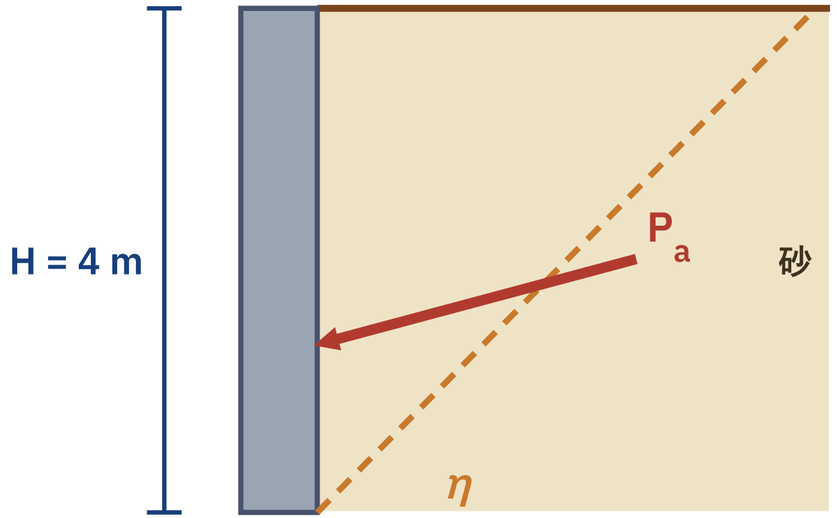
地盤工学講義スライド・土圧

Mononobe–Okabeの地震時土圧

講義：地震時に壁背後のくさびに作用する震度法による水平・鉛直力、Mononobe–Okabeの主働係数、釣合いの限界、作用線；上載荷重と地下水；各項目に計算例。

震度法くさび　$\psi = \tan^{-1} k_h/(1 - k_v)$　Seed – Whitman　上載荷重・水　釣合い限界



この講義で学ぶこと

- 地震を**震度法**による水平（k_hW）および鉛直（k_vW）の力で表すこと
- **震度法の角度** ψ とMononobe–Okabe係数**K'_a**；$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$
- **釣合いの限界**：$k_{h,cr} = (1 - k_v)\tan\phi'$ を超えると、いかなるくさびも釣合いを保てない
- 力の**位置**を Seed–Whitman で求めること：$P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$、$\Delta P_{ae}$ は 0.6H の位置
- 上載荷重および**地下水**（土とともに移動するか否か）を考慮すること
- k_h、k_vおよび形状が変化すると力がどのように変化するかを

講義の流れ

各項目は**3つの手順**で扱う：

1. **理論**：規則は何か、なぜそうなるのか
2. **問題**：与条件と求めるもの
3. **解答**：数値を用いて手順ごとに

力は壁の単位長さ当たりである（kN/m）；k_h、k_v はgに対する加速度の比；k_vは上向きを正とする。

Okabe（1926）およびMononobe–Matsuo（1929）

理論

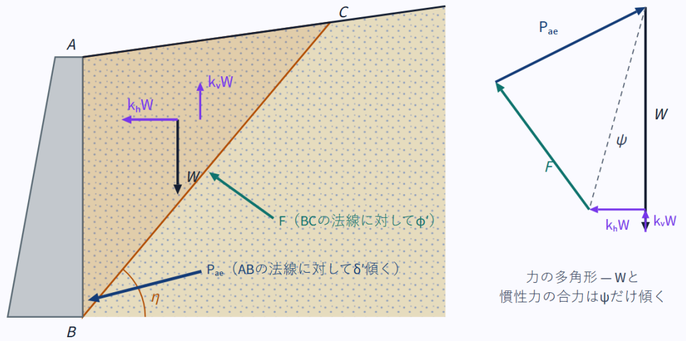
地震時に壁背後のくさびは加速度を受ける。震度法は振動をCoulombくさびに作用する2つの**剛体力**で表す：

- **k_hW**：水平、壁に向かう方向（k_h = 水平加速度 / g）
- **k_vW**：鉛直方向（ここでは上向き；重量を減じる）
- W、F（ϕ'傾斜）およびP_{ae}（δ'傾斜）はCoulombの場合と同じである。

