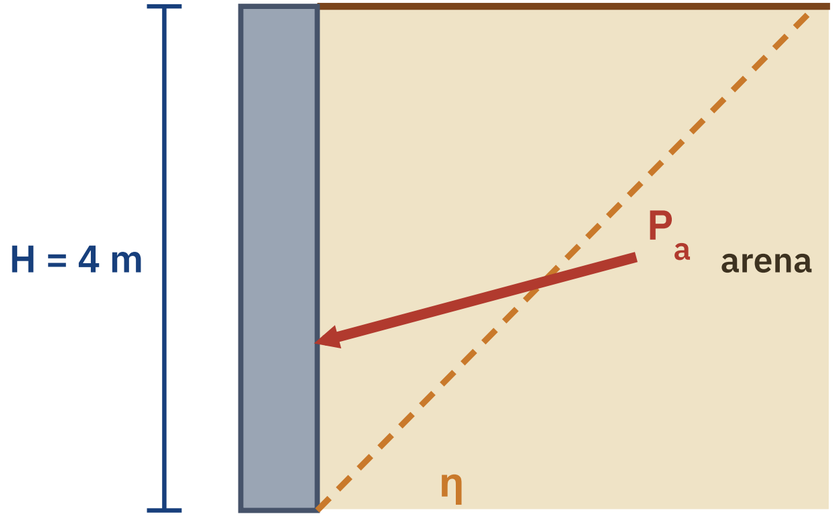
Presentación de clase de geotecnia · Empuje de tierras

Empuje sísmico de tierras de Mononobe–Okabe

Clase: fuerzas pseudoestáticas horizontal y vertical sobre la cuña tras el muro durante un sismo, coeficiente activo de Mononobe–Okabe, límite de equilibrio, línea de actuación; sobrecarga y agua subterránea; ejemplo resuelto en cada tema.

- Cuña pseudoestática
- $\psi = \tan^{-1} k_h/(1 - k_v)$
- Seed – Whitman
- Sobrecarga · agua
- Límite de equilibrio



Se basa en la página de teoría de GeoTerva · geoterva.com

Introducción

¿Qué aprenderemos en esta clase?

- Representar el sismo mediante fuerzas **pseudoestáticas** horizontal ($k_h W$) y vertical ($k_v W$)
- **Ángulo sísmico** ψ y coeficiente de Mononobe–Okabe $\mathbf{K'_a}$; $P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$
- **Límite de equilibrio**: si se supera $k_{h,cr} = (1 - k_v) \tan \varphi'$, ninguna cuña permanece en equilibrio
- La determinación de la **posición** de la fuerza con Seed–Whitman: $P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$, con ΔP_{ae} a 0.6H
- Tener en cuenta la sobrecarga y el **agua subterránea** (solidaria con el suelo o libre)
- Ver cómo cambia la fuerza al variar k_h, k_v y la geometría

DESARROLLO DE LA CLASE

Cada tema se desarrolla en **tres pasos**:

1 · **Teoría**: ¿cuál es la regla y por qué es así?

2 · **Enunciado**: datos y se pide

3 · **Solución**: paso a paso, con números

Las fuerzas se expresan por unidad de longitud de muro (kN/m); k_h, k_v son las relaciones de la aceleración a g; k_v es positivo hacia arriba.

Okabe (1926) y Mononobe–Matsuo (1929)

TEORÍA

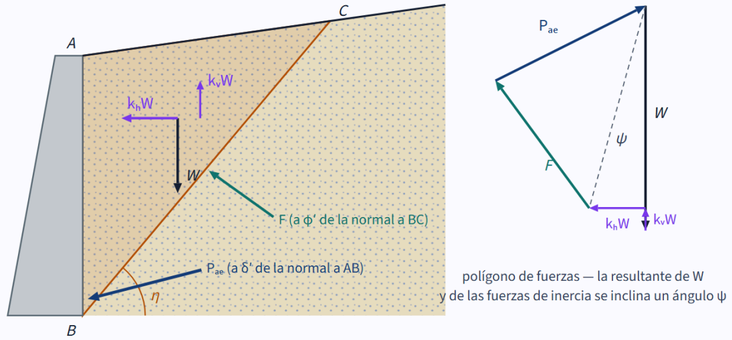
Durante un sismo, la cuña situada detrás del muro se acelera. El método pseudoestático representa la sacudida mediante dos **fuerzas másicas constantes** que actúan sobre la cuña de Coulomb:

- **k_hW**: horizontal, hacia el muro (k_h = aceleración horizontal / g)
- **k_vW**: vertical (aquí hacia arriba; reduce el peso)
- W, F (inclinada φ′) y P_{ae} (inclinada δ′) son iguales que en Coulomb.

