Présentation de cours de géotechnique · Poussée et butée des terres

Poussée des terres sismique de Mononobe–Okabe

Cours : forces pseudo-statiques horizontale et verticale exercées pendant un séisme sur le coin situé derrière le mur, coefficient de poussée active de Mononobe–Okabe, limite d'équilibre, ligne d'action ; surcharge et nappe phréatique ; exemple de calcul pour chaque thème.

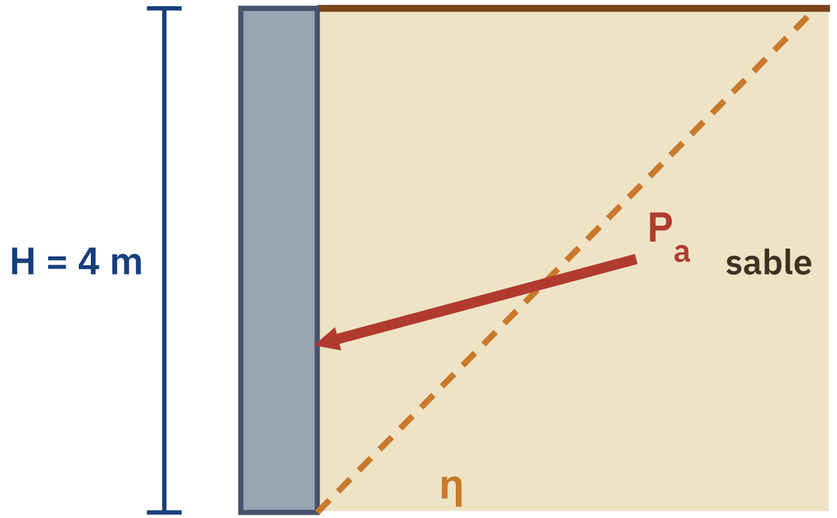
Coin pseudo-statique

$\psi = \tan^{-1} k_h/(1 - k_v)$

Seed – Whitman

Surcharge · eau

Équilibre limite



Basé sur la page de théorie de GeoTerva · geoterva.com

Que verrons-nous dans ce cours ?

- Représenter le séisme par des forces **pseudo-statiques** horizontale (k_hW) et verticale (k_vW)
- **Angle sismique** ψ et coefficient de Mononobe–Okabe $\mathbf{K'_a}$; $P_{ae} = ½\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$
- **Limite d'équilibre** : si $k_{h,cr} = (1 - k_v) \tan \varphi'$ est dépassé, aucun coin ne reste en équilibre
- La détermination du **point d'application** de la force par Seed–Whitman : $P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$, avec ΔP_{ae} à 0.6H
- Tenir compte de la surcharge et des **eaux souterraines** (solidaires ou non du mouvement du sol)
- Voir comment la force varie lorsque k_h, k_v et la géométrie changent

DÉROULÉ DU COURS

Chaque thème est traité en **trois étapes** :

1 · **Théorie** : quelle est la règle, pourquoi en est-il ainsi ?

2 · **Énoncé** : données et à déterminer

3 · **Solution** : étape par étape, avec les valeurs numériques

Les forces sont données par unité de longueur de mur (kN/m) ; k_h, k_v sont les rapports de l'accélération à g ; k_v est positif vers le haut.

Okabe (1926) et Mononobe–Matsuo (1929)

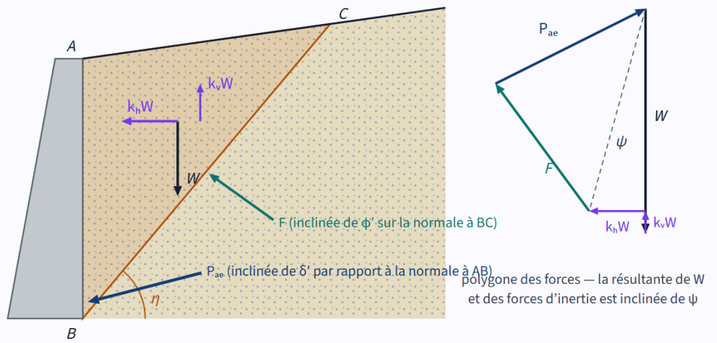
THÉORIE

En cas de séisme, le coin situé derrière le mur est accéléré. La méthode pseudo-statique représente la secousse par deux **forces de volume constantes** agissant sur le coin de Coulomb :

k_hW : horizontale, dirigée vers le mur (k_h = accélération horizontale / g)

k_vW : verticale (ici vers le haut ; réduit le poids)

W, F (inclinée de φ′) et P_{ae} (inclinée de δ′) sont comme dans Coulomb.



