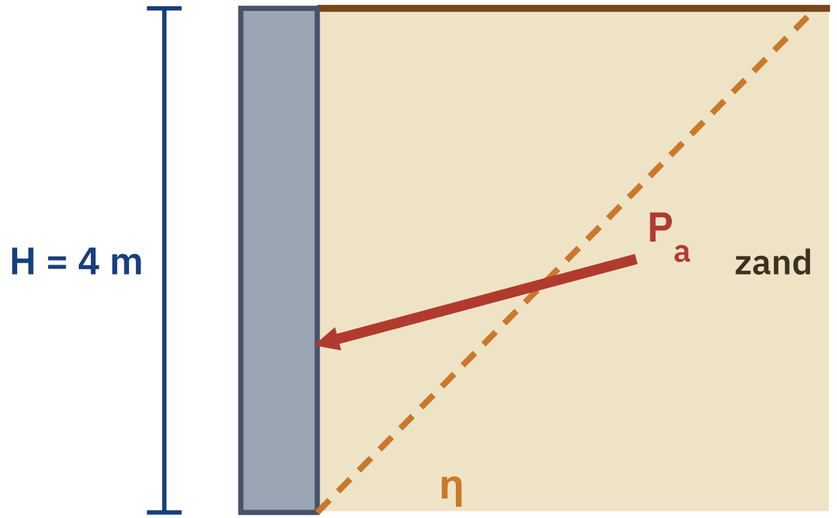
Geotechnisch college · Horizontale gronddruk

Mononobe–Okabe: aardbevingsgronddruk

College: de pseudostatische horizontale en verticale krachten op de wig achter de muur tijdens een aardbeving, de actieve coëfficiënt volgens Mononobe–Okabe, de evenwichtsgrens, de werklijn; bovenbelasting en grondwater; bij elk onderwerp een rekenvoorbeeld.

- Pseudostatische wig
- $\psi = \tan^{-1} k_h/(1 - k_v)$
- Seed – Whitman
- Bovenbelasting · water
- Evenwichtsgrens



Inleiding

Wat leren we in dit college?

De aardbeving **pseudostatisch** weergeven met horizontale (k_hW) en verticale (k_vW) krachten

Seismische hoek ψ en Mononobe–Okabe-coëfficiënt $\mathbf{K'_a}$; $P_{ae} = ½\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$

Evenwichtsgrens: als $k_{h,cr} = (1 - k_v) \tan \varphi'$ wordt overschreden, blijft geen enkele wig in evenwicht

De **plaats** van de kracht bepalen met Seed–Whitman: $P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$, met ΔP_{ae} op 0.6H

Rekening houden met bovenbelasting en **grondwater** (dat al dan niet met de grond meebeweegt)

om te zien hoe de kracht verandert wanneer k_h, k_v en de geometrie veranderen

COLLEGESTRUCTUUR

Elk onderwerp wordt in **drie stappen** behandeld:

1 · **Theorie**: wat is de regel, waarom is dat zo?

2 · **Opgave**: gegeven en gevraagd

3 · **Oplossing**: stap voor stap, met getallen

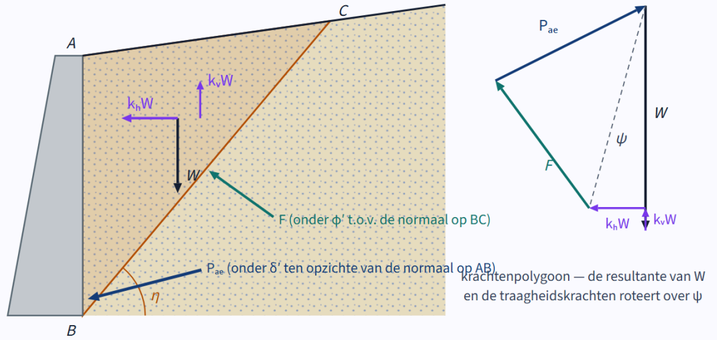
De krachten zijn per eenheid van wandlengte (kN/m); k_h, k_v zijn de verhoudingen van de versnelling tot g; k_v is positief omhoog.

Okabe (1926) en Mononobe–Matsuo (1929)

THEORIE

Tijdens een aardbeving versnelt de wig achter de muur. De pseudostatische methode stelt de schudding voor door twee **starre-lichaamkrachten** die op de Coulomb-wig aangrijpen:

- **$k_h W$**: horizontaal, naar de wand toe (k_h = horizontale versnelling / g)
- **$k_v W$**: verticaal (hier omhoog; vermindert het gewicht)
- W, F (onder hoek φ′) en P_{ae} (onder hoek δ′) zijn zoals bij Coulomb.



