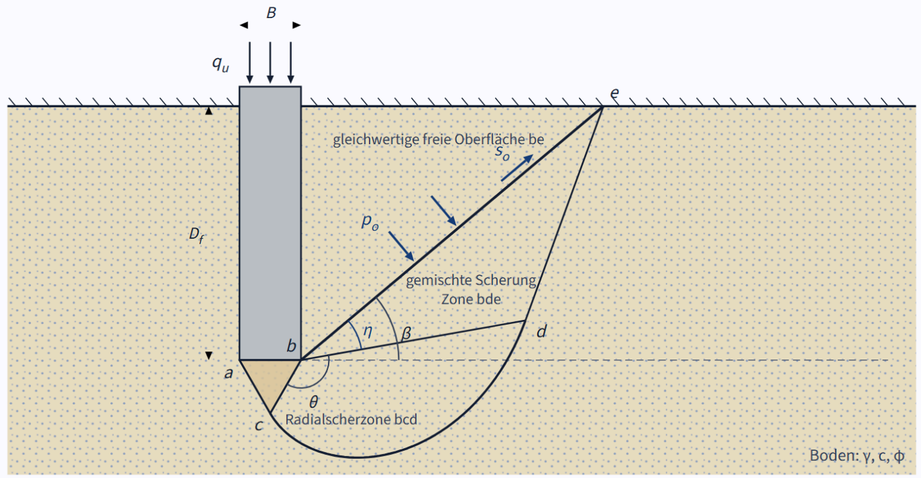
GeoTerva

Geotechnische Vorlesungspräsentation · Fundamente

Tragfähigkeit nach Meyerhof: allgemeine Gleichung

Vorlesung: vom Gleitliniennetz nach Meyerhof zu den Tragfähigkeitsbeiwerten, von den Form-, Tiefen- und Neigungsbeiwerken zum Grundwasser; zu jedem Thema ein Rechenbeispiel.

Gleitliniennetz · $N_c \cdot N_q \cdot N_\gamma$ · Form · Tiefe · Neigung · Grundwasser · Rechenbeispiele



Einführung

Was lernen wir in dieser Vorlesung?

- **Die drei Terme der allgemeinen Grundbruchgleichung** und die Form-, Tiefen- und Neigungsbeiwerte jedes Terms zu erkennen
- Meyerhofs **Gleitliniennetz**, die äquivalente freie Oberfläche und die Herleitung der Beiwerte N_c, N_q nachzuvollziehen
- Die Beiwerte nach **Reissner (N_q), Prandtl (N_c)** und Vesic (N_γ) für ein Fundament an der Geländeoberfläche zu berechnen
- **De Beer-Formbeiwerte**, **Hansen-Tiefenbeiwerte** und **Meyerhof-Lastneigungsbeiwerte** anzuwenden
- Wie der undränierte Fall ($\varphi = 0$) und die drei **Grundwasser**-Fälle zu behandeln sind
- Die Brutto- und Netto-Grundbruchspannung zu ermitteln und zu **prüfen**

VORLESUNGSABLAUF

Jedes Thema wird in **drei Schritten** behandelt:

1 · **Theorie**: Wie lautet die Regel, warum ist sie so?

2 · **Aufgabe**: Gegeben und Gesucht

3 · **Lösung**: Schritt für Schritt, mit Zahlen

Beispielfundament, das im Modul geöffnete Modell: ein quadratisches Fundament 1.2 m × 1.2 m in Sand, D_f = 1 m, Grundwasser bei 0.5 m, Last um 10° gegen die Vertikale geneigt.

Drei Terme, jeder mit seinen eigenen Beiwerten

THEORIE

Das Modul berechnet die **allgemeine Grundbruchgleichung**: die drei Terme der Gleichung nach Terzaghi (Kohäsion, Überlagerungsdruck, Eigengewicht) und für jeden Term einen Beiwert für die **Fundamentform**, die **Einbindetiefe** und die **Lastneigung**:

$$q_u = c\,N_c\,F_{cs}F_{cd}F_{ci} + q\,N_q\,F_{qs}F_{qd}F_{qi} + \tfrac{1}{2}\gamma B\,N_\gamma\,F_{\gamma s}F_{\gamma d}F_{\gamma i}$$

N_c, N_q stammen aus der Theorie von Meyerhof (1951); diese Seite leitet sie **Schritt für Schritt** her. Für N_γ wird ein Versuchsverfahren beschrieben, während das Modul die geschlossene Form nach Vesic verwendet.

Die Fundamentsohle ist **rau**; der Boden darunter ist homogen und sehr mächtig; die Festigkeit s = c + σ′tanφ. Die Last ist mittig; geneigte Lasten werden mit Lastneigungsbeiwerten erfasst.

