Lezione di geotecnica · Spinta delle terre

Spinta delle terre sismica secondo Mononobe–Okabe

Lezione: le forze pseudostatiche orizzontali e verticali sul cuneo a tergo del muro durante un sisma, il coefficiente di spinta attiva di Mononobe–Okabe, il limite di equilibrio, la linea d'azione; sovraccarico e falda freatica; un esempio di calcolo per ogni argomento.

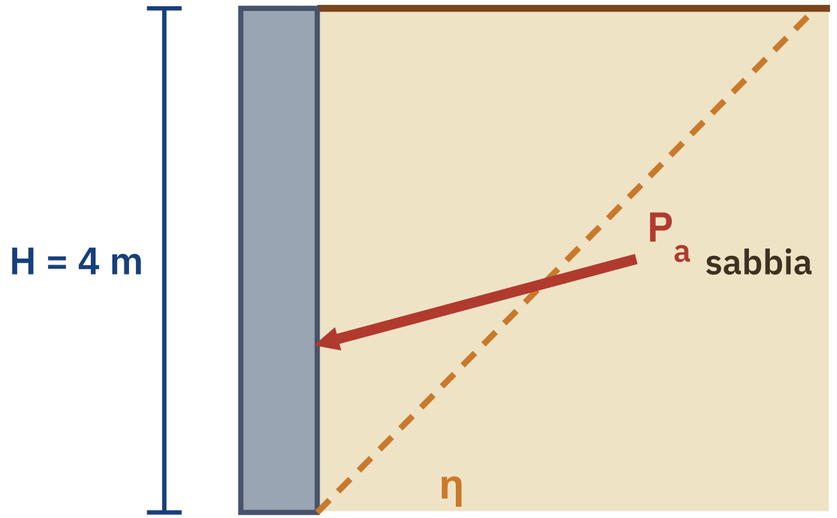
Cuneo pseudostatico

$\psi = \tan^{-1} k_h/(1 - k_v)$

Seed – Whitman

Sovraccarico · acqua

Limite di equilibrio



Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

Rappresentare il sisma con forze **pseudostatiche** orizzontali ($k_h W$) e verticali ($k_v W$)

Angolo sismico ψ e coefficiente di Mononobe–Okabe $\mathbf{K'_a}$; $P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$

Limite di equilibrio: se si supera $k_{h,cr} = (1 - k_v) \tan \varphi'$, nessun cuneo risulta in equilibrio

Determinazione della **posizione** della forza con Seed–Whitman: $P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$, con ΔP_{ae} a 0.6H

Tenere conto del sovraccarico e della **falda freatica** (solidale o non solidale con il terreno)

vedere come varia la forza al variare di k_h, k_v e della geometria

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: qual è la regola e perché è così?

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Le forze sono per unità di lunghezza del muro (kN/m); k_h, k_v sono i rapporti tra l'accelerazione e g; k_v è positivo verso l'alto.

Okabe (1926) e Mononobe–Matsuo (1929)

TEORIA

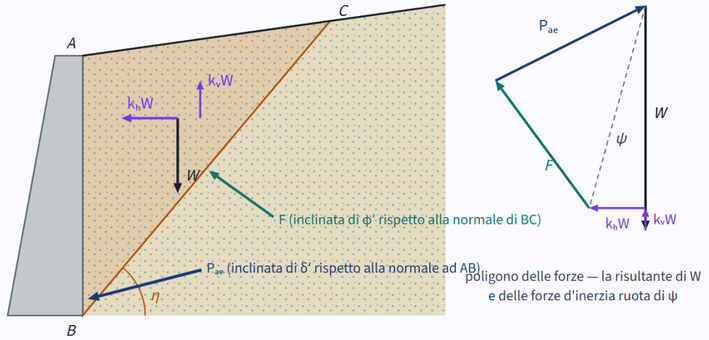
Durante il sisma il cuneo dietro il muro accelera. Il metodo pseudostatico rappresenta la scossa mediante due **forze di corpo rigido** agenti sul cuneo di Coulomb:

- **k_hW**: orizzontale, verso il muro (k_h = accelerazione orizzontale / g)
- **k_vW**: verticale (qui verso l'alto; riduce il peso)
- W, F (φ′ inclinato) e P_{ae} (δ′ inclinato) sono come in Coulomb.