De som van W, $k_h W$ en $k_v W$ is een kracht die ten opzichte van de verticaal over de seismische hoek **ψ** is gedraaid; de seismische wig is dus een Coulomb-wig die over ψ is gedraaid (wandoppervlak θ + ψ, aanvulling α + ψ):

$$\psi = \tan^{-1}\frac{k_h}{1-k_v} \qquad W' = \frac{W(1-k_v)}{\cos\psi}$$

De actieve kracht is opnieuw de **grootste** van de proefwiggen.

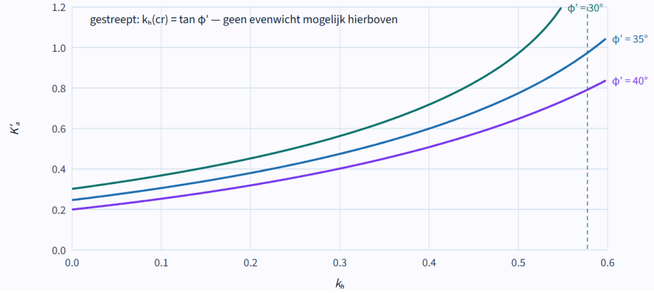
Dynamische actieve kracht

THEORIE

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 (1 - k_v) K'_a$$

$$K'_a = \frac{\cos^2(\varphi' - \theta - \psi)}{\cos\psi \cos^2\theta \cos(\delta' + \theta + \psi)\left[1 + \sqrt{\dfrac{\sin(\varphi' + \delta')\sin(\varphi' - \alpha - \psi)}{\cos(\delta' + \theta + \psi)\cos(\theta - \alpha)}}\right]^2}$$

k_h	φ′ = 28°	30°	35°	40°	45°
0.1	0.396	0.368	0.306	0.253	0.207
0.2	0.485	0.452	0.380	0.319	0.267
0.3	0.604	0.563	0.474	0.402	0.340
0.4	0.778	0.718	0.599	0.508	0.433
0.5	1.115	0.972	0.774	0.648	0.552



voor $k_h = k_v = 0$ is ψ = 0 en is K'_a de Coulomb-waarde K_a. Tabel: θ = α = 0, δ′ = φ′/2.

K'_a groeit snel met k_h; hij neemt onbegrensd toe naarmate de grens wordt genaderd.

Opgave

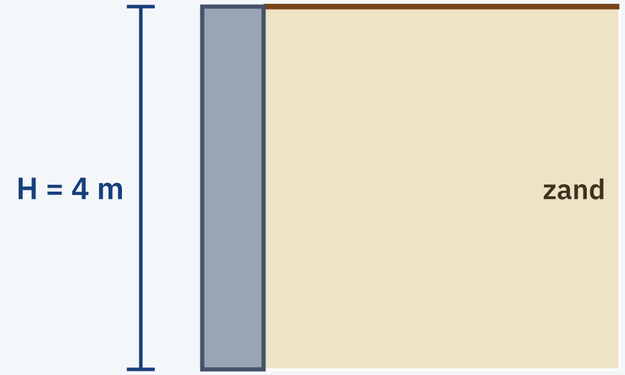
VOORBEELD

Gegeven

Wand	$H = 4$ **m, verticaal; horizontale aanvulling; geen bovenbelasting**
Grond	**droog zand:** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ,\ \delta' = 15^\circ$
Aardbeving	$k_h = 0.2,\ k_v = 0$

GEVRAAGD

ψ, **K′a**, **Pae** en de kritieke wig; vergelijking met statische Coulomb. De module opent met deze muur.



γ = 15.5 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k_h = 0.2

Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Seismische hoek

$$\psi = \tan^{-1}\frac{0.2}{1-0} = \mathbf{11.31^\circ}$$

2 Mononobe–Okabe-coëfficiënt (θ = α = 0)

$$\cos^2(30^\circ - 11.31^\circ) = 0.8973 \qquad \cos\psi = 0.9806 \qquad \cos(15^\circ + 11.31^\circ) = 0.8964$$

$$\sqrt{\frac{\sin 45^\circ \sin(30^\circ - 11.31^\circ)}{\cos(15^\circ + 11.31^\circ)}} = \sqrt{0.2528} = 0.5028$$