Der Unterschied zu Terzaghi: nicht nur für Flachgründungen; der Boden oberhalb der Gründungssohle wird über eine **äquivalente freie Oberfläche** in den Mechanismus einbezogen. In der Gleichung erscheint dies als **Tiefenbeiwerte**: das Modul setzt keine Grenze für D_f/B.

BEZEICHNUNGEN

c: Kohäsion, φ′: Reibungswinkel

q = γ D_f: Auflast in Höhe der Gründungssohle

γ: Wichte des Bodens unter der Sohle

B: kurze Seite des Fundaments, L: lange Seite

$F_{.s}$ Form, $F_{.d}$ Tiefe, $F_{.i}$ Neigung

Keil 45° + φ/2, radiale Zone und gemischte Zone

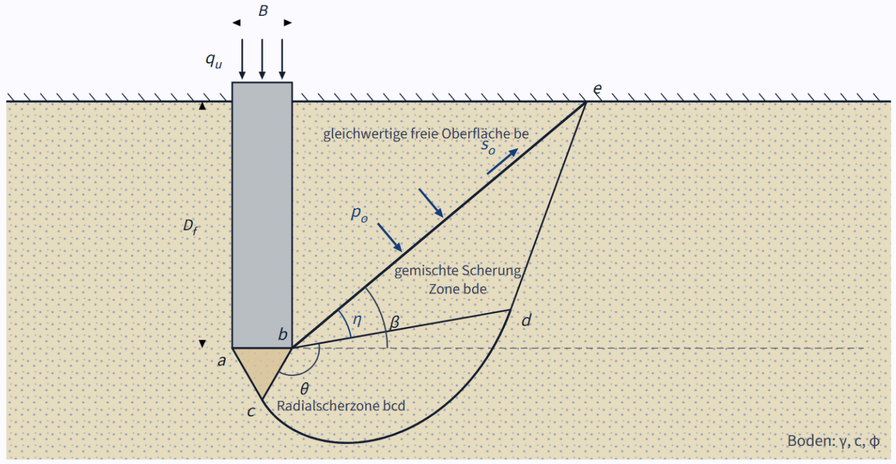
THEORIE

Meyerhof (1951) übernahm die in der Abbildung dargestellte Bruchfläche. Unter dem Fundament befindet sich ein **elastischer Keil abc**, wie auch die Versuche zeigen; seine Seiten sind unter **45° + φ/2** statt unter φ geneigt (Terzaghi hatte φ angesetzt). Daneben liegt die **radiale Zone bcd**, begrenzt durch die logarithmische Spirale $r = r_0 e^{\theta \tan\varphi}$; jenseits davon befindet sich anstelle der passiven Rankine-Zone nach Terzaghi eine **gemischte Zone bde**, in der die Gleitung zwischen radial und eben liegt.

Der Boden oberhalb der Zone bde wird nicht vernachlässigt: seine Wirkung wird durch die Spannungen p_o (Normalspannung) und s_o (Schubspannung) auf der **äquivalenten freien Oberfläche** in der Ebene be dargestellt. Die Ebene ist um β gegen die Horizontale geneigt; bd liegt um η unterhalb von ihr.

Die Tragfähigkeit wird wieder durch **Superposition** aufgebaut: der Beitrag von c und p_o' (N_c, N_q) und der Beitrag von γ (N_γ):

$$q_u = c\,N_c + p_o\,N_q + \tfrac{1}{2}\gamma B\,N_\gamma$$



Teilmobilisierung m und Mohr-Kreis

THEORIE

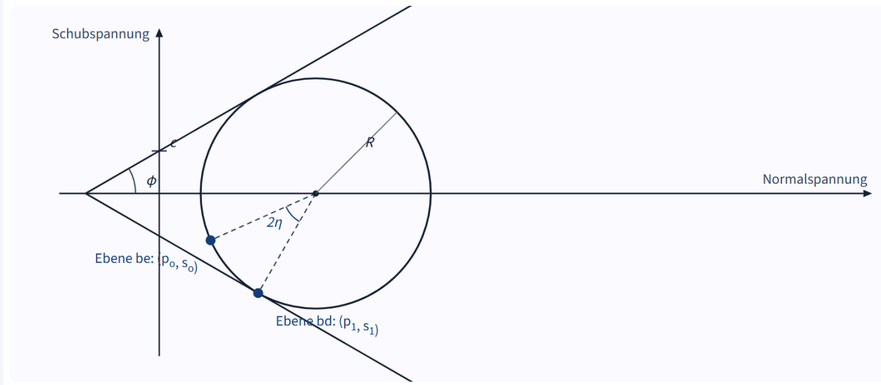
Auf der äquivalenten freien Oberfläche wird die Scherfestigkeit nur **teilweise** mobilisiert: Meyerhof schrieb die Schubspannung als Bruchteil der Festigkeit. In der linearen bde-Zone befindet sich der Boden jedoch im plastischen Gleichgewicht: auf der bd-Ebene wird die volle Festigkeit mobilisiert:

$$0 \le m \le 1: \quad s_o = m\,(c + p_o \tan\varphi) \qquad s_1 = c + p_1 \tan\varphi$$

$$R = \frac{c + p_1 \tan\varphi}{\cos\varphi} \qquad \cos(2\eta + \varphi) = \frac{m\,(c + p_o \tan\varphi)\cos\varphi}{c + p_1 \tan\varphi}$$