W、k_hWおよびk_vWの和は、鉛直方向から地震時角ψだけ回転した力である；すなわち地震時くさびは、ψだけ回転したCoulombくさびである（壁面$\theta + \psi$、背面土$\alpha + \psi$）：

$$\psi = \tan^{-1}\frac{k_h}{1-k_v} \qquad W' = \frac{W(1-k_v)}{\cos\psi}$$

主働力はやはり試行くさびのうちの**最大値**である。



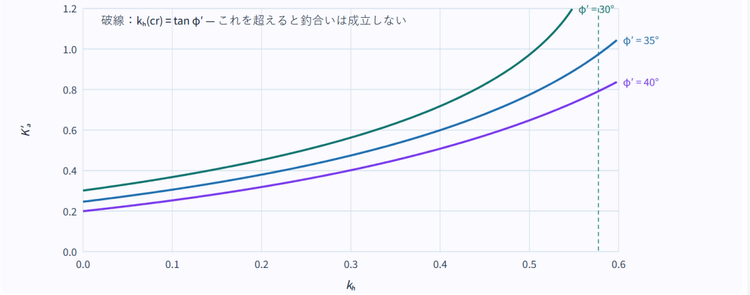
動的主働土圧

理論

$$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2 (1 - k_v) K'_a$$

$$K'_a = \frac{\cos^2(\varphi' - \theta - \psi)}{\cos\psi \cos^2\theta \cos(\delta' + \theta + \psi)\left[1 + \sqrt{\dfrac{\sin(\varphi' + \delta')\sin(\varphi' - \alpha - \psi)}{\cos(\delta' + \theta + \psi)\cos(\theta - \alpha)}}\right]^2}$$

k_h	ϕ' = 28°	30°	35°	40°	45°
0.1	0.396	0.368	0.306	0.253	0.207
0.2	0.485	0.452	0.380	0.319	0.267
0.3	0.604	0.563	0.474	0.402	0.340
0.4	0.778	0.718	0.599	0.508	0.433
0.5	1.115	0.972	0.774	0.648	0.552



$k_h = k_v = 0$ のとき $\psi = 0$ であり、K'_aはCoulombのK_aである。表：$\theta = \alpha = 0$、$\delta' = \phi'/2$。

K'_aはk_hとともに急速に増大する。限界に近づくと無限に増大する。

問題

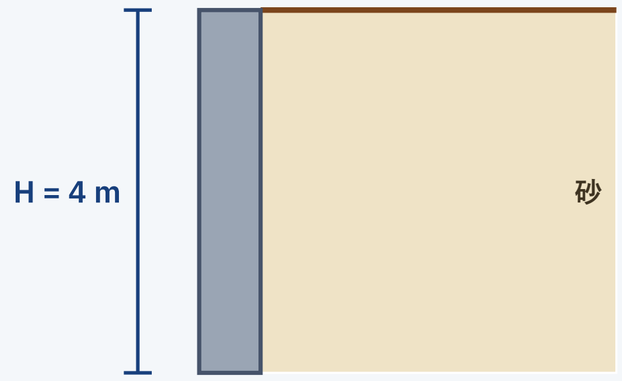
例題

与条件

壁	$H = 4$ m、鉛直、水平背面土、上載荷重なし
地盤	乾燥砂：$\gamma = 15.5$ kN/m^3, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$
地震	$k_h = 0.2, k_v = 0$

求めるもの

ψ、K'_a、P_{ae}および臨界くさび；静的Coulombとの比較。モジュールはこの壁で開く。



解答 (1/2)

解答

1 地震時角度

$$\psi = \tan^{-1}\frac{0.2}{1-0} = \mathbf{11.31^\circ}$$

2 Mononobe–Okabe係数（θ = α = 0）

$$\cos^2(30^\circ - 11.31^\circ) = 0.8973 \qquad \cos\psi = 0.9806 \qquad \cos(15^\circ + 11.31^\circ) = 0.8964$$

$$\sqrt{\frac{\sin 45^\circ \sin(30^\circ - 11.31^\circ)}{\cos(15^\circ + 11.31^\circ)}} = \sqrt{0.2528} = 0.5028$$

$$K'_a = \frac{0.8973}{0.9806(0.8964)(1+0.5028)^2} = \mathbf{0.4520}$$

解答 (2/2)