$$K'_a = \frac{0.8973}{0.9806(0.8964)(1+0.5028)^2} = \mathbf{0.4520}$$

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

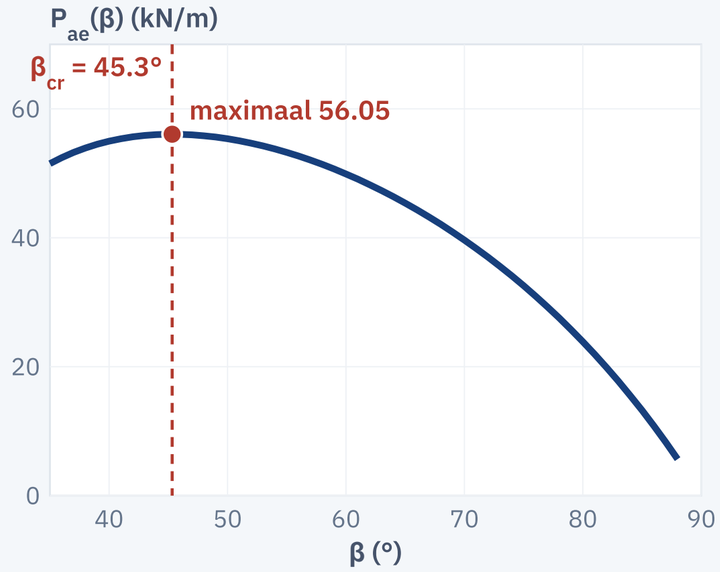
3 Dynamische kracht

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2(1-k_v)K'_a$$
$$= \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(1-0)(0.4520) = \mathbf{56.05}\ \mathrm{kN/m}$$

4 Kritische wig (top van de proefwiggen)

$$\beta_{cr} = \mathbf{45.3}^\circ\ (\text{met de horizontaal})$$

P_{ae} = **56.05 kN/m**; de statische Coulomb-kracht (K_a = 0.3014) bedroeg 37.38 kN/m: de aardbevingskracht heeft deze **met 50% verhoogd**. De maatgevende wig maakt 45.3° met de horizontaal.



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Kritieke horizontale versnelling

THEORIE

De sin(φ′ − α − ψ) onder de wortel is niet reëel wanneer φ′ − α − ψ < 0: **geen enkele wig kan in evenwicht zijn**, ongeacht het gedrag van de wand. De aanvulling is alleen onder de volgende voorwaarde stabiel:

$$\alpha \leq \varphi' - \psi$$

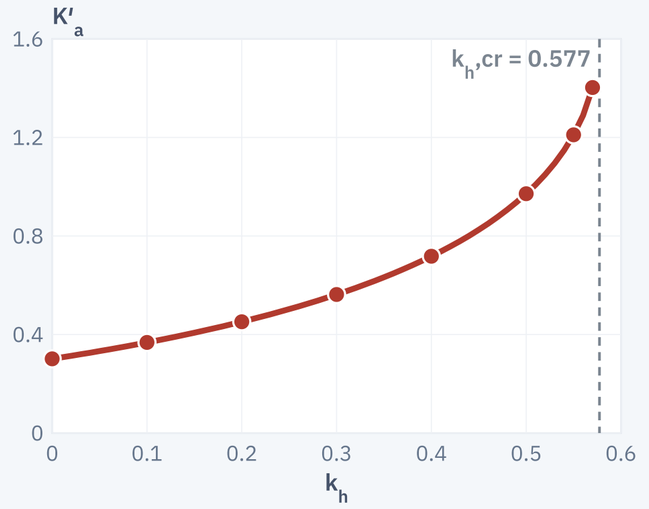
Voor een horizontale aanvulling vereist dit ψ ≤ φ′, dat wil zeggen dat de horizontale versnelling niet groter kan zijn dan:

$$k_{h(cr)} = (1 - k_v) \tan \varphi' \qquad (\alpha \neq 0 : \ \tan(\varphi' - \alpha))$$

Bij het naderen van de grens neemt K'_a zeer snel toe ($k_{h,cr}$ = 0.577 voor φ′ = 30°).

Als de modulus k_h boven de grens ligt, stopt de berekening met een melding.