La suma de W, k_hW y k_vW es una fuerza girada respecto de la vertical un ángulo sísmico **ψ**; es decir, la cuña sísmica es una cuña de Coulomb con la gravedad girada un ángulo ψ (paramento del muro θ + ψ, relleno α + ψ):

$$\psi = \tan^{-1}\frac{k_h}{1-k_v} \qquad W' = \frac{W(1-k_v)}{\cos\psi}$$

El empuje activo es, de nuevo, el **mayor** de los obtenidos con las cuñas de prueba.



polígono de fuerzas — la resultante de W y de las fuerzas de inercia se inclina un ángulo ψ

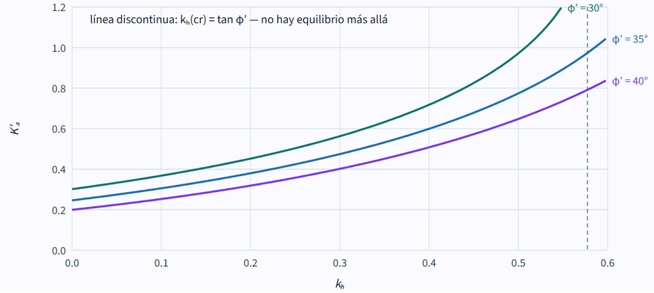
Fuerza activa dinámica

TEORÍA

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 (1 - k_v) K'_a$$

$$K'_a = \frac{\cos^2(\varphi' - \theta - \psi)}{\cos\psi \cos^2\theta \cos(\delta' + \theta + \psi)\left[1 + \sqrt{\dfrac{\sin(\varphi' + \delta')\sin(\varphi' - \alpha - \psi)}{\cos(\delta' + \theta + \psi)\cos(\theta - \alpha)}}\right]^2}$$

k_h	φ′ = 28°	30°	35°	40°	45°
0.1	0.396	0.368	0.306	0.253	0.207
0.2	0.485	0.452	0.380	0.319	0.267
0.3	0.604	0.563	0.474	0.402	0.340
0.4	0.778	0.718	0.599	0.508	0.433
0.5	1.115	0.972	0.774	0.648	0.552



Para $k_h = k_v = 0$, ψ = 0 y K'_a es el K_a de Coulomb. Tabla: θ = α = 0, δ′ = φ′/2.

K'_a crece rápidamente con k_h; al acercarse al límite aumenta indefinidamente.

Enunciado

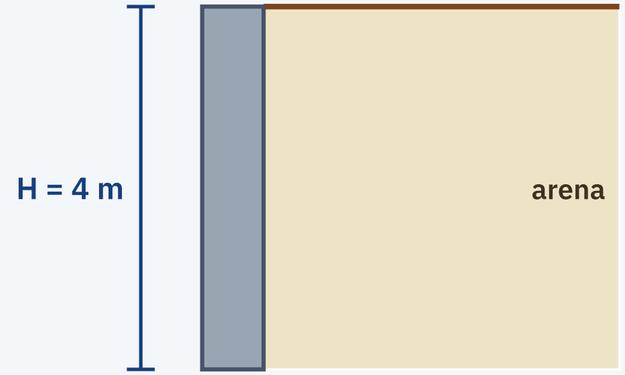
EJEMPLO

Datos

Muro	$H = 4$ **m, vertical; relleno horizontal; sin sobrecarga**
Suelo	**arena seca:** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ,\ \delta' = 15^\circ$
Sismo	$k_h = 0.2$**,** $k_v = 0$

SE PIDE

ψ, **K′a**, **Pae** y cuña crítica; comparación con Coulomb estático. El módulo se abre con este muro.



γ = 15.5 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k_h = 0.2

Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 Ángulo sísmico

$$\psi = \tan^{-1}\frac{0.2}{1-0} = \mathbf{11.31^\circ}$$

2 Coeficiente de Mononobe–Okabe (θ = α = 0)

$$\cos^2(30^\circ - 11.31^\circ) = 0.8973 \qquad \cos\psi = 0.9806 \qquad \cos(15^\circ + 11.31^\circ) = 0.8964$$

$$\sqrt{\frac{\sin 45^\circ \sin(30^\circ - 11.31^\circ)}{\cos(15^\circ + 11.31^\circ)}} = \sqrt{0.2528} = 0.5028$$