解答

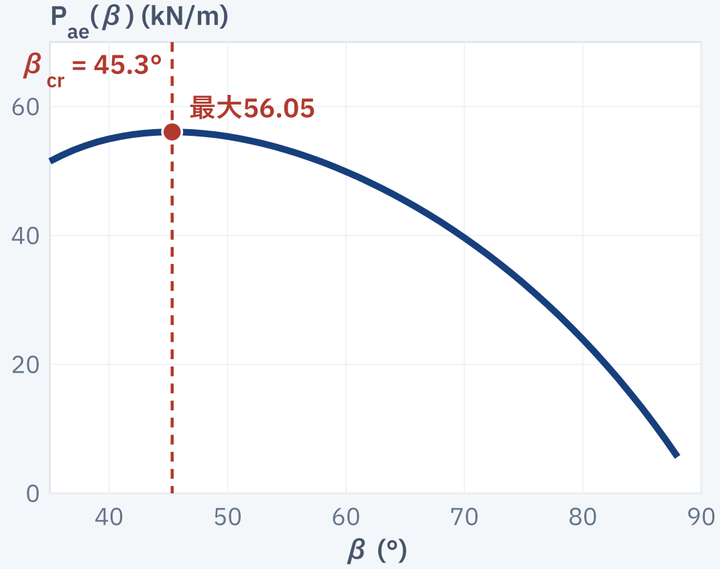
3 動的力

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2(1-k_v)K'_a$$
$$= \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(1-0)(0.4520) = \mathbf{56.05}\ \text{kN/m}$$

4 臨界くさび（試行くさびの頂点）

$$\beta_{cr} = \mathbf{45.3}^\circ \quad \text{（水平とのなす角）}$$

P_{ae} = **56.05 kN/m**。静的Coulomb力（K_a = 0.3014）は37.38 kN/mであった：地震力により**50%増加**した。臨界くさびは水平と45.3°をなす。



GeoTervaで解答を確認する ↗

限界水平加速度

理論

平方根の中のsin($\phi' - \alpha - \psi$)は、$\phi' - \alpha - \psi < 0$のとき実数とはならない：壁の挙動にかかわらず**いかなるくさびもつり合い得ない**。背面土が安定となるのは次の条件のときのみである：

$$\alpha \le \varphi' - \psi$$

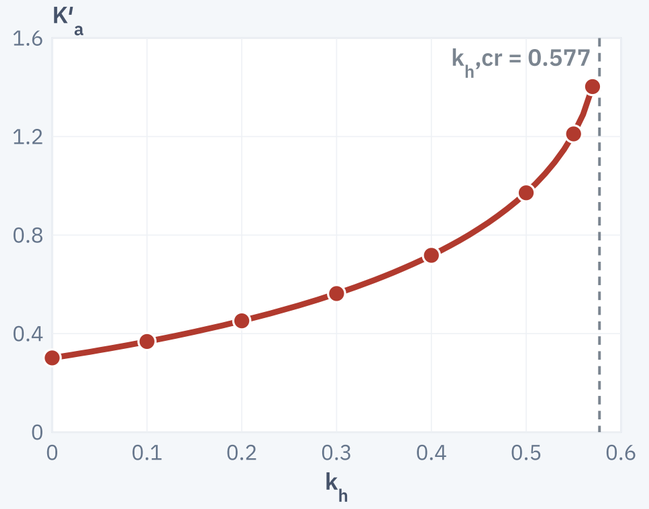
水平盛土に対して$\psi \le \phi'$、すなわち水平加速度は次式を超えられない：

$$k_{h(cr)} = (1 - k_v)\tan\varphi' \qquad (\alpha \neq 0:\ \tan(\varphi' - \alpha))$$

極限に近づくとK'_aは非常に急速に増加する（$\phi' = 30°$に対して$k_{h,cr} = 0.577$）。

係数k_hが上限を超える場合、メッセージを表示して計算を停止する。

$K'_a - k_h$ ($\phi' = 30°$, $\delta' = 15°$)