K'_a – k_h (φ′ = 30°, δ′ = 15°)



Opgave

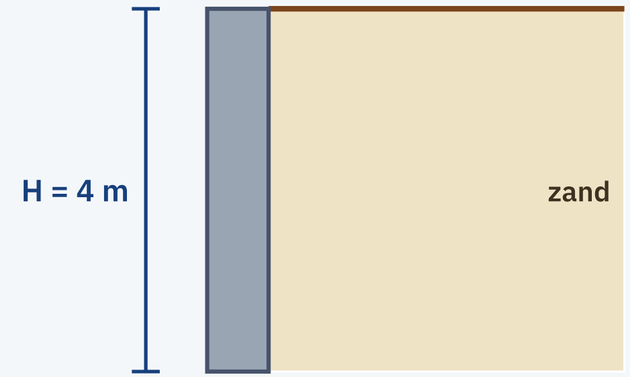
VOORBEELD

Gegeven

Wand en grond	**Keermuur uit voorbeeld 1:** $H = 4$ **m,** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$, $k_v = 0$
Variabele	$k_h = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5;\ 0.55;\ 0.57$

GEVRAAGD

Voor elke k_h: **ψ**, **K′$_a$** en **P$_{ae}$**; de kritieke k_h; het resultaat voor $k_h = 0.6$.



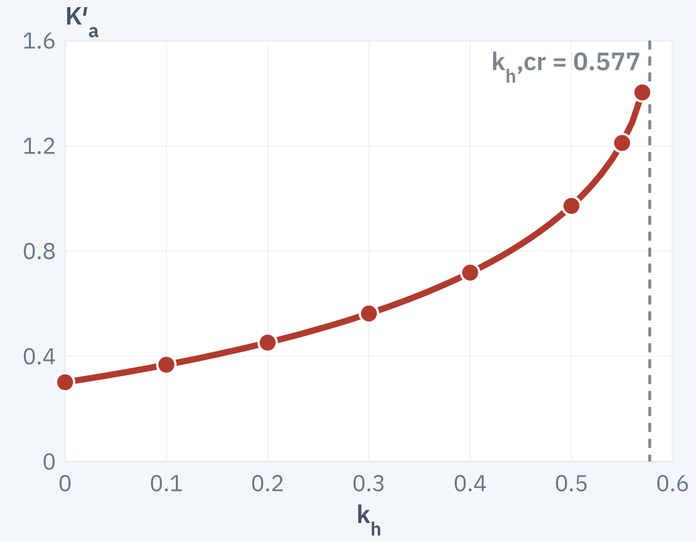
γ = 15.5 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°

Oplossing

OPLOSSING

1 $\psi = \tan^{-1} k_h$; $k_{h,cr} = \tan 30° = 0.577$

k_h	ψ (°)	K'_a	P_{ae} (kN/m)
0.00	0.0	0.301	37.4
0.10	5.7	0.368	45.6
0.20	11.3	0.452	56.1
0.30	16.7	0.563	69.8
0.40	21.8	0.718	89.0
0.50	26.6	0.972	120.5
0.55	28.8	1.211	150.1
0.57	29.7	1.403	174.0



Van k_h = 0 tot 0.2 gaat P_{ae} van 37.4 naar 56.1 kN/m (50%), bij 0.5 is dit 120.5 kN/m (3.2 keer); naarmate k_h 0.57 nadert, neemt K'_a onbegrensd toe. **k_h = 0.6 > 0.577**: de vierkantswortel is niet reëel, geen enkele wig is in evenwicht: de module stopt de berekening.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

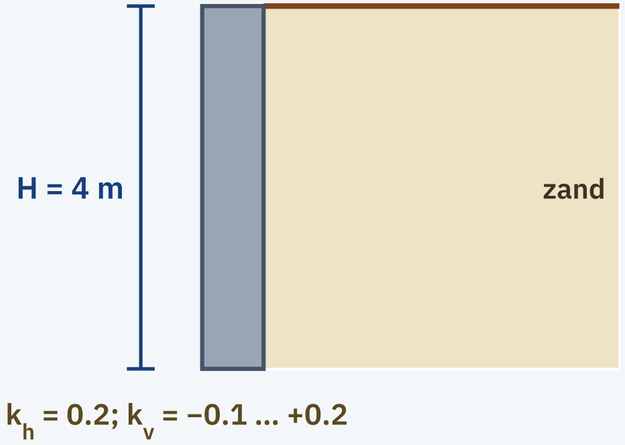
VOORBEELD

GEVRAAGD

Voor elke k_V: **ψ**, **K'_a**, **$(1 - k_V)$** en **P_{ae}**; welke richting is ongunstiger?