La somma di W, k_hW e k_vW è una forza ruotata rispetto alla verticale dell'angolo sismico **ψ**; cioè il cuneo sismico è un cuneo di Coulomb ruotato di ψ (paramento θ + ψ, terrapieno α + ψ):

$$\psi = \tan^{-1}\frac{k_h}{1-k_v} \qquad W' = \frac{W(1-k_v)}{\cos\psi}$$

La forza attiva è ancora la **maggiore** fra i cunei di tentativo.



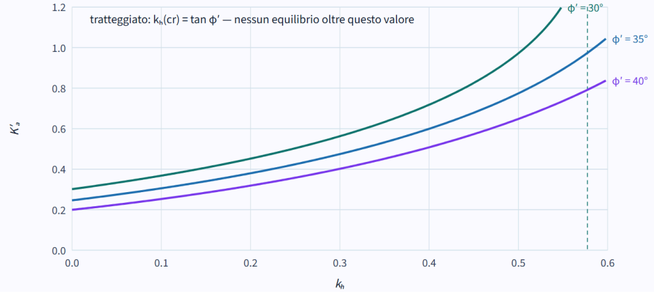
Forza attiva dinamica

TEORIA

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 (1 - k_v) K'_a$$

$$K'_a = \frac{\cos^2(\varphi' - \theta - \psi)}{\cos\psi \cos^2\theta \cos(\delta' + \theta + \psi)\left[1 + \sqrt{\dfrac{\sin(\varphi' + \delta')\sin(\varphi' - \alpha - \psi)}{\cos(\delta' + \theta + \psi)\cos(\theta - \alpha)}}\right]^2}$$

k_h	φ′ = 28°	30°	35°	40°	45°
0.1	0.396	0.368	0.306	0.253	0.207
0.2	0.485	0.452	0.380	0.319	0.267
0.3	0.604	0.563	0.474	0.402	0.340
0.4	0.778	0.718	0.599	0.508	0.433
0.5	1.115	0.972	0.774	0.648	0.552



per $k_h = k_v = 0$, $\psi = 0$ e K'_a è il K_a di Coulomb. Tabella: $\theta = \alpha = 0$, $\delta' = \varphi'/2$.

K'_a cresce rapidamente con k_h; aumenta illimitatamente avvicinandosi al limite.

Traccia

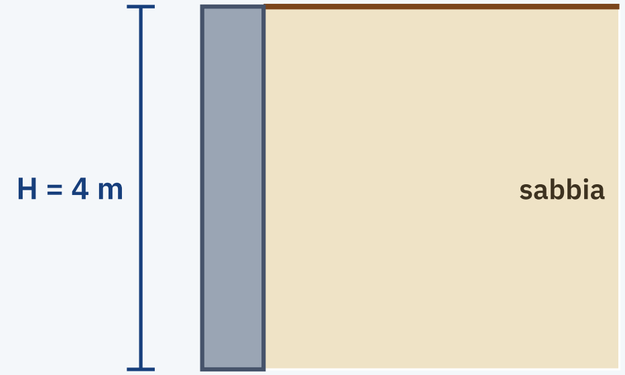
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 4$ **m, verticale; terrapieno orizzontale; nessun sovraccarico**
Terreno	**sabbia asciutta:** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ,\ \delta' = 15^\circ$
Sisma	$k_h = 0.2$**,** $k_v = 0$

RICHIESTO

ψ, **K′a**, **Pae** e il cuneo critico; confronto con Coulomb statico. Il modulo si apre con questo muro.



γ = 15.5 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k_h = 0.2

Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Angolo sismico

$$\psi = \tan^{-1}\frac{0.2}{1-0} = \mathbf{11.31^\circ}$$

2 Coefficiente di Mononobe–Okabe (θ = α = 0)

$$\cos^2(30^\circ - 11.31^\circ) = 0.8973 \qquad \cos\psi = 0.9806 \qquad \cos(15^\circ + 11.31^\circ) = 0.8964$$

$$\sqrt{\frac{\sin 45^\circ \sin(30^\circ - 11.31^\circ)}{\cos(15^\circ + 11.31^\circ)}} = \sqrt{0.2528} = 0.5028$$