問題

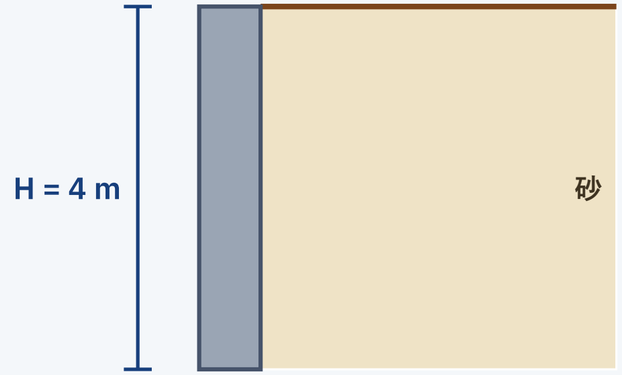
例題

求めるもの

各k_hについてψ、K'_a、P_{ae}；臨界k_h；$k_h = 0.6$に対する結果。

与条件

壁体と地盤	**例題1の擁壁：**$H = 4$ m, $\gamma = 15.5$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$, $\delta' = 15^\circ$, $k_v = 0$
変数	$k_h = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5;\ 0.55;\ 0.57$



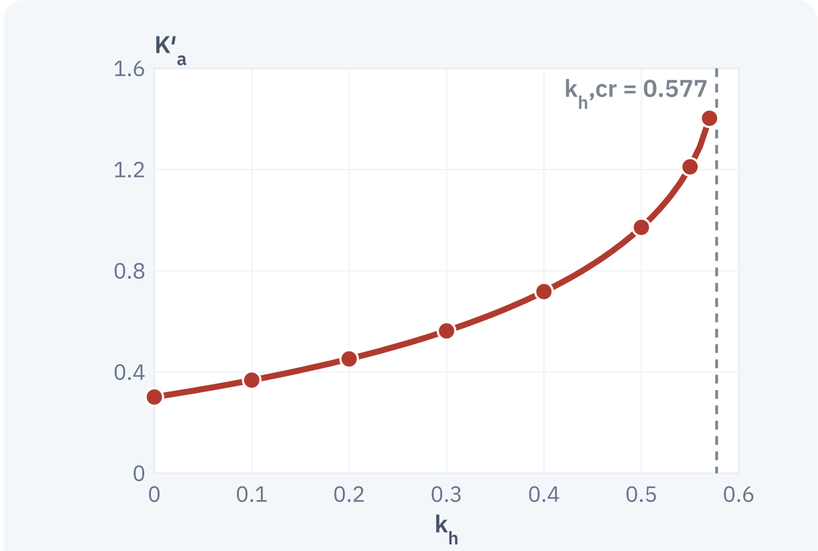
γ = 15.5 kN/m³, ϕ' = 30°, δ' = 15°

解答

解答

1 $\psi = \tan^{-1} k_h$; $k_{h,cr} = \tan 30° = 0.577$

k_h	ψ (°)	K'_a	P_{ae} (kN/m)
0.00	0.0	0.301	37.4
0.10	5.7	0.368	45.6
0.20	11.3	0.452	56.1
0.30	16.7	0.563	69.8
0.40	21.8	0.718	89.0
0.50	26.6	0.972	120.5
0.55	28.8	1.211	150.1
0.57	29.7	1.403	174.0



k_h = 0から0.2でP_{ae}は37.4 → 56.1 kN/m（50%）、0.5では120.5 kN/m（3.2倍）となる。k_hが0.57に近づくとK'_aは限りなく増大する。**k_h = 0.6 > 0.577**：平方根が実数とならず、いかなるくさびも釣り合わない。モジュールは計算を停止する。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

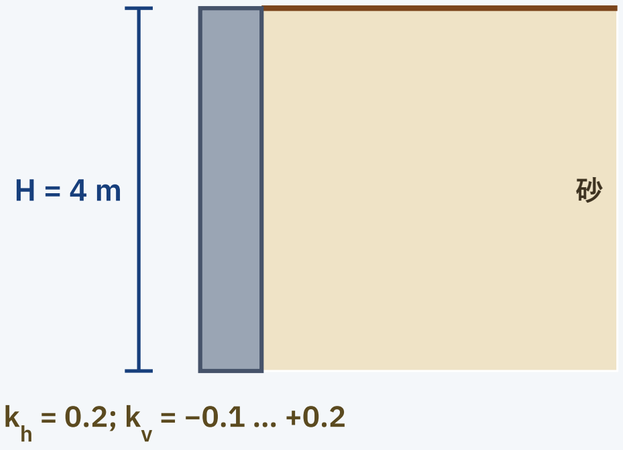
例題

与条件

壁体と地盤	**例題1の擁壁と地盤；$k_h = 0.2$**
変数	$k_v = -0.1$（**下向き**）、0、$+0.1$、$+0.2$（**上向き**）