Gegeven

Wand en grond	**Keermuur en grond in Voorbeeld 1; $k_h = 0.2$**
Variabele	$k_v = -0.1$ **(naar beneden)**, 0, $+0.1$, $+0.2$ **(naar boven)**



Oplossing

OPLOSSING

1 $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; $P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a = 124\,(1 - k_v)\,K'_a$

k_v	ψ (°)	K'_a	$1 - k_v$	P_{ae} (kN/m)
-0.1	10.30	0.4351	1.1	59.35
0.0	11.31	0.4520	1.0	56.05
0.1	12.53	0.4739	0.9	52.89
0.2	14.04	0.5032	0.8	49.92

Neerwaartse k_v (−0.1) verhoogt de kracht tot 59.3 kN/m (+6%), opwaartse k_v = 0.2 verlaagt haar tot 49.9 kN/m. Hoewel ψ toeneemt bij opwaartse k_v, overheerst de factor $(1 - k_v)$. In de praktijk wordt $k_v = \pm 0.5\,k_h$ genomen met de richting die de grootste kracht oplevert.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Seed en Whitman (1970)

THEORIE

De Mononobe–Okabe-analyse geeft de grootte en de richting van de kracht, **maar niet waar deze aangrijpt**. Seed en Whitman splitsen de kracht in de statische Coulomb-kracht en de seismische toename:

$$P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$$

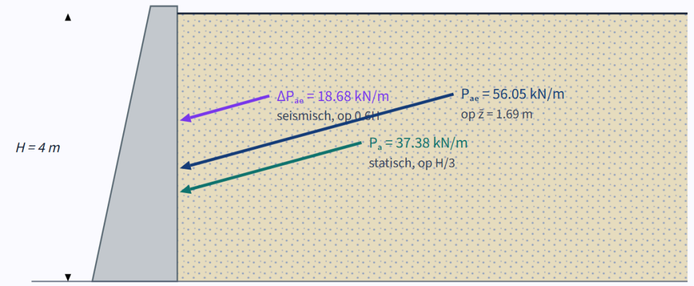
$$\bar{z} = \frac{P_a \dfrac{H}{3} + \Delta P_{ae}\,(0.6H)}{P_{ae}}$$

P_a (met dezelfde δ′, θ, α als ½K_aγH^2) grijpt **H/3** boven de voet aan; ΔP_{ae} grijpt aan op **0.6H** (het driehoeksdiagram is een omgekeerde driehoek die naar de voet toe smaller wordt).

De resultante helt opnieuw onder δ′ ten opzichte van de normaal op het wandvlak.

De toename wordt soms op halve hoogte aangenomen; 0.6H geeft een groter kantelmoment en wordt aangehouden.

STATISCH + SEISMISCHE TOENAME



Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Keermuur en aardbeving

Keermuur uit voorbeeld 1: $H = 4$ **m,** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$, $k_h = 0.2$

GEVRAAGD

P_a, ΔP_{ae} en **$\bar{z}$**; $\bar{z}$ indien ΔP_{ae} op halve hoogte wordt aangenomen.

Oplossing

OPLOSSING

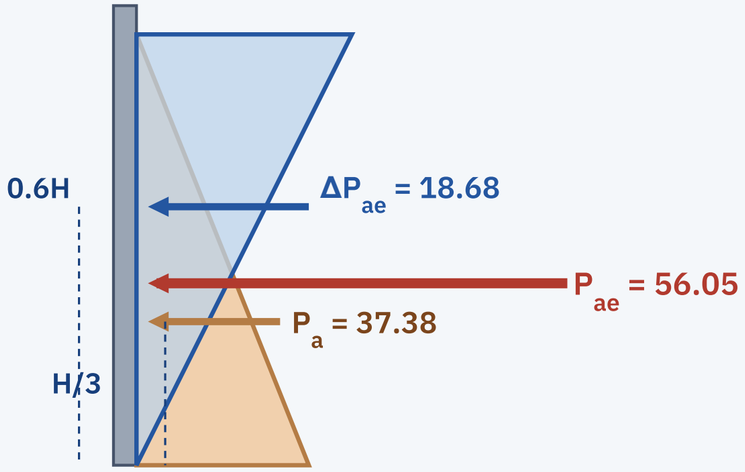
1 Statische kracht (K_a = 0.3014) en seismische toename

$$P_a = \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(0.3014) = 37.38\ \text{kN/m}$$

$$\Delta P_{ae} = P_{ae} - P_a = 56.05 - 37.38 = \mathbf{18.68}\ \text{kN/m}$$

2 Aangrijpingshoogte (vanaf de zool)

$$\bar{z} = \frac{37.38(4/3) + 18.68(2.4)}{56.05} = \mathbf{1.69}\ \text{m}$$



$\bar{z}$ = **1.69 m** (in het statische geval was dit 1.33 m). Was de toename op halve hoogte (2.0 m) aangenomen, dan zou $\bar{z}$ = 1.56 m uitkomen: de aanname 0.6H verschuift de kracht naar boven en **vergroot het kantelmoment**.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