$$K'_a = \frac{0.8973}{0.9806(0.8964)(1+0.5028)^2} = \mathbf{0.4520}$$

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

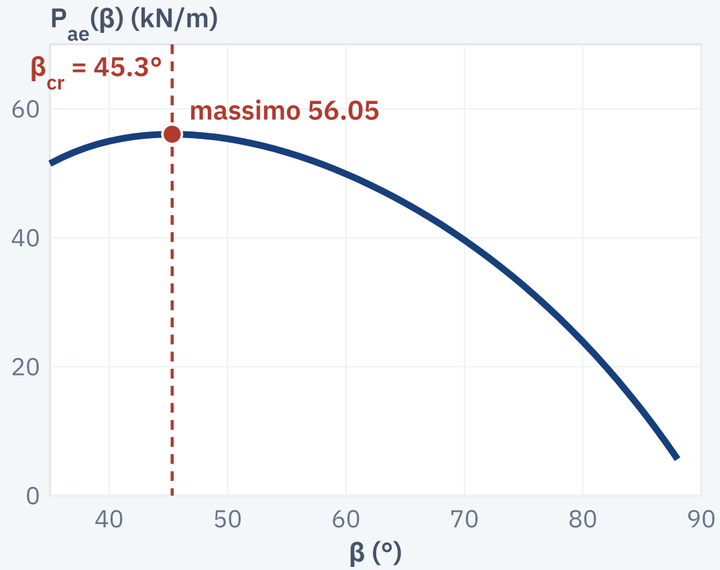
3 Forza dinamica

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2(1-k_v)K'_a$$
$$= \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(1-0)(0.4520) = \mathbf{56.05}\ \mathrm{kN/m}$$

4 Cuneo critico (vertice dei cunei di tentativo)

$$\beta_{cr} = \mathbf{45.3}^\circ\ (\text{con l'orizzontale})$$

P_{ae} = **56.05 kN/m**; la forza statica di Coulomb (K_a = 0.3014) era 37.38 kN/m: il sisma l'ha **aumentata del 50%**. Il cuneo critico forma un angolo di 45.3° con l'orizzontale.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Accelerazione orizzontale critica

TEORIA

Il sin(φ′ − α − ψ) sotto radice quadrata non è reale quando φ′ − α − ψ < 0: **nessun cuneo può essere in equilibrio**, indipendentemente dal comportamento del muro. Il terrapieno è stabile solo alla seguente condizione:

$$\alpha \leq \varphi' - \psi$$

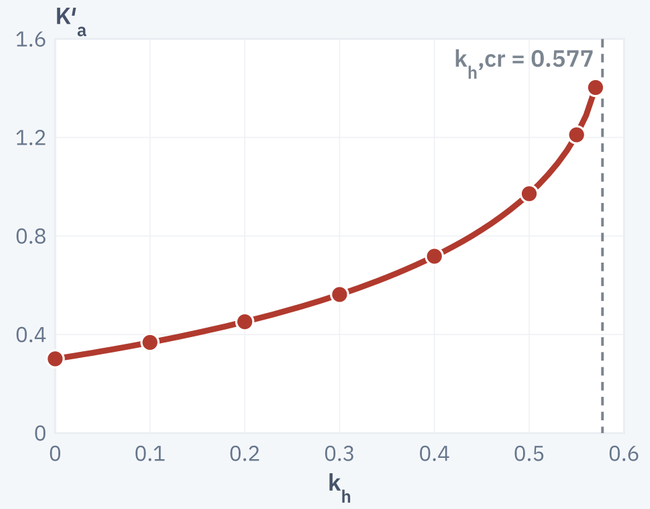
Per un terrapieno orizzontale ciò richiede ψ ≤ φ′, ossia l'accelerazione orizzontale non può superare:

$$k_{h(cr)} = (1 - k_v)\tan\varphi' \qquad (\alpha \neq 0 :\ \tan(\varphi' - \alpha))$$

Avvicinandosi al limite K'_a aumenta molto rapidamente ($k_{h,cr}$ = 0.577 per φ′ = 30°).

Se il modulo k_h supera il limite, il calcolo si interrompe con un messaggio.