Der Spannungszustand im Bereich bde ist **ein einziger Mohrscher Kreis** (nebenstehend): Der Punkt bd liegt auf der Einhüllenden, der Punkt be auf dem Kreis um 2η voraus. Dies verknüpft den Winkel η mit m.

Zwei Grenzen: **m = 0** ⇒ cos(2η + φ) = 0, **η = 45° − φ/2**; **m = 1** ⇒ cos(2η + φ) = cosφ, **η = 0**.



Wie werden N_c und N_q hergeleitet?

THEORIE

Auf der Fläche bc befindet sich auch die radiale Zone im Bruchzustand: $s'_p = c + p'_p \tan\varphi$. Aus den Momenten um den Pol b (es bleiben nur die Normalspannungen auf der Spirale und die Kohäsion):

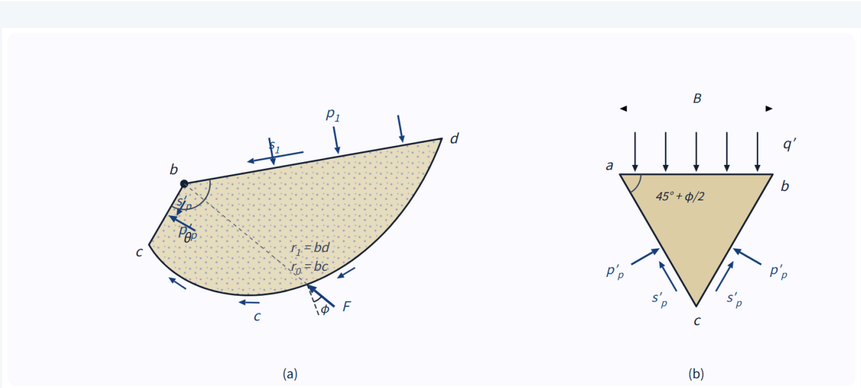
$$p'_p = p_1\, e^{2\theta\tan\varphi} + c\cot\varphi\left(e^{2\theta\tan\varphi} - 1\right)$$
$$s'_p = \left(c + p_1\tan\varphi\right) e^{2\theta\tan\varphi}$$

Dann das vertikale Gleichgewicht des Keils abc (jede Fläche von der Länge B/2 / cos(45° + φ/2)):

$$q' = p'_p + s'_p\cot\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Die Zusammenfassung aller Terme trennt die Anteile mit c und p_o:

$$q' = c\,N_c + p_o\,N_q$$
$$N_q = \frac{\left(1+\sin\varphi\right)e^{2\theta\tan\varphi}}{1-\sin\varphi\,\sin(2\eta+\varphi)} \qquad N_c = \left(N_q - 1\right)\cot\varphi$$



Wie vergrößern die Beiwerte β und m den Wert?

THEORIE

Die Beiwerte hängen von φ′ ab, über m von η und über die Neigung β der äquivalenten freien Oberfläche vom **Winkel θ**, den die Spirale überstreicht (Geometrie nach Bild 1):

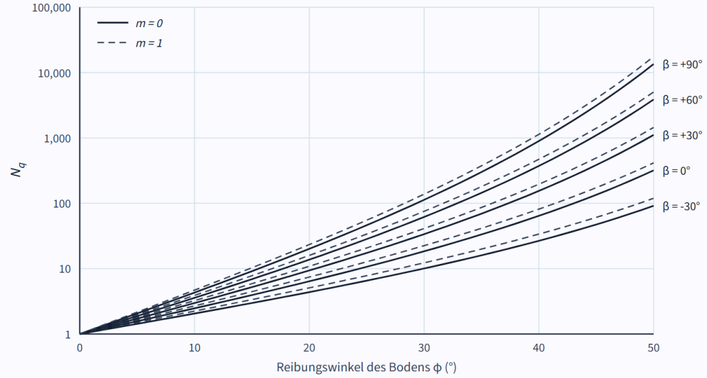
$$\theta = 135^\circ + \beta - \eta - \frac{\varphi}{2}$$

$$m = 0:\ \theta = 90^\circ + \beta \qquad m = 1:\ \theta = 135^\circ + \beta - \tfrac{\varphi}{2}$$

Die äquivalente freie Oberfläche einer Tiefgründung ist steiler, β ist größer; die Beiwerte wachsen damit schnell an (seitlich).