La somme de W, k_hW et k_vW est une force déviée de la verticale de l'angle sismique **ψ** ; autrement dit, le coin sismique est un coin de Coulomb dans lequel la pesanteur est inclinée de ψ (face du mur θ + ψ, remblai α + ψ) :

$$\psi = \tan^{-1}\frac{k_h}{1-k_v} \qquad W' = \frac{W(1-k_v)}{\cos\psi}$$

La force active est encore la **plus grande** des coins d'essai.

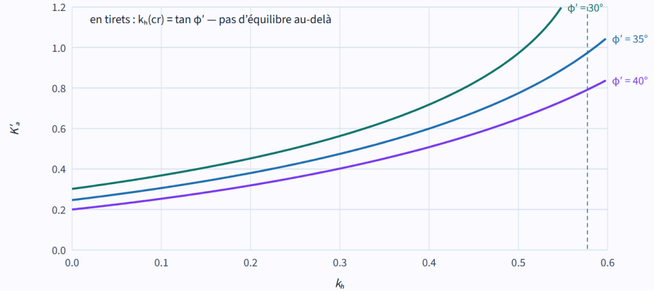
Force active dynamique

THÉORIE

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 (1 - k_v) K'_a$$

$$K'_a = \frac{\cos^2(\varphi' - \theta - \psi)}{\cos\psi \cos^2\theta \cos(\delta' + \theta + \psi)\left[1 + \sqrt{\dfrac{\sin(\varphi' + \delta')\sin(\varphi' - \alpha - \psi)}{\cos(\delta' + \theta + \psi)\cos(\theta - \alpha)}}\right]^2}$$

k_h	φ′ = 28°	30°	35°	40°	45°
0.1	0.396	0.368	0.306	0.253	0.207
0.2	0.485	0.452	0.380	0.319	0.267
0.3	0.604	0.563	0.474	0.402	0.340
0.4	0.778	0.718	0.599	0.508	0.433
0.5	1.115	0.972	0.774	0.648	0.552



Pour $k_h = k_v = 0$, ψ = 0 et K'_a est le K_a de Coulomb. Tableau : θ = α = 0, δ′ = φ′/2.

K'_a croît rapidement avec k_h ; il augmente indéfiniment à l'approche de la limite.

Énoncé

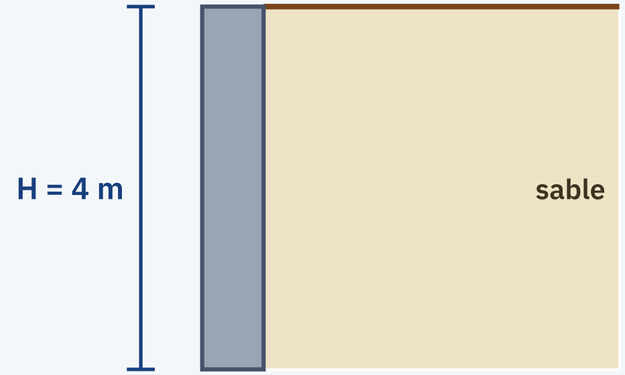
EXEMPLE

Données

Mur	$H = 4$ **m, vertical ; remblai horizontal ; pas de surcharge**
Sol	**sable sec :** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ,\ \delta' = 15^\circ$
Séisme	$k_h = 0.2,\ k_v = 0$

À DÉTERMINER

ψ, K′a, Pae et coin critique ; comparaison avec Coulomb statique. Le module s'ouvre sur ce mur.



γ = 15.5 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k_h = 0.2

Solution (1/2)

SOLUTION

1 Angle sismique

$$\psi = \tan^{-1}\frac{0.2}{1-0} = \mathbf{11.31^\circ}$$

2 Coefficient de Mononobe–Okabe (θ = α = 0)

$$\cos^2(30^\circ - 11.31^\circ) = 0.8973 \qquad \cos\psi = 0.9806 \qquad \cos(15^\circ + 11.31^\circ) = 0.8964$$

$$\sqrt{\frac{\sin 45^\circ \sin(30^\circ - 11.31^\circ)}{\cos(15^\circ + 11.31^\circ)}} = \sqrt{0.2528} = 0.5028$$

$$K'_a = \frac{0.8973}{0.9806(0.8964)(1+0.5028)^2} = \mathbf{0.4520}$$

Solution (2/2)

