crítica.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.