Oberflächenfundament (die Bedingung in Terzaghis Ableitung): β = 0, m = 0 ⇒ θ = π/2 und sin(2η + φ) = 1:

$$N_q = e^{\pi \tan\varphi} \tan^2\left(45^\circ + \tfrac{\varphi}{2}\right) \qquad N_c = (N_q - 1)\cot\varphi$$



Dies sind der **N_q-Beiwert nach Reissner (1924)** und der **N_c-Beiwert nach Prandtl (1921)**; das Modul verwendet diese. Mit $p_o = \gamma D_f = q$ werden die c- und q-Terme zu $cN_c + qN_q$; der Boden über der Sohle geht über **Tiefenbeiwerte** statt über β und m in die Berechnung ein. Für φ → 0 gilt $N_c \to \pi + 2 = 5.14$.

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Baugrund	$\varphi' = 30^\circ,\ c = 0$
Fälle	**(a) Oberflächenfundament: β = 0, m = 0 · (b) β = 15°, m = 0 · (c) β = 15°, m = 1**
Formeln	$\theta = 135^\circ + \beta - \eta - \varphi/2,\quad N_q = \frac{(1+\sin\varphi)e^{2\theta\tan\varphi}}{1-\sin\varphi\sin(2\eta+\varphi)}$

GESUCHT

Für jeden Fall sind die Werte **η, θ,** **N_q** und N_c zu ermitteln. Stimmt N_q an der Geländeoberfläche mit der geschlossenen Form nach Reissner überein?

Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 (a) Oberflächenfundament: m = 0 ⇒ η = 45° − φ/2 = 30°; θ = 135° + 0 − 30° − 15° = 90° (identisch mit Reissners Wert $e^{\pi \tan\varphi}\tan^2(45° + \varphi/2)$)

$$N_q = \frac{1.5\, e^{2(\pi/2)(0.5774)}}{1 - 0.5 \sin 90^\circ} = \frac{1.5(6.134)}{0.5} = \mathbf{18.40}$$

2 (b) β = 15°, m = 0: η = 30°; θ = 135° + 15° − 30° − 15° = 105°; sin(2η + φ) = 1

$$N_q = \frac{1.5\, e^{2(1.8326)(0.5774)}}{0.5} = \mathbf{24.90} \qquad N_c = (24.90 - 1)\cot 30^\circ = \mathbf{41.39}$$

3 (c) β = 15°, m = 1: η = 0; θ = 135° + 15° − 0 − 15° = 135°; sin(2η + φ) = sin30° = 0.5

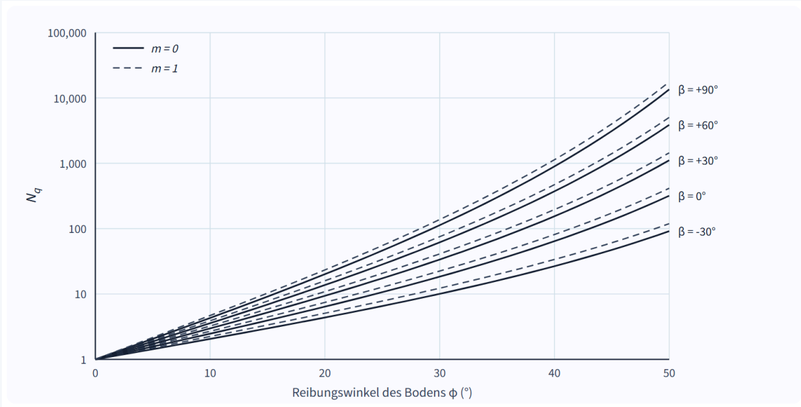
$$N_q = \frac{1.5\, e^{2(2.3562)(0.5774)}}{1 - 0.5(0.5)} = \frac{1.5(15.19)}{0.75} = \mathbf{30.38} \qquad N_c = \mathbf{50.89}$$

Lösung (2/2)

LÖSUNG

Zustand	η (°)	θ (°)	N_q	N_c
(a) β = 0, m = 0 (Reissner/Prandtl)	30	90	18.40	30.14
(b) β = 15°, m = 0	30	105	24.90	41.39
(c) β = 15°, m = 1	0	135	30.38	50.89

Das Oberflächenfundament ist **identisch** mit der geschlossenen Form (18.40). Mit wachsendem β und zunehmender Mobilisierung **steigen die Beiwerte rasch an**: von (a) → (c) N_q um den Faktor 1.65. Das Modul berücksichtigt diesen Anstieg nicht über den Mechanismus, sondern über die **Tiefenbeiwerte** (spätere Abschnitte).