SOLUTION

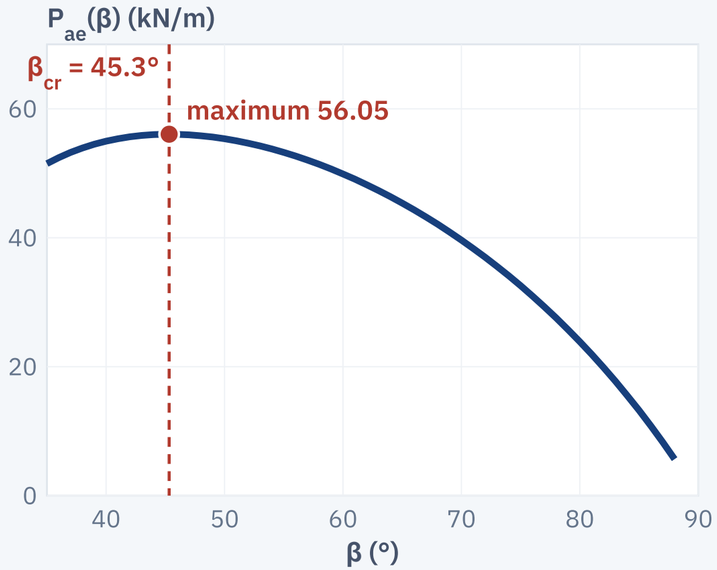
3 Force dynamique

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2(1-k_v)K'_a$$
$$= \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(1-0)(0.4520) = \mathbf{56.05}\ \mathrm{kN/m}$$

4 Coin critique (sommet des coins d'essai)

$$\beta_{cr} = \mathbf{45.3}^\circ\ (\text{par rapport à l'horizontale})$$

P_{ae} = **56.05 kN/m** ; la force statique de Coulomb (K_a = 0.3014) était de 37.38 kN/m : la force sismique l'a **augmentée de 50 %**. Le coin critique fait 45.3° avec l'horizontale.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Accélération horizontale critique

THÉORIE

Le terme sin(φ′ – α – ψ) sous la racine carrée n'est pas réel lorsque φ′ – α – ψ < 0 : **aucun coin ne peut être en équilibre**, quel que soit le comportement du mur. Le remblai n'est stable que sous la condition suivante :

$$\alpha \leq \varphi' - \psi$$

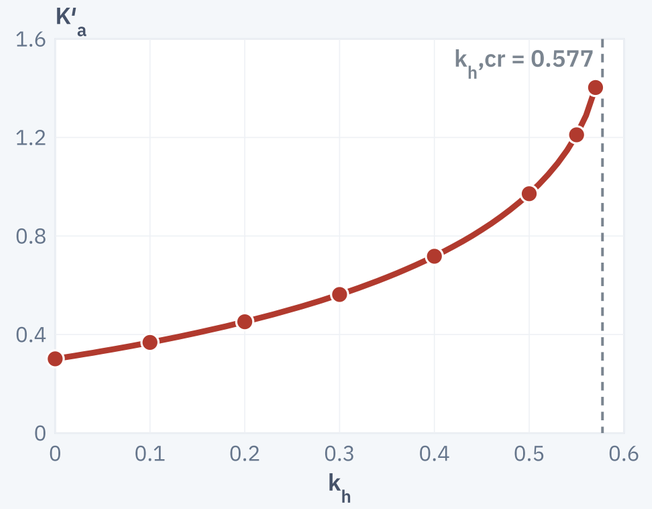
Pour un remblai horizontal, cela exige ψ ≤ φ′, c'est-à-dire que l'accélération horizontale ne peut dépasser :

$$k_{h(cr)} = (1 - k_v)\tan\varphi' \qquad (\alpha \neq 0 :\ \tan(\varphi' - \alpha))$$

À l'approche de la limite, K'_a augmente très rapidement ($k_{h,cr}$ = 0.577 pour φ′ = 30°).

Si le module k_h dépasse la limite, le calcul s'arrête avec un message.