K'_a – k_h (φ′ = 30°, δ′ = 15°)



Traccia

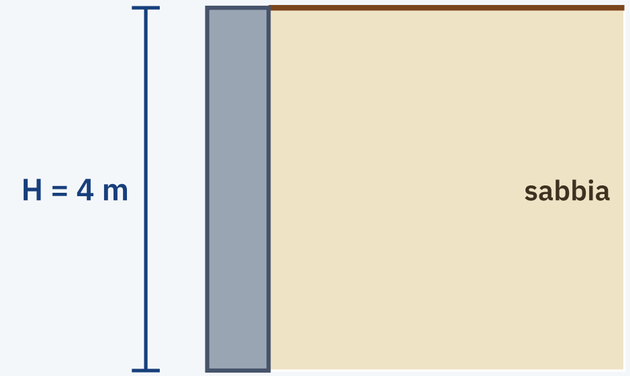
ESEMPIO

Dati

Muro e terreno	**Muro dell'Esempio 1:** $H = 4$ **m,** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$, $k_v = 0$
Variabile	$k_h = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5;\ 0.55;\ 0.57$

RICHIESTO

Per ogni k_h: **ψ**, **K'_a** e **P_{ae}**; il k_h critico; il risultato per $k_h = 0.6$.

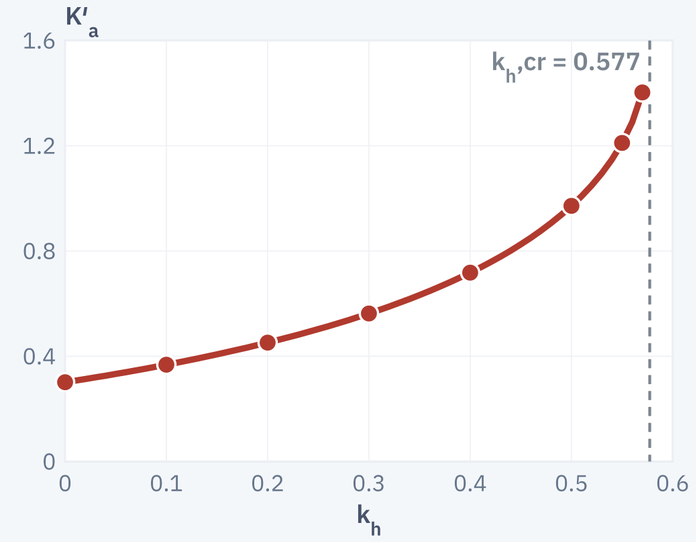


Soluzione

SOLUZIONE

1 $\psi = \tan^{-1} k_h$; $k_{h,cr} = \tan 30° = 0.577$

k_h	ψ (°)	K'_a	P_{ae} (kN/m)
0.00	0.0	0.301	37.4
0.10	5.7	0.368	45.6
0.20	11.3	0.452	56.1
0.30	16.7	0.563	69.8
0.40	21.8	0.718	89.0
0.50	26.6	0.972	120.5
0.55	28.8	1.211	150.1
0.57	29.7	1.403	174.0



Da k_h = 0 a 0.2, P_{ae} passa da 37.4 a 56.1 kN/m (50%), a 0.5 vale 120.5 kN/m (3.2 volte); avvicinandosi k_h a 0.57, K'_a cresce illimitatamente. **k_h = 0.6 > 0.577**: la radice quadrata non è reale, nessun cuneo è in equilibrio: il modulo interrompe il calcolo.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

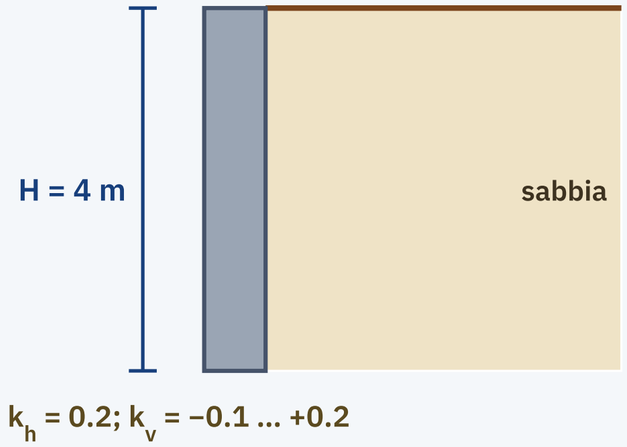
ESEMPIO

Dati

Muro e terreno	**Muro e terreno dell'Esempio 1; $k_h = 0.2$**
Variabile	$k_v = -0.1$ **(verso il basso),** 0**,** $+0.1$**,** $+0.2$ **(verso l'alto)**

RICHIESTO

Per ciascun k_V: **ψ**, **K'_a**, **$(1 - k_V)$** e **P_{ae}**; quale direzione è più sfavorevole?