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

N_γ: Versuchsverfahren, Meyerhof 1963 und Vesic

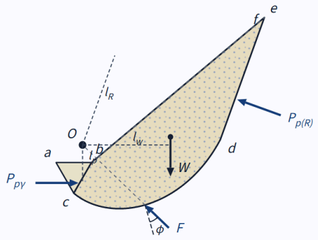
THEORIE

Wie bei Terzaghi gibt es für N_γ keine geschlossene Form; er wird durch **Probieren** ermittelt: φ, β und m werden gewählt; θ wird bestimmt; vom Proberzentrum O aus wird eine logarithmische Spirale gezeichnet; für den Körper bcdf das Gewicht W und die Rankine-Passivkraft $P_{p(R)}$ auf df; aus den Momenten um O die Passivkraft auf bc:

$$P_{p\gamma} = \frac{W\, l_w + P_{p(R)}\, l_R}{l_p}$$

Durch Variation von O wird das kleinste $P_{p\gamma}$ gefunden; zusammen mit dem Eigengewicht des Keils abc:

$$q'' = \frac{\gamma B}{2}\left[\frac{4P_{p\gamma}\sin(45^\circ+\varphi/2)}{\gamma B^2} - \tfrac{1}{2}\tan\left(45^\circ+\tfrac{\varphi}{2}\right)\right] = \tfrac{1}{2}\gamma B\, N_\gamma$$



$$N_\gamma = (N_q - 1)\tan(1.4\varphi) \quad \text{(Meyerhof 1963)}$$

$$N_\gamma = 2(N_q + 1)\tan\varphi \quad \text{(Vesic 1973, \textbf{hier})}$$

N_c, N_q, N_γ hängen nur von φ′ ab

THEORIE

Die beiden Quellen sind für N_c und N_q **gleich**; für N_γ unterscheiden sie sich: N_γ ist der Beiwert, der am stärksten von der Annahme der Keilform abhängt. Bei φ = 30° ergibt Vesic 22.40, Meyerhof (1963) 15.67. Mit dem N_γ nach Meyerhof wäre der Eigengewichtsterm und damit q_u des Reibungsbodens kleiner.

$$N_q = e^{\pi \tan\varphi} \tan^2\left(45^\circ + \tfrac{\varphi}{2}\right) \qquad N_c = (N_q - 1)\cot\varphi \qquad N_\gamma = 2(N_q + 1)\tan\varphi$$

BEIWERTE

φ (°)	N_c	N_q	N_γ	N_γ (M63)
0	5.14	1.00	0.00	0.00
10	8.34	2.47	1.22	0.37
20	14.83	6.40	5.39	2.87
26	22.25	11.85	12.54	8.00
30	30.14	18.40	22.40	15.67
32	35.49	23.18	30.21	22.02
35	46.12	33.30	48.03	37.15
40	75.31	64.20	109.41	93.69

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Baugrund	$\varphi' = 32°$ **(tan 32° = 0.6249)**
Verfahren	**Reissner, Prandtl, Vesic; zum Vergleich Meyerhof (1963)**

GESUCHT

N_q, N_c, N_γ mit geschlossenen Ausdrücken berechnen; den Beiwert N_γ nach Vesic mit Meyerhof (1963) vergleichen.

Lösung

LÖSUNG

1 Reissner N_q

$$N_q = e^{\pi \tan 32^\circ} \tan^2(61^\circ) = e^{1.9631}(3.2546) = \mathbf{23.18}$$

2 Prandtl N_c

$$N_c = (N_q - 1)\cot\varphi = \frac{23.18 - 1}{0.6249} = \mathbf{35.49}$$

3 Vesic N_γ (vom Modul verwendet) und Meyerhof (1963)

$$N_\gamma = 2(N_q + 1)\tan\varphi = 2(23.18 + 1)(0.6249) = \mathbf{30.21}$$

$$N_\gamma^{M63} = (N_q - 1)\tan(1.4\varphi) = (23.18 - 1)\tan 44.8^\circ = 22.02$$

Das N_γ nach Vesic ist **37 %** größer als das nach Meyerhof (φ′ = 32°). Übereinstimmend mit den Tabellenwerten: N_c = 35.49, N_q = 23.18, N_γ = 30.21.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

De Beer: nicht streifenförmiges Fundament

THEORIE

Die Herleitung gilt für ein durchgehendes (Streifen-)Fundament (ebener Verformungszustand). Bei einem Rechteckfundament ist der Bruch dreidimensional: Der Boden kann auch von den Enden des Keils und von den Seiten her ausweichen. **De Beer** (1970) korrigiert jeden Term mit dem Verhältnis der kurzen zur langen Seite B/L:

$$F_{cs} = 1 + \frac{B}{L}\frac{N_q}{N_c} \qquad F_{qs} = 1 + \frac{B}{L}\tan\varphi \qquad F_{\gamma s} = 1 - 0.4\,\frac{B}{L}$$

Beim Streifenfundament (B/L → 0) sind alle drei Beiwerte gleich 1; die Gleichung geht in die Form des ebenen Formänderungszustands über.