求めるもの

各k_vについてψ、K'_a、$(1 - k_v)$、P_{ae}；どちらの方向がより不利か。



解答

解答

1 $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$、$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a = 124\,(1 - k_v)\,K'_a$

k_v	ψ (°)	K'_a	$1 - k_v$	P_{ae} (kN/m)
-0.1	10.30	0.4351	1.1	59.35
0.0	11.31	0.4520	1.0	56.05
0.1	12.53	0.4739	0.9	52.89
0.2	14.04	0.5032	0.8	49.92

下向きのk_v（−0.1）は力を59.3 kN/mに増加させ（+6%）、上向きのk_v = 0.2は49.9 kN/mに減少させる。上向きのk_vではψが増加するものの、$(1 - k_v)$の係数が支配的となる。実務では$k_v = \pm 0.5\,k_h$とし、力が大きく出る方向を選ぶ。

GeoTervaで解答を確認する ↗

Seed and Whitman (1970)

理論

Mononobe–Okabeの解析は力の大きさと方向を与えるが、**どこに作用するかは与えない**。SeedとWhitmanは力を静的Coulomb力と地震による増分に分ける：

$$P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$$

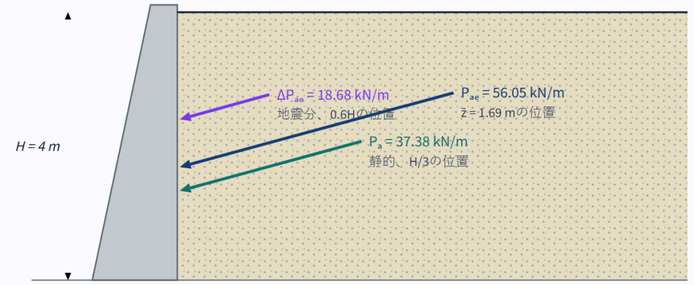
$$\bar{z} = \frac{P_a \dfrac{H}{3} + \Delta P_{ae}\,(0.6H)}{P_{ae}}$$

P_a（同じ δ'、θ、α で$\frac{1}{2}K_a \gamma H^2$）は底面から**H/3**の高さに作用する。$\Delta P_{ae}$は**0.6H**に作用する（三角形分布は底面に向かって狭まる逆三角形である）。

合力は再び壁面の法線から δ'だけ傾斜する。

増分はしばしば半高さで採られる；0.6Hはより大きな転倒モーメントを与えるため、これを採用する。

静的＋地震増分



問題

例題

与条件

壁と地震

例題1の擁壁： $H = 4\ \mathrm{m},\ \gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ,\ \delta' = 15^\circ,\ k_h = 0.2$

求めるもの

P_a, ΔP_{ae}および$\bar{z}$；ΔP_{ae}を半高さでとる場合の$\bar{z}$。

解答

解答

1 静的力（$K_a = 0.3014$）と地震時増分

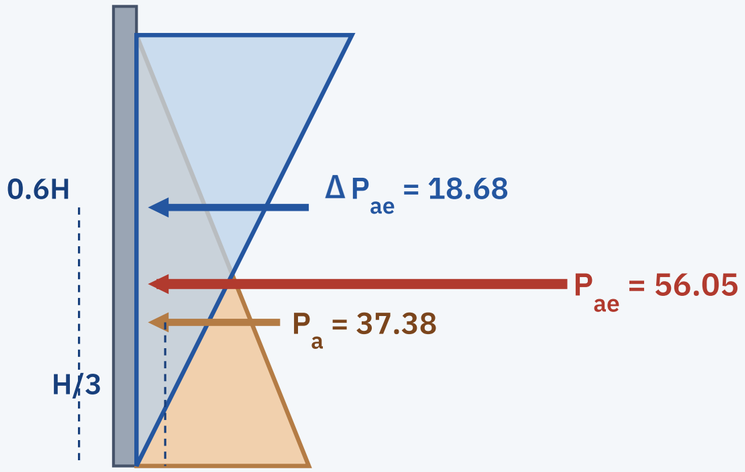
$$P_a = \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(0.3014) = 37.38 \text{ kN/m}$$

$$\Delta P_{ae} = P_{ae} - P_a = 56.05 - 37.38 = \mathbf{18.68} \text{ kN/m}$$

2 作用高さ（底面から）

$$\bar{z} = \frac{37.38(4/3) + 18.68(2.4)}{56.05} = \mathbf{1.69} \text{ m}$$

$\bar{z}$ = **1.69 m**（静的な場合は1.33 mであった）。増分を半分の高さ（2.0 m）で採ると$\bar{z}$ = 1.56 mとなる：0.6Hの仮定は力を上方へ移し、**転倒モーメントを大きくする**。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