Soluzione

SOLUZIONE

1 $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; $P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a = 124\,(1 - k_v)\,K'_a$

k_v	ψ (°)	K'_a	$1 - k_v$	P_{ae} (kN/m)
-0.1	10.30	0.4351	1.1	59.35
0.0	11.31	0.4520	1.0	56.05
0.1	12.53	0.4739	0.9	52.89
0.2	14.04	0.5032	0.8	49.92

k_v diretto verso il basso (–0.1) porta la forza a 59.3 kN/m (+6%), mentre k_v diretto verso l'alto = 0.2 la riduce a 49.9 kN/m. Sebbene ψ aumenti con k_v diretto verso l'alto, il fattore $(1 - k_v)$ risulta dominante. In pratica si assume $k_v = \pm 0.5\,k_h$ scegliendo la direzione che fornisce la forza maggiore.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Seed e Whitman (1970)

TEORIA

L'analisi di Mononobe–Okabe fornisce l'intensità e la direzione della forza, **ma non dove agisce**. Seed e Whitman separano la forza nella componente statica di Coulomb e nell'incremento sismico:

$$P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$$

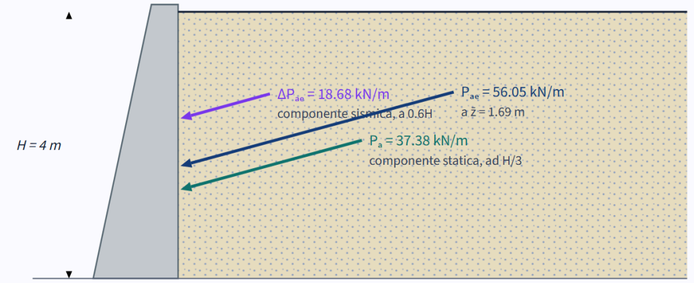
$$\bar{z} = \frac{P_a \dfrac{H}{3} + \Delta P_{ae}\,(0.6H)}{P_{ae}}$$

P_a (con gli stessi δ′, θ, α di ½K_aγH^2) agisce a **H/3** sopra la base; ΔP_{ae} agisce a **0.6H** (il diagramma triangolare è un triangolo rovesciato che si restringe verso la base).

La risultante è ancora inclinata di δ′ rispetto alla normale al paramento.

Talvolta l'incremento è assunto a metà altezza; 0.6H fornisce un momento ribaltante maggiore e viene adottato.

STATICO + INCREMENTO SISMICO



Traccia

ESEMPIO

Dati

Muro e sisma

Muro dell'Esempio 1: $H = 4$ **m,** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$, $k_h = 0.2$

RICHIESTO

P_a, ΔP_{ae} e **$\bar{z}$**; $\bar{z}$ se ΔP_{ae} è assunto a metà altezza.

Soluzione

SOLUZIONE

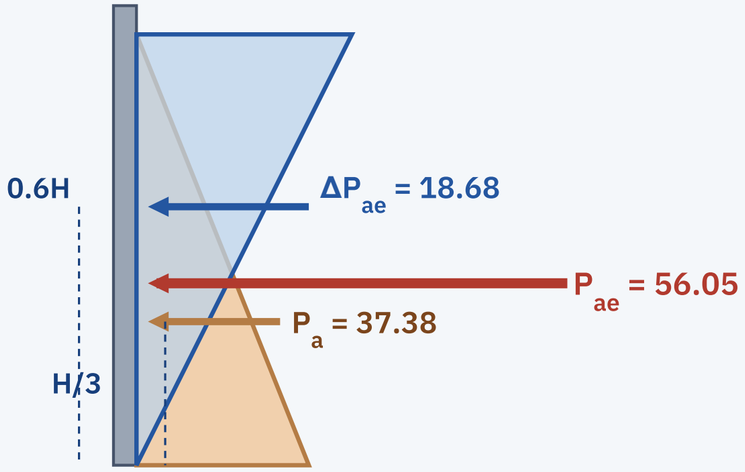
1 Forza statica (K_a = 0.3014) e incremento sismico

$$P_a = \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(0.3014) = 37.38\ \text{kN/m}$$

$$\Delta P_{ae} = P_{ae} - P_a = 56.05 - 37.38 = \mathbf{18.68}\ \text{kN/m}$$

2 Altezza di applicazione (dalla base)

$$\bar{z} = \frac{37.38(4/3) + 18.68(2.4)}{56.05} = \mathbf{1.69}\ \text{m}$$



$\bar{z}$ = **1.69 m** (nel caso statico era 1.33 m). Se l'incremento fosse stato assunto a metà altezza (2.0 m), si otterrebbe $\bar{z}$ = 1.56 m: l'ipotesi 0.6H sposta la forza verso l'alto e **aumenta il momento ribaltante**.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