Beim quadratischen Fundament mit B/L = 1: Der N_γ-Term nimmt um 40 % ab ($F_{\gamma S}$ = 0.6), die q- und c-Terme nehmen zu.



Aufgabe

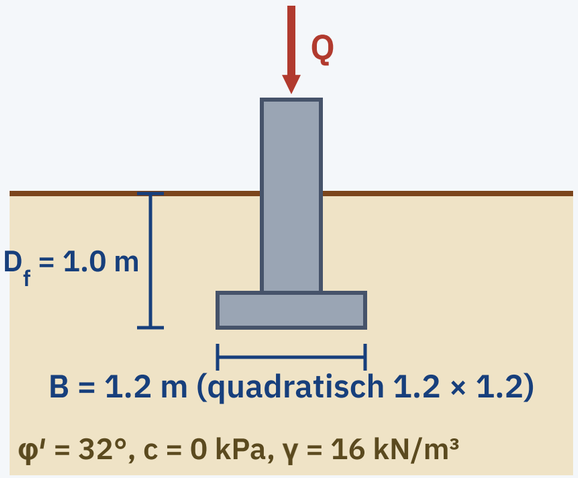
BEISPIEL

Gegeben

Baugrund	$\varphi' = 32°$: $N_c = 35.49,\ N_q = 23.18$ **(Beispiel 2)**
Fundament	**quadratisch B = L = 1.2 m; Vergleich: B/L = 0.5 und Streifen**

GESUCHT

Für ein quadratisches Fundament sind die Werte F_{cs}, F_{qs}, $F_{\gamma s}$ zu ermitteln; dieselben Beiwerte sind auch für B/L = 0.5 zu bestimmen.



Lösung

LÖSUNG

1 Quadratisches Fundament (B/L = 1)

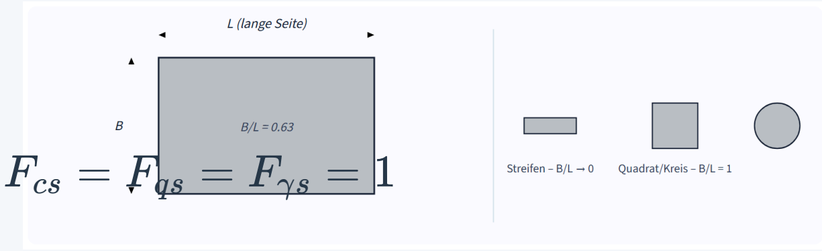
$$F_{cs} = 1 + (1)\frac{23.18}{35.49} = \mathbf{1.653}$$

$$F_{qs} = 1 + (1)\tan 32^\circ = \mathbf{1.625}$$

$$F_{\gamma s} = 1 - 0.4(1) = \mathbf{0.600}$$

2 B/L = 0.5 und Streifen

$$B/L = 0.5: \; F_{cs} = 1.327,\; F_{qs} = 1.312,\; F_{\gamma s} = 0.800 \qquad \text{Streifen}: \; F_{cs} = F_{qs} = F_{\gamma s} = 1$$



Beim quadratischen Fundament nimmt der q-Term um **62 %** zu, der Eigengewichtsterm um 40 % ab. Mit abnehmendem B/L streben die Beiwerte dem Wert des Streifenfundaments (1) zu.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Hansen: Beitrag des Bodens über der Sohle

THEORIE

Terzaghi betrachtet den Boden über der Sohle nur als **ständige Last**. In der Theorie von Meyerhof **leistet er dagegen über eine äquivalente freie Oberfläche auch Widerstand**; in der allgemeinen Gleichung wird dies durch die mit D_f/B wachsenden **Tiefenbeiwerte nach Hansen (1970)** berücksichtigt:

$$D_f/B \le 1: \; F_{qd} = 1 + 2\tan\varphi(1-\sin\varphi)^2 \frac{D_f}{B} \qquad D_f/B > 1: \; F_{qd} = 1 + 2\tan\varphi(1-\sin\varphi)^2 \tan^{-1}\frac{D_f}{B}$$

$$F_{cd} = F_{qd} - \frac{1-F_{qd}}{N_c \tan\varphi} \; (\varphi > 0) \qquad F_{cd} = 1 + 0.4\,k \; (\varphi = 0) \qquad F_{\gamma d} = 1$$

k = D_f/B (≤ 1) oder $\tan^{-1}(D_f/B)$ (> 1, im Bogenmaß). Über $D_f/B = 1$ hinaus erhöht der Arkustangens die Beiwerte weiter langsam: **anders als bei Terzaghi erfordert diese Gleichung keine Tiefenbegrenzung**.