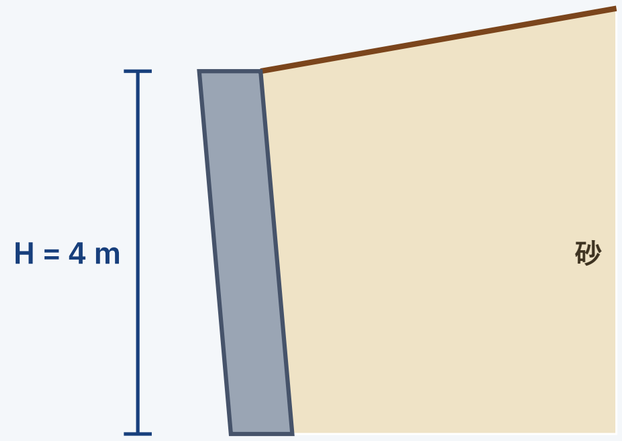
例題

与条件

壁	$H = 4$ m；表面は鉛直から$\theta = 5^\circ$傾斜
盛土	地表面勾配$\alpha = 10^\circ$；$\gamma = 15$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$, $\delta' = 15^\circ$
地震	$k_h = 0.15$, $k_v = 0$

求めるもの

ψ、K'_a、P_{ae}、ΔP_{ae}、$\bar{z}$、つり合い限界の照査。



解答

解答

1 地震時角度とつり合いの限界

$$\psi = \tan^{-1} 0.15 = \mathbf{8.53}^\circ \qquad k_{h(cr)} = \tan 20^\circ = 0.364 > 0.15$$

2 係数と力（静的K_a = 0.3872）

$$K'_a(\theta = 5^\circ, \alpha = 10^\circ, \psi = 8.53^\circ) = \mathbf{0.5435}$$

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}(15)(4)^2(0.5435) = \mathbf{65.22}\ \text{kN/m} \qquad P_a = 46.46\ \text{kN/m}$$

3 荷重の作用高さ

$$\Delta P_{ae} = 18.76\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \frac{46.46(1.33) + 18.76(2.4)}{65.22} = \mathbf{1.64}\ \text{m}$$

P_{ae} = **65.22 kN/m**、底面から1.64 m上方；臨界くさび44.2°；地震力により40%増加した。

GeoTervaで解答を確認する ↗

モジュールの拡張機能

理論

上載荷重qは各くさびの重量とともにその慣性にも加算される；臨界くさびは変化しない：

$$q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} \qquad P_{ae} = (1-k_v)K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right)$$

地下水中では、間隙水は地盤とともに移動する（**拘束**、細粒分を含む盛土）か、あるいは移動しない（**自由**、k > 5·10^{-4} m/s）。慣性力は飽和または乾燥質量で、応力は水中重量で負担される。水中では震度法の角度が大きくなる：

$$\tan\psi_w = \frac{\gamma_{sat}}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{（拘束）} \qquad \tan\psi_w = \frac{\gamma_d}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{（自由）}$$

$$p_{wd} = \tfrac{7}{8}k_h\gamma_w\sqrt{d_w z'} \qquad P_{wd} = \tfrac{7}{12}k_h\gamma_w d_w^2\ \text{（0,4 } d_w \text{ 高さにおける、Westergaard）}$$

自由水にはWestergaardの動水圧を加える。成層した背面土では各層がそれぞれのK′$_a$を用いて $\sigma' = (1 - k_v)K'_{a,i}\,\sigma'_v\cos\theta$ とされ、静的部と ΔP_{ae}（0.6H）は別々に合計する。