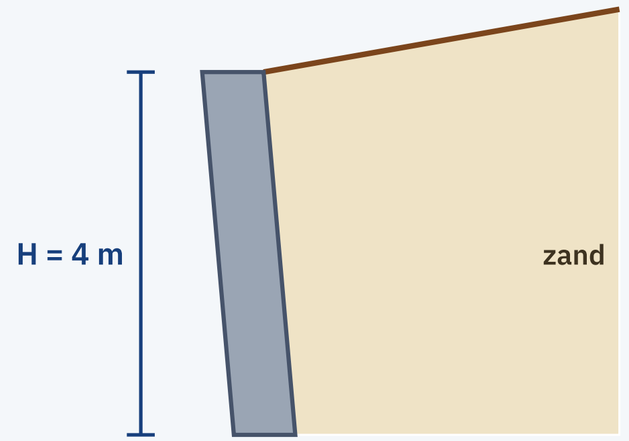
VOORBEELD

Gegeven

Wand	$H = 4$ **m; wand** $\theta = 5^\circ$ **uit het lood**
Ophoging	**maaiveldhelling** $\alpha = 10^\circ$**;** $\gamma = 15\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ,\ \delta' = 15^\circ$
Aardbeving	$k_h = 0.15,\ k_v = 0$

GEVRAAGD

ψ, **K′a**, **Pae**, ΔPae, **z̄**; toets van de evenwichtsgrens.



γ = 15, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k_h = 0.15

Oplossing

OPLOSSING

1 Seismische hoek en evenwichtsgrens

$$\psi = \tan^{-1} 0.15 = \mathbf{8.53}^\circ \qquad k_{h(cr)} = \tan 20^\circ = 0.364 > 0.15$$

2 Coëfficiënt en kracht (statische $K_a = 0.3872$)

$$K'_a(\theta = 5^\circ, \alpha = 10^\circ, \psi = 8.53^\circ) = \mathbf{0.5435}$$

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}(15)(4)^2(0.5435) = \mathbf{65.22}\ \text{kN/m} \qquad P_a = 46.46\ \text{kN/m}$$

3 Aangrijpingshoogte van de belasting

$$\Delta P_{ae} = 18.76\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \frac{46.46(1.33) + 18.76(2.4)}{65.22} = \mathbf{1.64}\ \text{m}$$

P_{ae} = **65.22 kN/m**, 1.64 m boven de basis; kritische wig 44.2°; de aardbevingskracht heeft deze met 40% verhoogd.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Module-extensie

THEORIE

De **bovenbelasting** q wordt samen met het gewicht ook aan de traagheid van elke wig toegevoegd; de maatgevende wig verandert niet:

$$q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} \qquad P_{ae} = (1-k_v)K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right)$$

In het grondwater beweegt het poriënwater mee met de grond (**ingesloten**, fijnkorrelige aanvulling) of beweegt het niet (**vrij**, k > 5·10⁻⁴ m/s). De traagheid wordt gedragen door de verzadigde of droge massa, de spanning door het effectief volumiek gewicht onder water; onder water neemt de seismische hoek toe:

$$\tan\psi_w = \frac{\gamma_{sat}}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{(ingeklemd)} \qquad \tan\psi_w = \frac{\gamma_d}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{(vrij)}$$

$$p_{wd} = \tfrac{7}{8}k_h\gamma_w\sqrt{d_w z'} \qquad P_{wd} = \tfrac{7}{12}k_h\gamma_w d_w^2\ (0{,}4\,d_w\ \text{op hoogte, Westergaard})$$

Voor vrij water wordt de hydrodynamische druk volgens Westergaard toegevoegd. In een gelaagde aanvulling wordt elke laag met zijn eigen K'_a genomen als $\sigma' = (1 - k_V)K'_{a,i}\sigma'_V\cos\theta$; het statische deel en ΔP_{ae} (0.6H) worden afzonderlijk gesommeerd.

WAAROM IS WATER BELANGRIJK?

Water vergroot de seismische hoek ($\psi_W > \psi$) en voegt naast de hydrostatische druk een **hydrodynamische druk (in vrije toestand)** toe.