$$K'_a = \frac{0.8973}{0.9806(0.8964)(1+0.5028)^2} = \mathbf{0.4520}$$

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

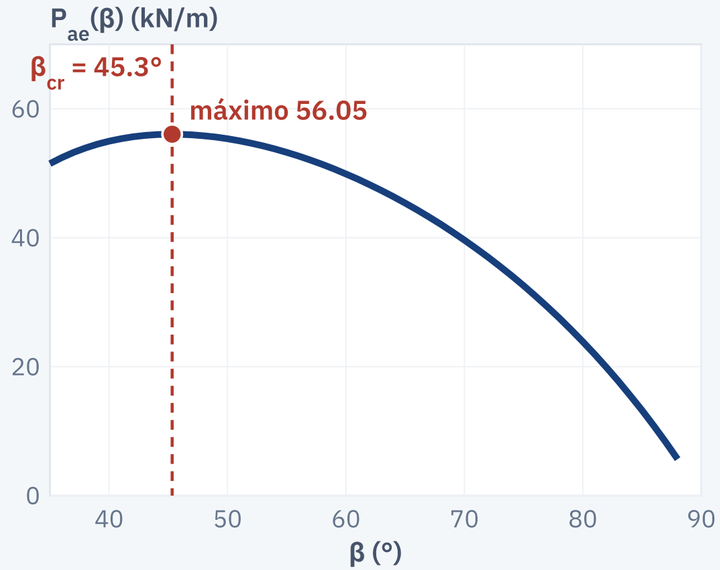
3 Fuerza dinámica

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}\gamma H^2(1-k_v)K'_a$$
$$= \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(1-0)(0.4520) = \mathbf{56.05}\ \mathrm{kN/m}$$

4 Cuña crítica (vértice de las cuñas de prueba)

$$\beta_{cr} = \mathbf{45.3}^\circ\ (\text{con la horizontal})$$

P_{ae} = **56.05 kN/m**; la fuerza estática de Coulomb (K_a = 0.3014) era de 37.38 kN/m: la fuerza sísmica la **aumentó un 50 %**. La cuña crítica forma 45.3° con la horizontal.



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Aceleración horizontal crítica

TEORÍA

La raíz cuadrada que contiene sin(φ′ − α − ψ) no es real cuando φ′ − α − ψ < 0: **ninguna cuña puede estar en equilibrio**, con independencia del comportamiento del muro. El relleno es estable únicamente bajo la condición siguiente:

$$\alpha \leq \varphi' - \psi$$

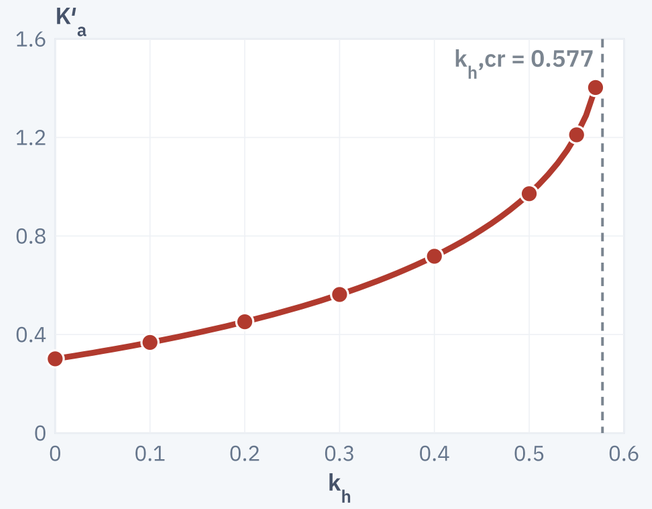
Para un relleno horizontal esto exige ψ ≤ φ′; es decir, la aceleración horizontal no puede superar el valor siguiente:

$$k_{h(cr)} = (1 - k_v)\tan\varphi' \qquad (\alpha \neq 0 :\ \tan(\varphi' - \alpha))$$

Al acercarse al límite, K'_a aumenta muy rápidamente ($k_{h,cr}$ = 0.577 para φ′ = 30°).

Si k_h supera el límite, el módulo detiene el cálculo con un mensaje.