なぜ水が重要か

水は地震角を大きくし（$\psi_w > \psi$）、静水圧に加えて（**自由状態で**）**動水圧**をもたらす。

問題

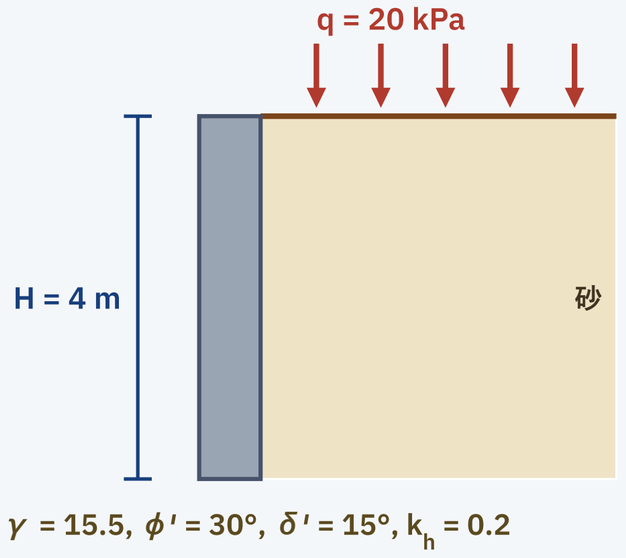
例題

与条件

壁体と地盤	**例題1の擁壁と地盤（$k_h = 0.2$）**
上載荷重	$q = 20$ **kPa（水平面において）**

求めるもの

合計 P_{ae}、静的成分、地震による増分および $\bar{z}$。



解答

解答

1 等価応力と力（$K'_a = 0.4520$）

$$q_e = q\cos 0^\circ / \cos 0^\circ = 20 \text{ kPa}$$

$$P_{ae} = K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right) = 0.4520(124 + 80) = 0.4520(204) = \mathbf{92.21} \text{ kN/m}$$

2 静的成分（Coulomb $K_a = 0.3014$）と増分

$$P_a = K_a(204) = 61.49 \text{ kN/m} \qquad \Delta P_{ae} = 30.73 \text{ kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{(37.38)(1.33) + (24.11)(2.0) + (30.73)(2.4)}{92.21} = \mathbf{1.86} \text{ m}$$

P_{ae} = **92.21 kN/m**（上載荷重なしでは56.05）、$\bar{z}$ = **1.86 m**。上載荷重の静的寄与分はH/2、その地震時増分は0.6Hの位置に作用する。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

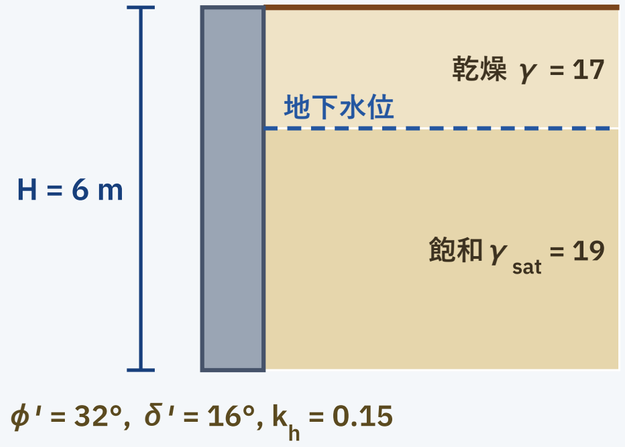
例題

与条件

壁	$H = 6$ m、鉛直、水平背面土、上載荷重なし
地盤	$\gamma = 17$ kN/m^3（乾燥、0–2 m）、$\gamma_{sat} = 19$ kN/m^3（2–6 m）；$\varphi' = 32°$, $\delta' = 16°$
地震	$k_h = 0.15$、$k_v = 0$；地下水位2 m（dw = 4 m）

求めるもの

水が土とともに移動する（**拘束**）場合と移動しない（**自由**）場合の全**P**および**z̄**。静的値との比較。



解答 (1/2)

解答

1 水中における等価k_hとψ_w

$$\text{拘束：}\ k_{h,w} = \frac{19}{19-9.81}(0.15) = 0.3101 \ \Rightarrow\ \psi_w = 17.23^\circ$$

$$\text{自由：}\ k_{h,w} = \frac{17}{19-9.81}(0.15) = 0.2775 \ \Rightarrow\ \psi_w = 15.51^\circ$$