Opgave

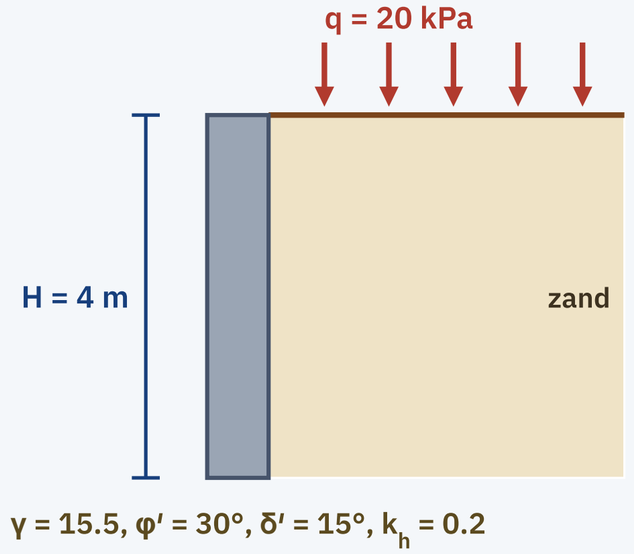
VOORBEELD

GEVRAAGD

Totaal $\mathbf{P_{ae}}$, statisch deel, seismische toename en $\bar{\mathbf{z}}$.

Gegeven

Wand en grond	**Muur en grond uit Voorbeeld 1 ($k_h = 0.2$)**
Bovenbelasting	**$q = 20$ kPa (op horizontaal vlak)**



Oplossing

OPLOSSING

1 Equivalente spanning en krachten ($K'_a = 0.4520$)

$$q_e = q\cos 0^\circ / \cos 0^\circ = 20\ \text{kPa}$$

$$P_{ae} = K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right) = 0.4520(124 + 80) = 0.4520(204) = \mathbf{92.21}\ \text{kN/m}$$

2 Statisch deel (Coulomb $K_a = 0.3014$) en toename

$$P_a = K_a(204) = 61.49\ \text{kN/m} \qquad \Delta P_{ae} = 30.73\ \text{kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{(37.38)(1.33) + (24.11)(2.0) + (30.73)(2.4)}{92.21} = \mathbf{1.86}\ \text{m}$$

P_{ae} = **92.21 kN/m** (56.05 zonder bovenbelasting); $\bar{z}$ = **1.86 m**. Het statische aandeel van de bovenbelasting grijpt aan op H/2, de seismische toename ervan op 0.6H.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

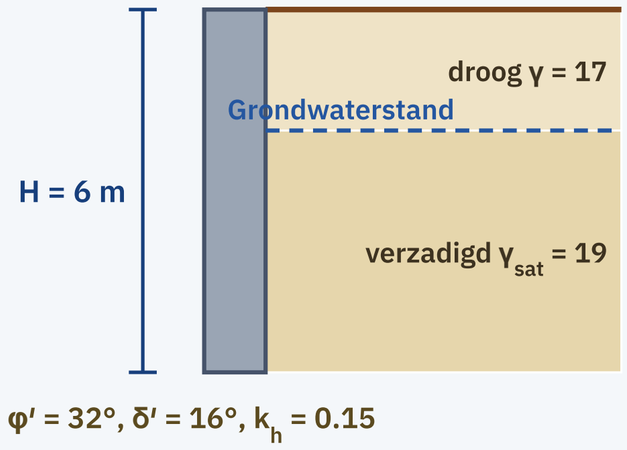
VOORBEELD

Gegeven

Wand	$H = 6$ **m, verticaal; horizontale aanvulling; geen bovenbelasting**
Grond	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3}$ **(droog, 0–2 m),** $\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3}$ **(2–6 m);** $\varphi' = 32^\circ,\ \delta' = 16^\circ$
Aardbeving	$k_h = 0.15$, $k_v = 0$**; grondwaterstand 2 m (dw = 4 m)**

GEVRAAGD

Het totaal **P** en **z̄** voor het geval waarin het water met de grond meebeweegt (**ingesloten**) en waarin dat niet gebeurt (**vrij**); vergelijking met de statische waarde.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Equivalente k_h en ψ_W onder water

$$\text{ingeklemd: } k_{h,w} = \frac{19}{19-9.81}(0.15) = 0.3101 \;\Rightarrow\; \psi_w = 17.23^\circ$$

$$\text{vrij: } k_{h,w} = \frac{17}{19-9.81}(0.15) = 0.2775 \;\Rightarrow\; \psi_w = 15.51^\circ$$

2 Coëfficiënten (droge zone ψ = 8.53°)

$$K'_a(\text{droog}) = 0.3792 \qquad K'_a(\text{ingesloten, onder water}) = 0.5372 \qquad K'_a(\text{vrij, onder water}) = 0.4991$$