K'_a – k_h (φ′ = 30°, δ′ = 15°)



Énoncé

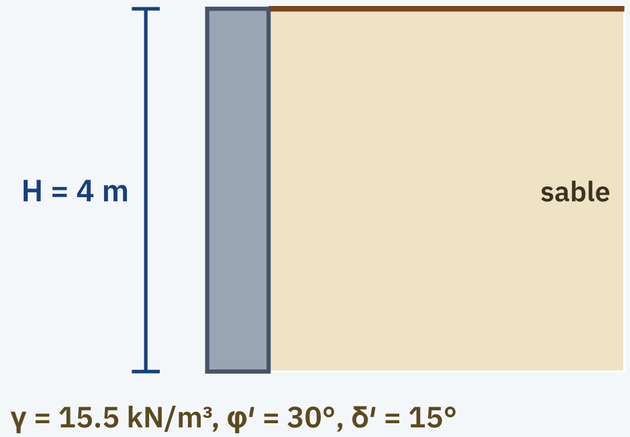
EXEMPLE

Données

Mur et sol	**Mur de l'exemple 1 :** $H = 4$ **m,** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$, $k_v = 0$
Variable	$k_h = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5;\ 0.55;\ 0.57$

À DÉTERMINER

Pour chaque k_h : **ψ**, **K'_a** et **P_{ae}** ; k_h critique ; résultat pour $k_h = 0.6$.

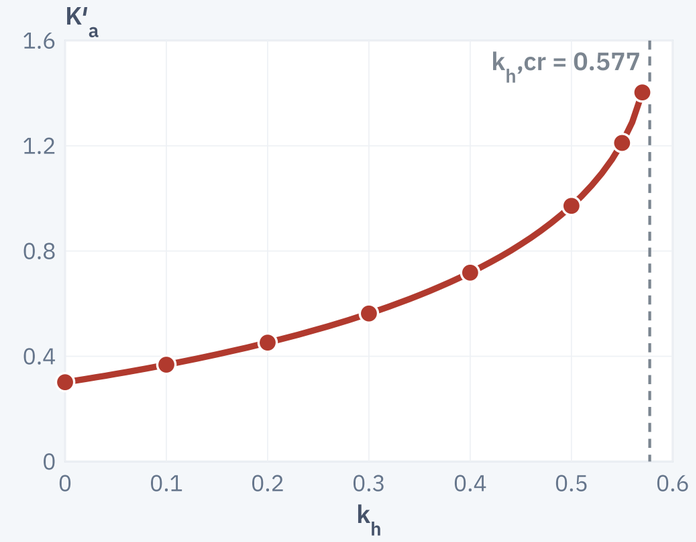


Solution

SOLUTION

1 $\psi = \tan^{-1} k_h$; $k_{h,cr} = \tan 30° = 0.577$

k_h	ψ (°)	K'_a	P_{ae} (kN/m)
0.00	0.0	0.301	37.4
0.10	5.7	0.368	45.6
0.20	11.3	0.452	56.1
0.30	16.7	0.563	69.8
0.40	21.8	0.718	89.0
0.50	26.6	0.972	120.5
0.55	28.8	1.211	150.1
0.57	29.7	1.403	174.0



De k_h = 0 à 0.2, P_{ae} passe de 37.4 à 56.1 kN/m (50 %) ; à 0.5, il atteint 120.5 kN/m (3.2 fois) ; lorsque k_h tend vers 0.57, K'_a croît sans limite. **k_h = 0.6 > 0.577** : la racine carrée n'est pas réelle, aucun coin n'est en équilibre : le module interrompt le calcul.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

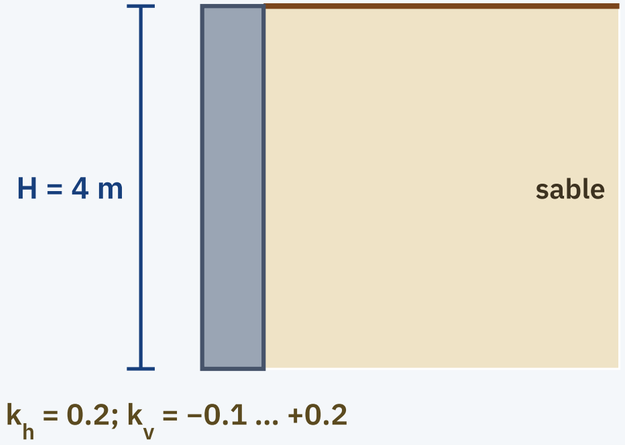
EXEMPLE

Données

Mur et sol	**Mur et sol de l'exemple 1 ; $k_h = 0.2$**
Variable	$k_v = -0.1$ **(vers le bas),** 0**,** $+0.1$**,** $+0.2$ **(vers le haut)**

À DÉTERMINER

Pour chaque k_v : **ψ**, **K'_a**, **$(1 - k_v)$** et **P_{ae}** ; quel sens est le plus défavorable ?