K'_a – k_h (φ′ = 30°, δ′ = 15°)



Enunciado

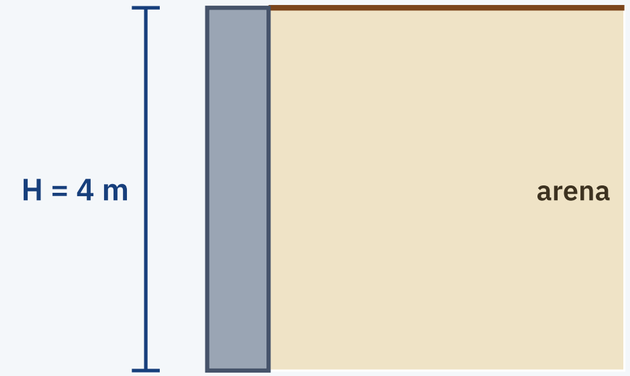
EJEMPLO

Datos

Muro y terreno	**Muro del Ejemplo 1:** $H = 4$ **m,** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$, $k_v = 0$
Variable	$k_h = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5;\ 0.55;\ 0.57$

SE PIDE

Para cada k_h: **ψ**, **K'_a** y **P_{ae}**; k_h crítico; resultado para $k_h = 0.6$.



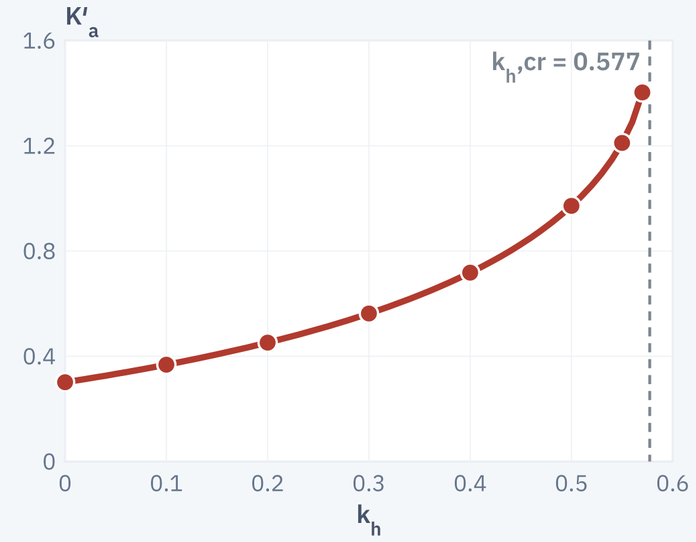
γ = 15.5 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°

Solución

SOLUCIÓN

1 $\psi = \tan^{-1} k_h$; $k_{h,cr} = \tan 30° = 0.577$

k_h	ψ (°)	K'_a	P_{ae} (kN/m)
0.00	0.0	0.301	37.4
0.10	5.7	0.368	45.6
0.20	11.3	0.452	56.1
0.30	16.7	0.563	69.8
0.40	21.8	0.718	89.0
0.50	26.6	0.972	120.5
0.55	28.8	1.211	150.1
0.57	29.7	1.403	174.0



De k_h = 0 a 0.2, P_{ae} pasa de 37.4 a 56.1 kN/m (50%), con 0.5 es de 120.5 kN/m (3.2 veces); cuando k_h se aproxima a 0.57, K'_a crece sin límite. **k_h = 0.6 > 0.577**: la raíz cuadrada no es real, ninguna cuña está en equilibrio: el módulo detiene el cálculo.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

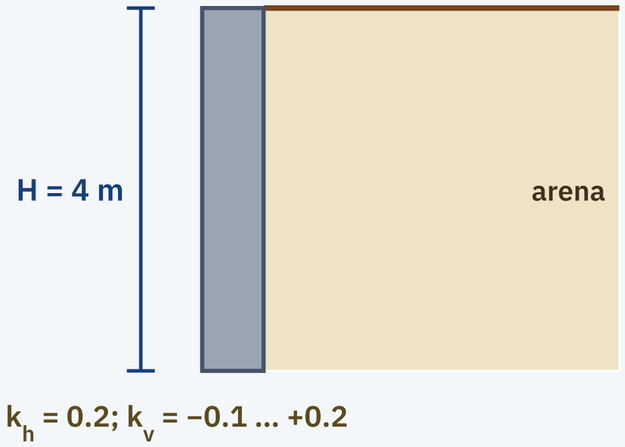
EJEMPLO

SE PIDE

Para cada k_v: **ψ**, **K'_a**, **$(1 - k_v)$** y **P_{ae}**; ¿qué dirección es más desfavorable?