Aufgabe

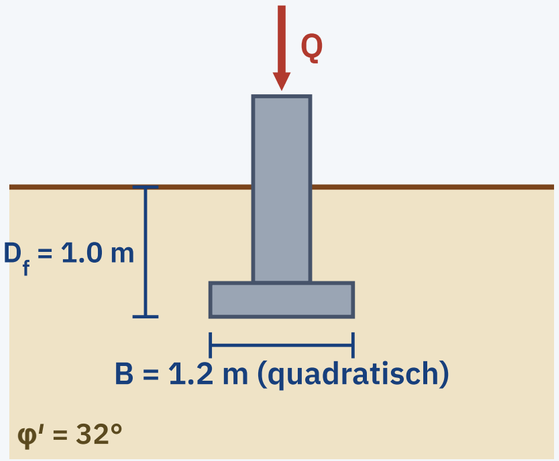
BEISPIEL

Gegeben

Baugrund	$\varphi' = 32°$: $N_c = 35.49$, $\tan\varphi' = 0.6249$, $(1 - \sin 32°)^2 = 0.2210$
Fundament	**B = 1.2 m; D_f = 1.0 m (Beispiel) und zum Vergleich D_f = 2.4 m**
Undräniert	**φ = 0: B = 2 m, D_f = 1.5 m**

GESUCHT

Die Werte von **F_{qd}**, **F_{cd}** und $F_{\gamma d}$ für jeden Fall ermitteln.



Lösung

LÖSUNG

1 $D_f/B = 1.0/1.2 = 0.833 \le 1$ (lineare Form)

$$F_{qd} = 1 + 2(0.6249)(0.2210)(0.833) = \mathbf{1.230}$$

$$F_{cd} = F_{qd} - \frac{1 - F_{qd}}{N_c \tan\varphi} = 1.230 + \frac{0.230}{(35.49)(0.6249)} = \mathbf{1.241}$$

2 $D_f/B = 2.4/1.2 = 2 > 1$ (Arkustangens: $\tan^{-1} 2 = 1.1071$ rad)

$$F_{qd} = 1 + 2(0.6249)(0.2210)(1.1071) = \mathbf{1.306} \qquad F_{cd} = 1.306 + \frac{0.306}{22.18} = \mathbf{1.320}$$

3 Undräniert ($\varphi = 0$): $F_{qd} = 1$; $D_f/B = 1.5/2 = 0.75$

$$F_{cd} = 1 + 0.4(0.75) = \mathbf{1.300} \qquad F_{qd} = 1$$

D_f/B 0.83 → 2: F_{qd} 1.230 → 1.306; der Tiefenbeitrag nimmt zu, **verlangsamt sich aber zunehmend**.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Meyerhof: geneigte Last

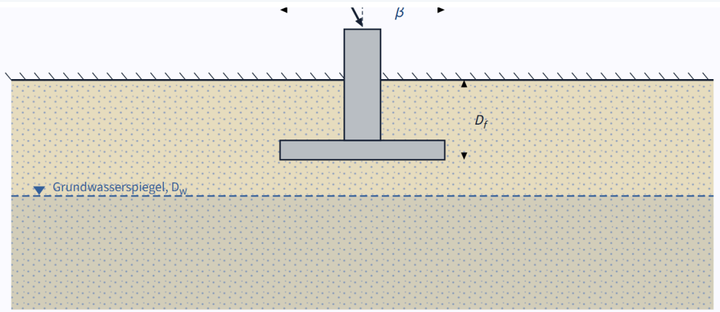
THEORIE

Eine unter dem Winkel β zur Lotrechten geneigte Last mobilisiert einen geringeren vertikalen Widerstand als eine vertikale Last: Ein Teil der Last drückt das Fundament seitlich. Die Gleichung liefert die Tragfähigkeit nur für die **vertikale Komponente** der Last. Die Lastneigungsbeiwerte nach **Meyerhof** (1963) reduzieren jeden Term:

$$F_{ci} = F_{qi} = \left(1 - \frac{\beta^\circ}{90^\circ}\right)^2 \qquad F_{\gamma i} = \left(1 - \frac{\beta}{\varphi}\right)^2 \ (\beta < \varphi) \ ; \ F_{\gamma i} = 0 \ (\beta \geq \varphi)$$

Bei β = 0 sind alle drei gleich 1. $F_{\gamma i}$ erreicht bei β = φ den Wert null und **bleibt** dort: Das Modul lässt kein erneutes Anwachsen von $(1 - \beta/\varphi)^2$ zu. β wird **bis 89°** zugelassen, unterhalb der Stelle, an der $(1 - \beta/90°)^2$ wieder zu wachsen beginnen würde.