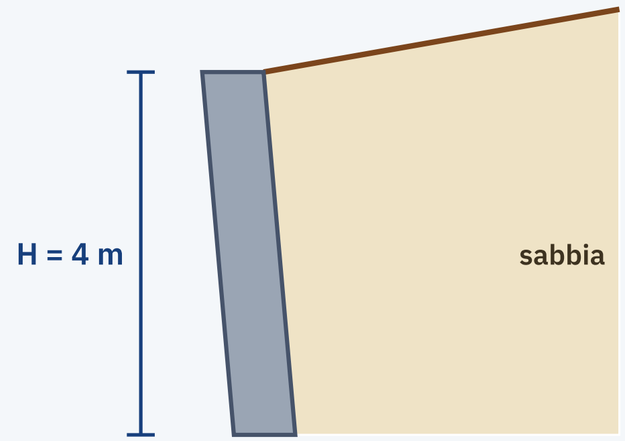
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 4$ **m; paramento inclinato di** $\theta = 5°$ **rispetto alla verticale**
Terreno di riporto	**inclinazione del piano di campagna** $\alpha = 10°$ **;** $\gamma = 15\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°,\ \delta' = 15°$
Sisma	$k_h = 0.15,\ k_v = 0$

RICHIESTO

ψ, **K′$_a$**, **P$_{ae}$**, ΔP$_{ae}$, **z̄**; verifica del limite di equilibrio.



γ = 15, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k$_h$ = 0.15

Soluzione

SOLUZIONE

1 Angolo sismico e limite di equilibrio

$$\psi = \tan^{-1} 0.15 = \mathbf{8.53}^\circ \qquad k_{h(cr)} = \tan 20^\circ = 0.364 > 0.15$$

2 Coefficiente e forza (K_a statico = 0.3872)

$$K'_a(\theta = 5^\circ, \alpha = 10^\circ, \psi = 8.53^\circ) = \mathbf{0.5435}$$

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}(15)(4)^2(0.5435) = \mathbf{65.22}\ \text{kN/m} \qquad P_a = 46.46\ \text{kN/m}$$

3 Altezza di applicazione del carico

$$\Delta P_{ae} = 18.76\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \frac{46.46(1.33) + 18.76(2.4)}{65.22} = \mathbf{1.64}\ \text{m}$$

P_{ae} = **65.22 kN/m**, a 1.64 m sopra la base; cuneo critico 44.2°; la forza sismica l'ha incrementata del 40%.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Estensione del modulo

TEORIA

Il **sovraccarico** q si aggiunge anche all'inerzia di ciascun cuneo insieme al suo peso; il cuneo critico non cambia:

$$q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} \qquad P_{ae} = (1-k_v)K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right)$$

In presenza di falda freatica l'acqua interstiziale si muove insieme al terreno (**vincolata**, terrapieno a grana fine) oppure non si muove (**libera**, k > 5·10⁻⁴ m/s). L'inerzia è portata dalla massa satura o secca, la tensione dal peso immerso; sott'acqua l'angolo sismico aumenta:

$$\tan\psi_w = \frac{\gamma_{sat}}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{(vincolata)} \qquad \tan\psi_w = \frac{\gamma_d}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{(libera)}$$

$$p_{wd} = \tfrac{7}{8}k_h\gamma_w\sqrt{d_w z'} \qquad P_{wd} = \tfrac{7}{12}k_h\gamma_w d_w^2\ (0{,}4\,d_w\ \text{a quota, Westergaard})$$

Per l'acqua libera si aggiunge la pressione idrodinamica di Westergaard. Nel riempimento stratificato ciascuno strato è assunto con il proprio K'_a come $\sigma' = (1 - k_v)K'_{a,i}\sigma'_v\cos\theta$; la parte statica e ΔP_{ae} (0.6H) sono sommate separatamente.

PERCHÉ L'ACQUA È IMPORTANTE?

L'acqua amplifica l'angolo sismico ($\psi_W > \psi$) e, in aggiunta alla pressione idrostatica, introduce la **pressione idrodinamica (in condizioni libere)**.