Solution

SOLUTION

1 $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; $P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a = 124\,(1 - k_v)\,K'_a$

k_v	ψ (°)	K'_a	$1 - k_v$	P_{ae} (kN/m)
-0.1	10.30	0.4351	1.1	59.35
0.0	11.31	0.4520	1.0	56.05
0.1	12.53	0.4739	0.9	52.89
0.2	14.04	0.5032	0.8	49.92

Un **k_v dirigé vers le bas (–0.1)** porte la force à 59.3 kN/m (+6 %), tandis qu'un k_v = 0.2 dirigé vers le haut la ramène à 49.9 kN/m. Bien que ψ augmente avec un k_v ascendant, le facteur $(1 - k_v)$ l'emporte. En pratique, avec $k_v = \pm 0.5\,k_h$, on retient le sens qui donne la force la plus grande.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Seed et Whitman (1970)

THÉORIE

L'analyse de Mononobe–Okabe fournit l'intensité et la direction de la force, mais **ne donne pas son point d'application**. Seed et Whitman décomposent la force en la force statique de Coulomb et un incrément sismique :

$$P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$$

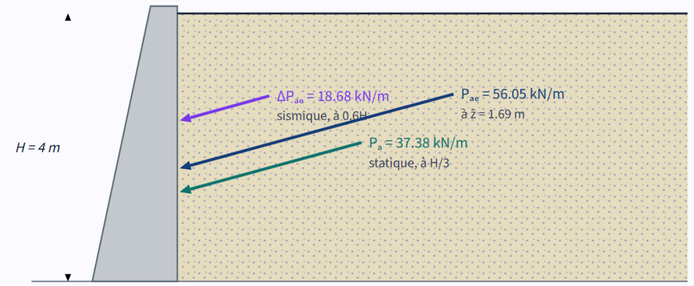
$$\bar{z} = \frac{P_a \dfrac{H}{3} + \Delta P_{ae}\,(0.6H)}{P_{ae}}$$

P_a (avec les mêmes δ′, θ, α, soit ½K_aγH^2) s'exerce à **H/3** au-dessus de la base ; ΔP_{ae} à **0.6H** (le diagramme triangulaire est un triangle inversé qui se resserre vers la base).

La résultante est de nouveau inclinée de δ′ par rapport à la normale à l'écran.

L'accroissement est parfois pris à mi-hauteur ; 0.6H donne un moment de renversement plus grand et est retenu.

STATIQUE + INCRÉMENT SISMIQUE



Énoncé

EXEMPLE

Données

Mur et séisme

Mur de l'exemple 1 : $H = 4$ **m,** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°,\ \delta' = 15°,\ k_h = 0.2$

À DÉTERMINER

P_a, ΔP_{ae} et **$\bar{z}$** ; $\bar{z}$ lorsque ΔP_{ae} est appliqué à mi-hauteur.

Solution

SOLUTION

1 Effort statique (K_a = 0.3014) et incrément sismique

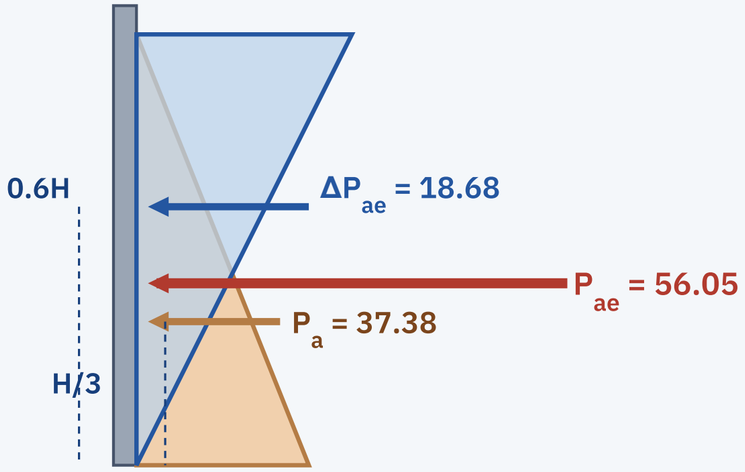
$$P_a = \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(0.3014) = 37.38\ \text{kN/m}$$

$$\Delta P_{ae} = P_{ae} - P_a = 56.05 - 37.38 = \mathbf{18.68}\ \text{kN/m}$$

2 Hauteur d'application (depuis la base)

$$\bar{z} = \frac{37.38(4/3) + 18.68(2.4)}{56.05} = \mathbf{1.69}\ \text{m}$$

$\bar{z}$ = **1.69 m** (1.33 m en statique). Si l'incrément avait été pris à mi-hauteur (2.0 m), on aurait obtenu $\bar{z}$ = 1.56 m : l'hypothèse de 0.6H relève la force et **augmente le moment de renversement**.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