2 係数（乾燥域 ψ = 8.53°）

$$K'_a(\text{乾燥}) = 0.3792 \qquad K'_a(\text{拘束、水中}) = 0.5372 \qquad K'_a(\text{自由、水中}) = 0.4991$$

解答 (2/2)

解答

3 力（kN/m）：$P_{wd} = (7/12)(0.15)(9.81)(4)^2 = 13.73$ kN/m、$0.4 \cdot d_w = 1.6$ m上方

	地盤P_{ae}	静水圧の水	水理学的（Westergaard）	全P	$\bar{z}$ (m)
静的（$k_h = 0$）	67.74	78.48	–	144.80	1.71
被圧水	125.46	78.48	–	202.06	2.24
自由水	117.47	78.48	13.73	207.67	2.15

地震時の合力は静的の場合に比べて**40%**（拘束）および**43%**（自由）増加した。$\bar{z}$は1.71 → 2.24 mに上昇した。拘束状態では地盤の力がより大きくなり（ψ_wが大きい）、自由状態では動水圧が加算される。両者の合力は非常に近い（202.1および207.7 kN/m）。

GeoTervaで解答を確認する ↗

解答の範囲

理論

震度法：地震は一定のk_h、k_vで表す；加速度の時間依存性および壁の移動への依存性（Newmarkの滑動、動的解析）は考慮しない。

平面くさび、粘着力のない乾燥背面土（Mononobe–Okabe）；成層の場合はモジュールの拡張であり（閉形式の成層解は存在しない）、単一層では閉形式解に、$k_h = k_v = 0$では成層Coulombに帰着する。

水：被圧（細粒）または自由（$k > 5 \cdot 10^{-4}$ m/s）；自由水では Westergaard の動水圧を加える。

作用位置 Seed–Whitman：P_aはH/3、ΔP_{ae}は0.6Hの位置。水は自身の腕の長さで作用する。

受働土圧については、地震時の受働土圧（Subba Rao–Choudhury）モジュールを参照する。

まとめ

ポイントのまとめ

震度法：$k_h W$、$k_v W$。$\psi = \tan^{-1}[k_h/(1-k_v)]$。地震時くさびは$\psi$だけ回転したCoulombくさびである

$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1-k_v)K'_a$；$K'_a$は$k_h$とともに急増する；$k_h = k_v = 0$ではCoulombとなる

釣合い限界：$k_{h,cr} = (1-k_v)\tan\phi'$（斜面上では$\tan(\phi' - \alpha)$）；これを超えると解は存在しない。

k_v：下向きの力を増加させる；実務では$\pm 0.5k_h$の厳しい方を選ぶ

位置：$P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$。$P_a$はH/3、$\Delta P_{ae}$は0.6Hの位置。$\bar{z} = [P_a(H/3) + \Delta P_{ae}(0.6H)]/P_{ae}$

上載荷重は $q_e = q\cos\theta/\cos(\theta-\alpha)$ で付加する。**水**中では ψ_w が増大し（拘束時：γ_{sat}/γ'、自由時：γ_d/γ'）、自由水では動水圧 $(7/12)k_h\gamma_w d_w^2$ を付加する

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Mononobe, N. and Matsuo, H. (1929). On the determination of earth pressure during earthquakes. Proceedings, World Engineering Congress, Tokyo, 9, 177–185.

Okabe, S. (1926). General theory of earth pressure. Journal of the Japan Society of Civil Engineering, 12(1).

Seed, H.B. and Whitman, R.V. (1970). Design of earth retaining structures for dynamic loads. Specialty Conference on Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth Retaining Structures, ASCE, 103–147.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1933). Water pressures on dams during earthquakes. Transactions ASCE, 98, 418–433.

注記

数値例はすべてモジュール自身の計算エンジンで生成した。モジュールも同じ値を与える。モジュールは例題1の擁壁（$k_h = 0.2$、$\delta' = 15°$）で開く。

GeoTerva

オンライン地盤工学計算

理論から実務へ

自分の擁壁、地震係数k_h、k_v、上載荷重、層、地下水をGeoTervaで入力する。モジュールはP_{ae}、作用高さ、臨界くさびを同時に与える。

モジュールを開く →

理論ページ →

スマートフォンで開く
お試しモジュールは登録不要です。

講義で使用したい場合：info@geoterva.com