Datos

Muro y terreno	**Muro y terreno del Ejemplo 1; $k_h = 0.2$**
Variable	$k_v = -0.1$ **(hacia abajo),** 0**,** $+0.1$**,** $+0.2$ **(hacia arriba)**



Solución

SOLUCIÓN

1 $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; $P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a = 124\,(1 - k_v)\,K'_a$

k_v	ψ (°)	K'_a	$1 - k_v$	P_{ae} (kN/m)
-0.1	10.30	0.4351	1.1	59.35
0.0	11.31	0.4520	1.0	56.05
0.1	12.53	0.4739	0.9	52.89
0.2	14.04	0.5032	0.8	49.92

Una **k_v descendente (−0.1)** eleva la fuerza a 59.3 kN/m (+6%), mientras que una $k_v = 0.2$ ascendente la reduce a 49.9 kN/m. Aunque ψ aumenta con k_v ascendente, predomina el factor $(1 - k_v)$. En la práctica se elige, con $k_v = \pm 0.5\,k_h$, el sentido que da la mayor fuerza.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Seed y Whitman (1970)

TEORÍA

El análisis de Mononobe–Okabe da la magnitud y la dirección de la fuerza, pero **no el punto donde actúa**. Seed y Whitman descomponen la fuerza en la fuerza estática de Coulomb y el incremento sísmico:

$$P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$$

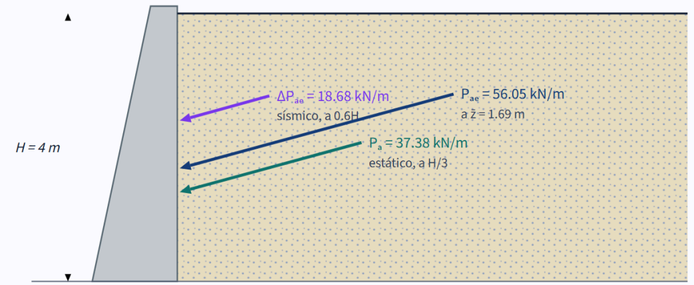
$$\bar{z} = \frac{P_a \dfrac{H}{3} + \Delta P_{ae}\,(0.6H)}{P_{ae}}$$

P_a (con los mismos δ′, θ, α, como ½K_aγH^2) actúa a **H/3** por encima de la base; ΔP_{ae} actúa a **0.6H** (el diagrama triangular es un triángulo invertido que se estrecha hacia la base).

La resultante vuelve a estar inclinada un ángulo δ′ respecto de la normal a la cara del muro.

El incremento se toma a veces a media altura; 0.6H da un mayor momento de vuelco y es el que se adopta.

ESTÁTICO + INCREMENTO SÍSMICO



Enunciado

EJEMPLO

Datos

Muro y sismo	**Muro del Ejemplo 1:** $H = 4$ **m,** $\gamma = 15.5\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$, $k_h = 0.2$

SE PIDE

P_a, ΔP_{ae} y **$\bar{z}$**; $\bar{z}$ si ΔP_{ae} se toma a media altura.

Solución

SOLUCIÓN

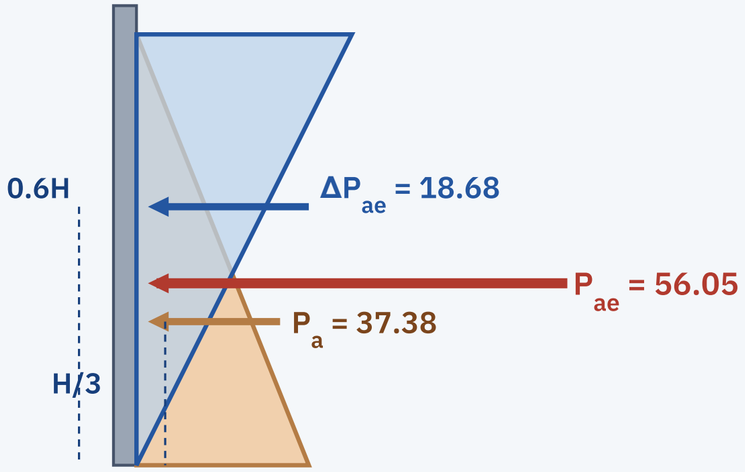
1 Fuerza estática (K_a = 0.3014) e incremento sísmico

$$P_a = \tfrac{1}{2}(15.5)(4)^2(0.3014) = 37.38\ \text{kN/m}$$

$$\Delta P_{ae} = P_{ae} - P_a = 56.05 - 37.38 = \mathbf{18.68}\ \text{kN/m}$$

2 Altura de aplicación (desde la base)

$$\bar{z} = \frac{37.38(4/3) + 18.68(2.4)}{56.05} = \mathbf{1.69}\ \text{m}$$



$\bar{z}$ = **1.69 m** (en el caso estático era 1.33 m). Si el incremento se hubiera tomado a la mitad de la altura (2.0 m), resultaría $\bar{z}$ = 1.56 m: la hipótesis de 0.6H desplaza la fuerza hacia arriba y **aumenta el momento de vuelco**.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