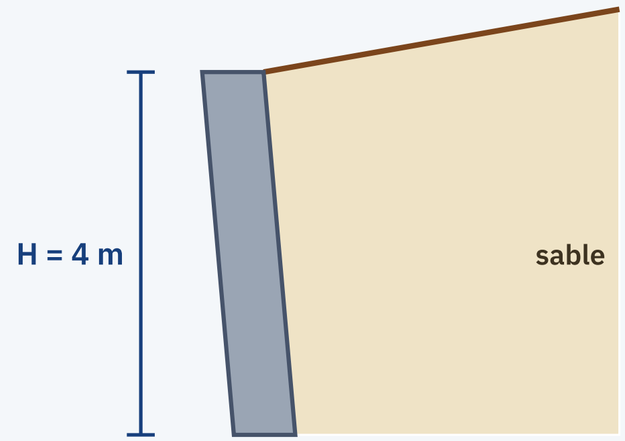
EXEMPLE

Données

Mur	$H = 4$ **m ; parement incliné de** $\theta = 5°$ **par rapport à la verticale**
Remblai	**pente du terrain** $\alpha = 10°$ **;** $\gamma = 15\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°,\ \delta' = 15°$
Séisme	$k_h = 0.15,\ k_v = 0$

À DÉTERMINER

ψ, **K′a**, **Pae**, ΔPae, **z̄** ; vérification de la limite d'équilibre.



γ = 15, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k_h = 0.15

Solution

SOLUTION

1 Angle sismique et limite d'équilibre

$$\psi = \tan^{-1} 0.15 = \mathbf{8.53}^\circ \qquad k_{h(cr)} = \tan 20^\circ = 0.364 > 0.15$$

2 Coefficient et force (K_a statique = 0.3872)

$$K'_a(\theta = 5^\circ, \alpha = 10^\circ, \psi = 8.53^\circ) = \mathbf{0.5435}$$

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}(15)(4)^2(0.5435) = \mathbf{65.22}\ \text{kN/m} \qquad P_a = 46.46\ \text{kN/m}$$

3 Hauteur d'application de la charge

$$\Delta P_{ae} = 18.76\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \frac{46.46(1.33) + 18.76(2.4)}{65.22} = \mathbf{1.64}\ \text{m}$$

P_{ae} = **65.22 kN/m**, à 1.64 m au-dessus de la base ; coin critique 44.2° ; le séisme a augmenté la force de 40 %.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Extension du module

THÉORIE

La **surcharge** q est ajoutée au poids de chaque coin ainsi qu'à son inertie ; le coin critique ne change pas :

$$q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} \qquad P_{ae} = (1-k_v)K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right)$$

En présence de la nappe, l'eau interstitielle se déplace avec le sol (**entraînée**, remblai à grains fins) ou ne se déplace pas (**libre**, k > 5·10⁻⁴ m/s). L'inertie est portée par la masse saturée ou sèche, la contrainte par le poids déjaugé ; sous l'eau, l'angle sismique augmente :

$$\tan\psi_w = \frac{\gamma_{sat}}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{(entraînée)} \qquad \tan\psi_w = \frac{\gamma_d}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{(libre)}$$

$$p_{wd} = \tfrac{7}{8}k_h\gamma_w\sqrt{d_w z'} \qquad P_{wd} = \tfrac{7}{12}k_h\gamma_w d_w^2\ (0{,}4\,d_w\ \text{à la hauteur, Westergaard})$$

Pour l'eau libre, la pression hydrodynamique de Westergaard est ajoutée. Dans un remblai stratifié, chaque couche est prise avec son propre K'_a selon $\sigma' = (1 - k_v)K'_{a,i}\sigma'_v\cos\theta$; la part statique et ΔP_{ae} (0.6H) sont sommées séparément.

POURQUOI L'EAU EST-ELLE IMPORTANTE ?

L'eau augmente l'angle sismique ($\psi_w > \psi$) et apporte, en plus de la pression hydrostatique, une **pression hydrodynamique (cas de l'eau libre)**.