Traccia

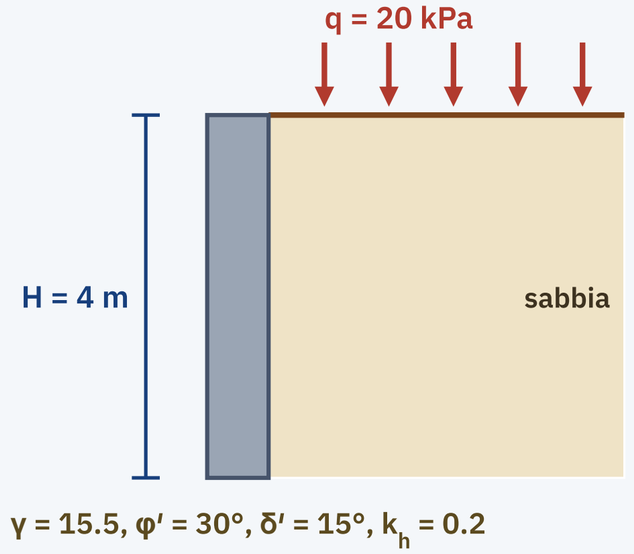
ESEMPIO

Dati

Muro e terreno	**Muro e terreno dell'Esempio 1 ($k_h = 0.2$)**
Sovraccarico	**$q = 20$ kPa (su superficie orizzontale)**

RICHIESTO

P_{ae} totale, parte statica, incremento sismico e **$\bar{z}$**.



Soluzione

SOLUZIONE

1 Tensione e forze equivalenti ($K'_a = 0.4520$)

$$q_e = q\cos 0^\circ / \cos 0^\circ = 20\ \text{kPa}$$

$$P_{ae} = K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right) = 0.4520(124 + 80) = 0.4520(204) = \mathbf{92.21}\ \text{kN/m}$$

2 Componente statica (Coulomb $K_a = 0.3014$) e incremento

$$P_a = K_a(204) = 61.49\ \text{kN/m} \qquad \Delta P_{ae} = 30.73\ \text{kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{(37.38)(1.33) + (24.11)(2.0) + (30.73)(2.4)}{92.21} = \mathbf{1.86}\ \text{m}$$

P_{ae} = **92.21 kN/m** (56.05 senza sovraccarico); $\bar{z}$ = **1.86 m**. La quota statica del sovraccarico agisce a H/2, il suo incremento sismico a 0.6H.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

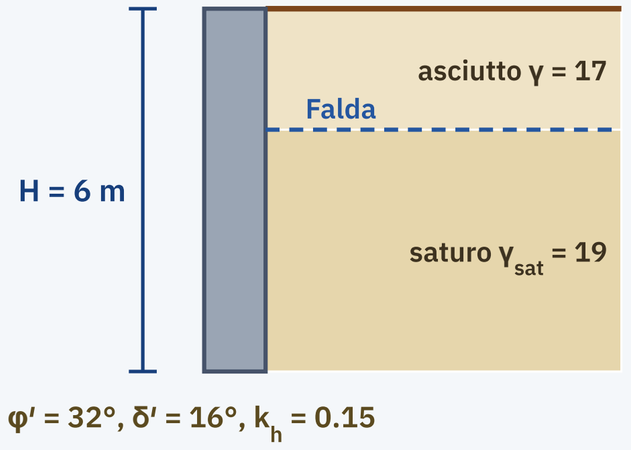
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 6$ **m, verticale; terrapieno orizzontale; nessun sovraccarico**
Terreno	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3}$ **(asciutto, 0–2 m),** $\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3}$ **(2–6 m);** $\varphi' = 32°,\ \delta' = 16°$
Sisma	$k_h = 0.15$, $k_v = 0$**; falda freatica a 2 m (dw = 4 m)**

RICHIESTO

La **P** e la **z̄** totali nel caso in cui l'acqua si muova con il terreno (**vincolata**) e in quello in cui non si muova (**libera**); confronto con il valore statico.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 k_h e ψ_w equivalenti in condizioni sommerse

$$\text{vincolata: } k_{h,w} = \frac{19}{19-9.81}(0.15) = 0.3101 \;\Rightarrow\; \psi_w = 17.23^\circ$$

$$\text{libera: } k_{h,w} = \frac{17}{19-9.81}(0.15) = 0.2775 \;\Rightarrow\; \psi_w = 15.51^\circ$$

2 Coefficienti (zona asciutta ψ = 8.53°)

$$K'_a(\text{asciutto}) = 0.3792 \qquad K'_a(\text{confinato, immerso}) = 0.5372 \qquad K'_a(\text{libero, immerso}) = 0.4991$$