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

3 Krachten (kN/m); $P_{wd} = (7/12)(0.15)(9.81)(4)^2 = 13.73$ kN/m, $0.4 \cdot d_w = 1.6$ m hoger

	Grond P_{ae}	Hydrostatisch water	Hydrodynamisch (Westergaard)	Totaal P	z̄ (m)
Statisch ($k_h = 0$)	67.74	78.48	–	144.80	1.71
Besloten water	125.46	78.48	–	202.06	2.24
Vrij water	117.47	78.48	13.73	207.67	2.15

De totale aardbevingskracht nam ten opzichte van de statische situatie toe met **40%** (ingeklemd) en **43%** (vrij); z̄ steeg van 1.71 naar 2.24 m. In de ingeklemde situatie is de grondkracht groter (ψ_w groot), in de vrije situatie wordt de hydrodynamische druk bijgeteld; de totalen liggen zeer dicht bij elkaar (202.1 en 207.7 kN/m).

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Scope van de oplossing

THEORIE

Pseudostatisch: de aardbeving wordt voorgesteld door constante k_h, k_v; de afhankelijkheid van de versnelling van de tijd en van de wandverplaatsing (Newmark-glijden, dynamische analyse) ontbreekt.

Vlakke wig, cohesieloze droge aanvulling (Mononobe–Okabe); het gelaagde geval is een uitbreiding van de module (er bestaat geen gesloten gelaagde oplossing); bij één laag reduceert het tot de gesloten oplossing, en bij $k_h = k_v = 0$ tot de gelaagde Coulomb.

Water: afgesloten (fijnkorrelig) of vrij ($k > 5 \cdot 10^{-4}$ m/s); bij vrij water wordt de hydrodynamische druk volgens Westergaard opgeteld.

Aangrijpingspunt Seed–Whitman: P_a op H/3, ΔP_{ae} op 0.6H; het water werkt met zijn eigen hefboom.

Voor **passieve** druk zie de module Passief bij aardbeving (Subba Rao–Choudhury).

Samenvatting

Belangrijkste punten

Pseudostatisch: $k_h W$, $k_v W$; $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; de seismische wig is de Coulomb-wig, geroteerd over ψ

$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$; K'_a neemt snel toe met k_h; bij $k_h = k_v = 0$ reduceert dit tot Coulomb

Evenwichtsgrens: $k_{h,cr} = (1 - k_v) \tan \varphi'$ ($\tan(\varphi' - \alpha)$ bij een talud); indien overschreden, bestaat er geen oplossing

k_v: vergroot de neerwaartse kracht; in de praktijk wordt de ongunstigste van $\pm 0.5 k_h$ gekozen

Plaats: $P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$; P_a op $H/3$, ΔP_{ae} op $0.6H$; $\bar{z} = [P_a(H/3) + \Delta P_{ae}(0.6H)]/P_{ae}$

Bovenbelasting $q_e = q \cos\theta/\cos(\theta - \alpha)$ wordt toegevoegd; onder **water** neemt ψ_w toe (afgesloten: γ_{sat}/γ', vrij: γ_d/γ') en in vrij water wordt de hydrodynamische druk $(7/12)k_h\gamma_w d_w^2$ toegevoegd

Literatuur

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Mononobe, N. en Matsuo, H. (1929). On the determination of earth pressure during earthquakes. Proceedings, World Engineering Congress, Tokio, 9, 177–185.

Okabe, S. (1926). General theory of earth pressure. Journal of the Japan Society of Civil Engineering, 12(1).

Seed, H.B. en Whitman, R.V. (1970). Design of earth retaining structures for dynamic loads. Specialty Conference on Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth Retaining Structures, ASCE, 103–147.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1933). Water pressures on dams during earthquakes. Transactions ASCE, 98, 418–433.

OPMERKING

Alle numerieke voorbeelden zijn geproduceerd met de eigen berekeningsmotor van de module; de module geeft dezelfde waarden. De module opent met de keermuur uit Voorbeeld 1 (k_h = 0.2, δ' = 15°).

GeoTerva

Online geotechnische berekeningen

Van theorie naar praktijk

Voer uw eigen keermuur, aardbevingscoëfficiënten k_h, k_v, bovenbelasting, lagen en grondwater in GeoTerva in; de module geeft P_{ae}, de aangrijpingshoogte en de maatgevende wig samen.

Module openen →

Theoriepagina →

Openen op de smartphone

Proefmodules vereisen geen registratie.

Wilt u ze in uw colleges gebruiken: info@geoterva.com