Énoncé

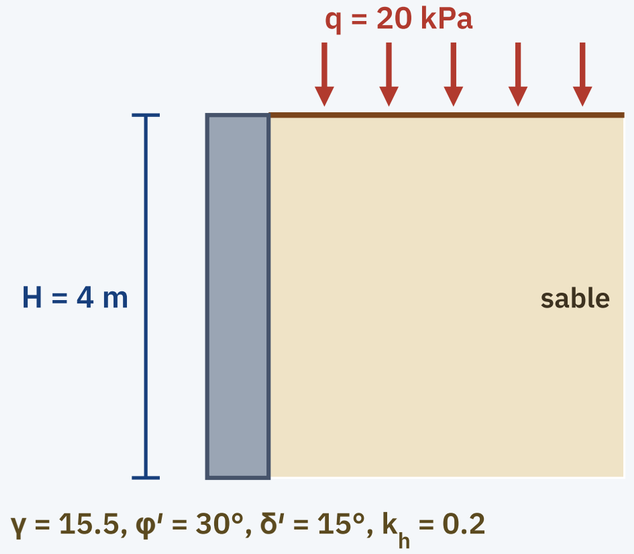
EXEMPLE

Données

Mur et sol	**Mur et sol de l'exemple 1 ($k_h = 0.2$)**
Surcharge	**$q = 20$ kPa (sur surface horizontale)**

À DÉTERMINER

P_{ae} total, part statique, incrément sismique et **$\bar{z}$**.



Solution

SOLUTION

1 Contraintes et forces équivalentes ($K'_a = 0.4520$)

$$q_e = q\cos 0^\circ / \cos 0^\circ = 20\ \text{kPa}$$

$$P_{ae} = K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right) = 0.4520(124 + 80) = 0.4520(204) = \mathbf{92.21}\ \text{kN/m}$$

2 Part statique (Coulomb $K_a = 0.3014$) et accroissement

$$P_a = K_a(204) = 61.49\ \text{kN/m} \qquad \Delta P_{ae} = 30.73\ \text{kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{(37.38)(1.33) + (24.11)(2.0) + (30.73)(2.4)}{92.21} = \mathbf{1.86}\ \text{m}$$

P_{ae} = **92.21 kN/m** (56.05 sans surcharge) ; $\bar{z}$ = **1.86 m**. La part statique de la surcharge s'exerce à H/2, son incrément sismique à 0.6H.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

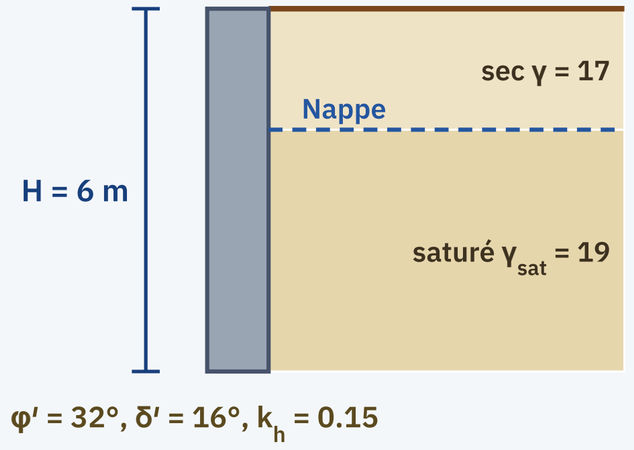
EXEMPLE

Données

Mur	$H = 6$ **m, vertical ; remblai horizontal ; pas de surcharge**
Sol	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3}$ **(sec, 0–2 m),** $\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3}$ **(2–6 m) ;** $\varphi' = 32^\circ,\ \delta' = 16^\circ$
Séisme	$k_h = 0.15,\ k_v = 0$ **; niveau de la nappe à 2 m (dw = 4 m)**

À DÉTERMINER

P total et **z̄** pour le cas où l'eau se déplace avec le sol (**entraînée**) et celui où elle ne se déplace pas (**libre**) ; comparaison avec la valeur statique.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 k_h et ψ_w équivalents sous l'eau

$$\text{entraînée} : k_{h,w} = \frac{19}{19 - 9.81}(0.15) = 0.3101 \;\Rightarrow\; \psi_w = 17.23^\circ$$

$$\text{libre} : k_{h,w} = \frac{17}{19 - 9.81}(0.15) = 0.2775 \;\Rightarrow\; \psi_w = 15.51^\circ$$

2 Coefficients (zone sèche ψ = 8.53°)

$$K'_a(\text{sec}) = 0.3792 \qquad K'_a(\text{entraînée, sous l'eau}) = 0.5372 \qquad K'_a(\text{libre, sous l'eau}) = 0.4991$$

Solution (2/2)