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Forze (kN/m); $P_{wd} = (7/12)(0.15)(9.81)(4)^2 = 13.73$ kN/m, a $0.4 \cdot d_w = 1.6$ m al di sopra

	Terreno P_{ae}	Acqua idrostatica	Idrodinamica (Westergaard)	P totale	$\bar{z}$ (m)
Statica ($k_h = 0$)	67.74	78.48	–	144.80	1.71
Acqua confinata	125.46	78.48	–	202.06	2.24
Acqua non confinata	117.47	78.48	13.73	207.67	2.15

Il sisma ha incrementato la forza totale del **40%** (condizione impedita) e del **43%** (condizione libera) rispetto alla condizione statica; $\bar{z}$ è salito da 1.71 a 2.24 m. Nella condizione impedita la forza del terreno è maggiore (ψ_w grande), in quella libera si aggiunge la pressione idrodinamica; i totali sono molto vicini (202.1 e 207.7 kN/m).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Ambito della soluzione

TEORIA

Pseudostatico: il sisma è rappresentato da k_h, k_v costanti; manca la dipendenza dell'accelerazione dal tempo e dal movimento del muro (scorrimento di Newmark, analisi dinamica).

Cuneo piano, terrapieno asciutto incoerente (Mononobe–Okabe); il caso stratificato è un'estensione del modulo (non esiste una soluzione stratificata in forma chiusa); in un unico strato si riduce alla soluzione in forma chiusa, e per $k_h = k_v = 0$ al Coulomb stratificato.

Acqua: confinata (a grana fine) o libera ($k > 5 \cdot 10^{-4}$ m/s); in presenza di acqua libera si aggiunge la pressione idrodinamica di Westergaard.

Punto di applicazione Seed–Whitman: P_a a H/3, ΔP_{ae} a 0.6H; l'acqua agisce con il proprio braccio.

Per la pressione **passiva** si veda il modulo Passiva in condizioni sismiche (Subba Rao–Choudhury).

Sintesi

Punti chiave

Pseudostatico: $k_h W$, $k_v W$; $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; il cuneo sismico è il cuneo di Coulomb ruotato di ψ

$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$; K'_a cresce rapidamente con k_h; per $k_h = k_v = 0$ si ricade in Coulomb

Limite di equilibrio: $k_{h,cr} = (1 - k_v)\tan\varphi'$ ($\tan(\varphi' - \alpha)$ su pendio); se superato, non esiste soluzione

k_v: aumenta la forza diretta verso il basso; in pratica si sceglie il valore peggiore tra $\pm 0.5 k_h$

Posizione: $P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$; P_a a $H/3$, ΔP_{ae} a $0.6H$; $\bar{z} = [P_a(H/3) + \Delta P_{ae}(0.6H)]/P_{ae}$

Il **sovraccarico** $q_e = q\cos\theta/\cos(\theta - \alpha)$ viene aggiunto; in presenza di **acqua** ψ_w aumenta (confinata: γ_{sat}/γ', libera: γ_d/γ') e in acqua libera si aggiunge la pressione idrodinamica $(7/12)k_h\gamma_w d_w^2$

Bibliografia

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Mononobe, N. e Matsuo, H. (1929). On the determination of earth pressure during earthquakes. Proceedings, World Engineering Congress, Tokyo, 9, 177–185.

Okabe, S. (1926). General theory of earth pressure. Journal of the Japan Society of Civil Engineering, 12(1).

Seed, H.B. e Whitman, R.V. (1970). Design of earth retaining structures for dynamic loads. Specialty Conference on Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth Retaining Structures, ASCE, 103–147.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1933). Water pressures on dams during earthquakes. Transactions ASCE, 98, 418–433.

NOTA

Tutti gli esempi numerici sono stati prodotti con il motore di calcolo del modulo stesso; il modulo restituisce gli stessi valori. Il modulo si apre con il muro dell'Esempio 1 ($k_h = 0.2$, $\delta' = 15°$).

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

Inserire in GeoTerva il proprio muro, i coefficienti sismici k_h, k_v, il sovraccarico, gli strati e la falda freatica; il modulo fornisce insieme P_{ae}, l'altezza del punto di applicazione e il cuneo critico.

Aprire il modulo → **Pagina di teoria →**

Aprire dallo smartphone
I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com