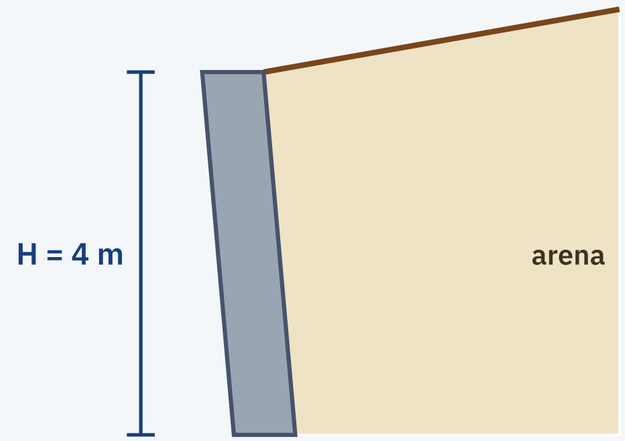
EJEMPLO

SE PIDE

ψ, **K′a**, **Pae**, ΔP_{ae}, **z̄**; comprobación del límite de equilibrio.

Datos

Muro	$H = 4$ **m; cara inclinada** $\theta = 5^\circ$ **respecto de la vertical**
Relleno	**inclinación de la superficie** $\alpha = 10^\circ$**;** $\gamma = 15\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ,\ \delta' = 15^\circ$
Sismo	$k_h = 0.15,\ k_v = 0$



γ = 15, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k_h = 0.15

Solución

SOLUCIÓN

1 Ángulo sísmico y límite de equilibrio

$$\psi = \tan^{-1} 0.15 = \mathbf{8.53}^\circ \qquad k_{h(cr)} = \tan 20^\circ = 0.364 > 0.15$$

2 Coeficiente y fuerza (K_a estático = 0.3872)

$$K'_a(\theta = 5^\circ, \alpha = 10^\circ, \psi = 8.53^\circ) = \mathbf{0.5435}$$

$$P_{ae} = \tfrac{1}{2}(15)(4)^2(0.5435) = \mathbf{65.22}\ \text{kN/m} \qquad P_a = 46.46\ \text{kN/m}$$

3 Altura de aplicación de la carga

$$\Delta P_{ae} = 18.76\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \frac{46.46(1.33) + 18.76(2.4)}{65.22} = \mathbf{1.64}\ \text{m}$$

P_{ae} = **65.22 kN/m**, a 1.64 m por encima de la base; cuña crítica 44.2°; el sismo incrementó la fuerza un 40 %.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Extensión del módulo

TEORÍA

La **sobrecarga** q se suma a la inercia de cada cuña junto con su peso; la cuña crítica no cambia:

$$q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} \qquad P_{ae} = (1-k_v)K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right)$$

Bajo el nivel freático el agua intersticial se mueve solidariamente con el suelo (**solidaria**, relleno de grano fino) o no se mueve (**libre**, k > 5·10⁻⁴ m/s). La inercia corresponde a la masa saturada o seca; la tensión, al peso sumergido; bajo el agua el ángulo sísmico aumenta:

$$\tan\psi_w = \frac{\gamma_{sat}}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{(solidaria)} \qquad \tan\psi_w = \frac{\gamma_d}{\gamma_{sat}-\gamma_w}\frac{k_h}{1-k_v}\ \text{(libre)}$$

$$p_{wd} = \tfrac{7}{8}k_h\gamma_w\sqrt{d_w z'} \qquad P_{wd} = \tfrac{7}{12}k_h\gamma_w d_w^2\ (0{,}4\,d_w\ \text{de altura, Westergaard})$$

Para el agua libre se añade la presión hidrodinámica de Westergaard. En un relleno estratificado, cada estrato adopta su propio K'_a con $\sigma' = (1 - k_V)K'_{a,i}\sigma'_V\cos\theta$; la parte estática y ΔP_{ae} (0.6H) se suman por separado.

¿POR QUÉ ES IMPORTANTE EL AGUA?

El agua aumenta el ángulo sísmico ($\psi_W > \psi$) y, además de la presión hidrostática, introduce **presión hidrodinámica (en el caso libre)**.