SOLUTION

3 Forces (kN/m) ; $P_{wd} = (7/12)(0.15)(9.81)(4)^2 = 13.73$ kN/m, à $0.4 \cdot d_w = 1.6$ m au-dessus

	Sol P_{ae}	Eau hydrostatique	Hydrodynamique (Westergaard)	P total	$\bar{z}$ (m)
Statique ($k_h = 0$)	67.74	78.48	–	144.80	1.71
Eau interstitielle entraînée	125.46	78.48	–	202.06	2.24
Eau interstitielle libre	117.47	78.48	13.73	207.67	2.15

La force sismique totale a augmenté de **40 %** (eau entraînée) et de **43 %** (eau libre) par rapport au cas statique ; $\bar{z}$ s'est élevé de 1.71 à 2.24 m. Dans le cas de l'eau entraînée, la force du sol est plus grande (ψ_w grand), tandis que pour l'eau libre la pression hydrodynamique s'ajoute ; les totaux sont très proches (202.1 et 207.7 kN/m).

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Étendue de la solution

THÉORIE

Pseudo-statique : le séisme est représenté par des k_h et k_v constants ; la dépendance de l'accélération vis-à-vis du temps et du mouvement du mur (glissement de Newmark, analyse dynamique) n'est pas prise en compte.

Coin plan, remblai sec sans cohésion (Mononobe–Okabe) ; le cas multicouche est une extension du module (il n'existe pas de solution multicouche fermée) ; avec une seule couche, il se ramène à la solution fermée et, pour $k_h = k_v = 0$, à la méthode de Coulomb multicouche.

Eau : entraînée (sol à grains fins) ou libre ($k > 5 \cdot 10^{-4}$ m/s) ; pour l'eau libre, la pression hydrodynamique de Westergaard est ajoutée.

Point d'application de Seed–Whitman : P_a à H/3, ΔP_{ae} à 0.6H ; l'eau agit avec son propre bras de levier.

Pour la pression **passive**, voir le module Butée en cas de séisme (Subba Rao–Choudhury).

Synthèse

Points à retenir

Pseudo-statique : $k_h W$, $k_v W$; $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; coin sismique = coin de Coulomb tourné de ψ

$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$; K'_a augmente rapidement avec k_h ; pour $k_h = k_v = 0$, on retrouve Coulomb

Limite d'équilibre : $k_{h,cr} = (1 - k_v) \tan \varphi'$ ($\tan(\varphi' - \alpha)$ sur une pente) ; si elle est dépassée, il n'y a pas de solution

k_v : augmente la force dirigée vers le bas ; en pratique, on retient la plus défavorable des valeurs $\pm 0.5 k_h$

Position : $P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$; P_a à H/3, ΔP_{ae} à 0.6H ; $\bar{z} = [P_a(H/3) + \Delta P_{ae}(0.6H)]/P_{ae}$

La **surcharge** $q_e = q \cos\theta/\cos(\theta - \alpha)$ est ajoutée ; sous l'**eau**, ψ_w augmente (entraînée : γ_{sat}/γ', libre : γ_d/γ') et, en eau libre, la pression hydrodynamique $(7/12)k_h\gamma_w d_w^2$ est ajoutée

Références bibliographiques

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Mononobe, N. and Matsuo, H. (1929). On the determination of earth pressure during earthquakes. Proceedings, World Engineering Congress, Tokyo, 9, 177–185.

Okabe, S. (1926). General theory of earth pressure. Journal of the Japan Society of Civil Engineering, 12(1).

Seed, H.B. and Whitman, R.V. (1970). Design of earth retaining structures for dynamic loads. Specialty Conference on Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth Retaining Structures, ASCE, 103–147.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1933). Water pressures on dams during earthquakes. Transactions ASCE, 98, 418–433.

REMARQUE

Tous les exemples numériques sont produits avec le moteur de calcul propre au module ; le module donne les mêmes valeurs. Le module s'ouvre avec le mur de l'Exemple 1 ($k_h = 0.2$, $\delta' = 15°$).

Calculs géotechniques en ligne

De la théorie à la pratique

Saisir dans GeoTerva son propre mur, les coefficients sismiques k_h, k_v, la surcharge, les couches et la nappe phréatique ; le module fournit ensemble P_{ae}, la hauteur du point d'application et le coin critique.

Ouvrir sur smartphone
Les modules d'essai ne nécessitent pas d'inscription.

Ouvrir le module →

Page de théorie →

Si vous souhaitez les utiliser dans vos cours : info@geoterva.com