Enunciado

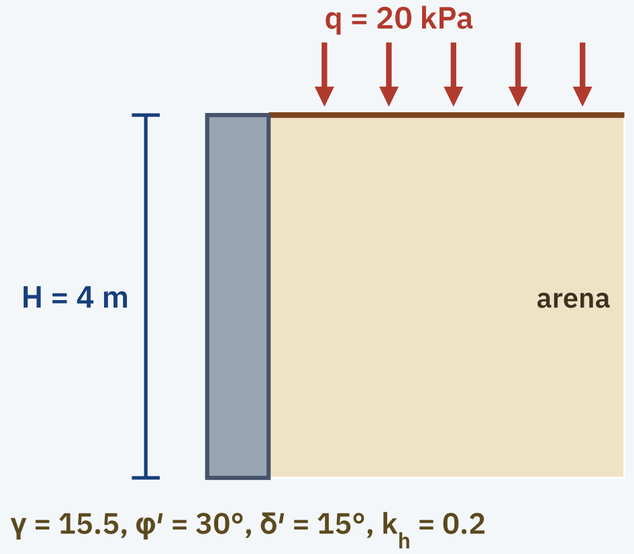
EJEMPLO

Datos

Muro y terreno	**Muro y suelo del Ejemplo 1 ($k_h = 0.2$)**
Sobrecarga	**$q = 20$ kPa (en superficie horizontal)**

SE PIDE

P_{ae} total, parte estática, incremento sísmico y **$\bar{z}$**.



Solución

SOLUCIÓN

1 Tensión equivalente y fuerzas ($K'_a = 0.4520$)

$$q_e = q\cos 0^\circ / \cos 0^\circ = 20\ \text{kPa}$$

$$P_{ae} = K'_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + q_e H\right) = 0.4520(124 + 80) = 0.4520(204) = \mathbf{92.21}\ \text{kN/m}$$

2 Componente estática (Coulomb $K_a = 0.3014$) e incremento

$$P_a = K_a(204) = 61.49\ \text{kN/m} \qquad \Delta P_{ae} = 30.73\ \text{kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{(37.38)(1.33) + (24.11)(2.0) + (30.73)(2.4)}{92.21} = \mathbf{1.86}\ \text{m}$$

P_{ae} = **92.21 kN/m** (56.05 sin sobrecarga); $\bar{z}$ = **1.86 m**. La parte estática de la sobrecarga actúa a H/2 y su incremento sísmico a 0.6H.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

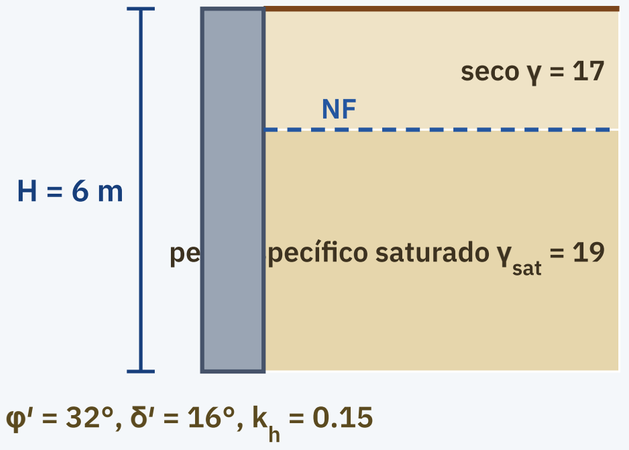
EJEMPLO

Datos

Muro	$H = 6$ **m, vertical; relleno horizontal; sin sobrecarga**
Suelo	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3}$ **(seco, 0–2 m),** $\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3}$ **(2–6 m);** $\varphi' = 32°,\ \delta' = 16°$
Sismo	$k_h = 0.15$, $k_v = 0$**; nivel freático a 2 m (dw = 4 m)**

SE PIDE

P total y **z̄** para el caso en que el agua se mueve con el suelo (**solidaria**) y para aquel en que no lo hace (**libre**); comparación con el valor estático.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 k_h equivalente y ψ_w bajo el agua

$$\text{solidaria: } k_{h,w} = \frac{19}{19-9.81}(0.15) = 0.3101 \;\Rightarrow\; \psi_w = 17.23^\circ$$

$$\text{libre: } k_{h,w} = \frac{17}{19-9.81}(0.15) = 0.2775 \;\Rightarrow\; \psi_w = 15.51^\circ$$

2 Coeficientes (zona seca ψ = 8.53°)

$$K'_a(\text{seco}) = 0.3792 \qquad K'_a(\text{solidaria, sumergida}) = 0.5372 \qquad K'_a(\text{libre, sumergida}) = 0.4991$$

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

3 Fuerzas (kN/m); $P_{wd} = (7/12)(0.15)(9.81)(4)^2 = 13.73$ kN/m, a $0.4 \cdot d_w = 1.6$ m por encima

	Suelo P_{ae}	Agua hidrostática	Hidrodinámica (Westergaard)	P total	$\bar{z}$ (m)
Estático ($k_h = 0$)	67.74	78.48	–	144.80	1.71
Agua solidaria	125.46	78.48	–	202.06	2.24
Agua libre	117.47	78.48	13.73	207.67	2.15

El sismo aumentó la fuerza total respecto de la estática en un **40%** (solidaria) y un **43%** (libre); $\bar{z}$ subió de 1.71 a 2.24 m. En el caso solidario la fuerza del terreno es mayor (ψ_w grande), mientras que en el libre se añade la presión hidrodinámica; los totales son muy próximos (202.1 y 207.7 kN/m).

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Alcance de la solución

TEORÍA

Pseudoestático: el sismo se representa mediante k_h y k_v constantes; no se considera la dependencia de la aceleración respecto al tiempo ni al movimiento del muro (desplazamiento de Newmark, análisis dinámico).

Cuña plana, relleno seco sin cohesión (Mononobe–Okabe); el caso estratificado es una ampliación del módulo (no existe una solución estratificada cerrada); en un solo estrato se reduce a la solución cerrada, y para $k_h = k_v = 0$ al método de Coulomb estratificado.

Agua: solidaria (suelo de grano fino) o libre ($k > 5 \cdot 10^{-4}$ m/s); en agua libre se añade la presión hidrodinámica de Westergaard.

Punto de aplicación de Seed–Whitman: P_a a H/3, ΔP_{ae} a 0.6H; el agua actúa con su propio brazo.

Para la presión **pasiva**, véase el módulo Pasivo en sismo (Subba Rao–Choudhury).

Resumen

Puntos clave

Pseudoestático: $k_h W$, $k_v W$; $\psi = \tan^{-1}[k_h/(1 - k_v)]$; la cuña sísmica es la cuña de Coulomb girada un ángulo ψ

$P_{ae} = \frac{1}{2}\gamma H^2(1 - k_v)K'_a$; K'_a aumenta rápidamente con k_h; para $k_h = k_v = 0$ se obtiene Coulomb

Límite de equilibrio: $k_{h,cr} = (1 - k_v)\tan\varphi'$ (con talud, $\tan(\varphi' - \alpha)$); si se supera, no existe solución

k_v: aumenta la fuerza hacia abajo; en la práctica se elige el más desfavorable de $\pm 0.5 k_h$

Posición: $P_{ae} = P_a + \Delta P_{ae}$; P_a actúa a $H/3$, ΔP_{ae} a $0.6H$; $\bar{z} = [P_a(H/3) + \Delta P_{ae}(0.6H)]/P_{ae}$

Se añade la **sobrecarga** $q_e = q\cos\theta/\cos(\theta - \alpha)$; bajo el **agua**, ψ_w aumenta (solidaria: γ_{sat}/γ', libre: γ_d/γ') y, en agua libre, se añade la presión hidrodinámica $(7/12)k_h\gamma_w d_w^2$

Referencias bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Mononobe, N. and Matsuo, H. (1929). On the determination of earth pressure during earthquakes. Proceedings, World Engineering Congress, Tokyo, 9, 177–185.

Okabe, S. (1926). General theory of earth pressure. Journal of the Japan Society of Civil Engineering, 12(1).

Seed, H.B. and Whitman, R.V. (1970). Design of earth retaining structures for dynamic loads. Specialty Conference on Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth Retaining Structures, ASCE, 103–147.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1933). Water pressures on dams during earthquakes. Transactions ASCE, 98, 418–433.

NOTA

Todos los ejemplos numéricos se han obtenido con el propio motor de cálculo del módulo; el módulo da los mismos valores. El módulo se abre con el muro del Ejemplo 1 ($k_h = 0.2$, $\delta' = 15°$).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos en línea

De la teoría a la práctica

Introducir en GeoTerva el muro propio, los coeficientes sísmicos k_h y k_v, la sobrecarga, los estratos y el nivel freático; el módulo proporciona conjuntamente P_{ae}, la altura del punto de aplicación y la cuña crítica.

Abrir el módulo → | **Página de teoría →**

Abrir en el teléfono
Los módulos de prueba no requieren registro.

Si desea utilizarlas en sus clases: info@geoterva.com