Eine geneigte Last verringert die Tragfähigkeit, insbesondere über den Eigengewichtsanteil.



Die Gleichung liefert die Grenztragfähigkeit nur für die VERTIKALE Komponente einer geneigten Last.

Aufgabe

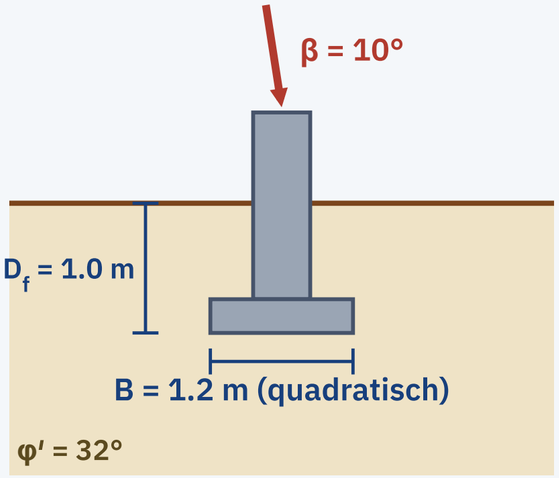
BEISPIEL

Gegeben

Fundament	**quadratisch, B = L = 1.2 m, Einbindetiefe D_f = 1.0 m**
Baugrund	**Sand:** $\varphi' = 32°,\ c = 0$
Wichte	$\gamma = 16\ \mathrm{kN/m^3}$ **(oben),** $\gamma_{sat} = 19.5\ \mathrm{kN/m^3}$ **(unter dem Grundwasserspiegel)**
Last	**β = 10° gegen die Senkrechte (Ergänzung: 20°, 30°, 32°)**

GESUCHT

Die Werte von F_{ci}, F_{qi}, $F_{\gamma i}$ für β = 10° bestimmen; was geschieht bei zunehmendem β?



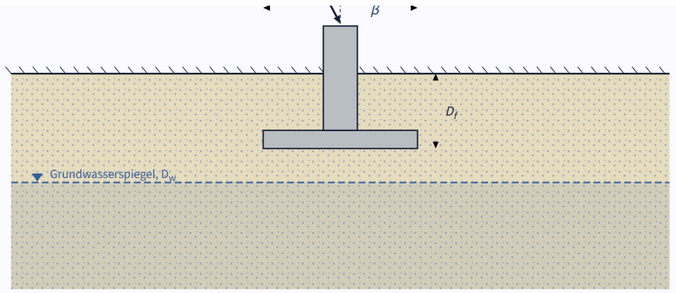
Lösung

LÖSUNG

1 β = 10°, φ′ = 32° (β < φ)

$$F_{ci} = F_{qi} = \left(1 - \frac{10}{90}\right)^2 = \mathbf{0.790}\ ; \quad F_{\gamma i} = \left(1 - \frac{10}{32}\right)^2 = \mathbf{0.473}$$

β (°)	$F_{ci} = F_{qi}$	$F_{\gamma i}$
0	1.000	1.000
10	0.790	0.473
20	0.605	0.141
30	0.444	0.004



Die Gleichung liefert die Grenztragfähigkeit nur für die VERTIKALE Komponente einer geneigten Last.

Eine Last unter 10° verringert die q- und c-Terme um **21 %** und den Eigengewichtsterm um **53 %**; bei β = φ′ = 32° verschwindet der Eigengewichtsterm vollständig.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Allgemeine Gleichung und undränierter Fall

THEORIE

Die allgemeine Gleichung wird mit den Beiwerten aus §5–10 vervollständigt. Unter vertikaler Last sind bei einem **Streifenfundament** in Höhe der Gründungssohle alle Korrekturbeiwerte gleich 1, und die Gleichung nimmt die Form der Gleichung von Terzaghi an: An die Stelle der Beiwerte von Terzaghi treten lediglich Reissner N_q, Prandtl N_c und Vesic N_γ.

Undränierte Beanspruchung ($\varphi = 0$, $c = c_u$): $N_c = 5.14$, $N_q = 1$, $N_\gamma = 0$:

$$q_u = 5.14\, c_u\, F_{cs} F_{cd} F_{ci} + q\, F_{qs} F_{qd} F_{qi}$$

Das Grundwasser geht wie bei Terzaghi (§12) in die Gleichung ein: über q und die Wichte des dritten Terms, **niemals über die Beiwerte**.

Aufgabe

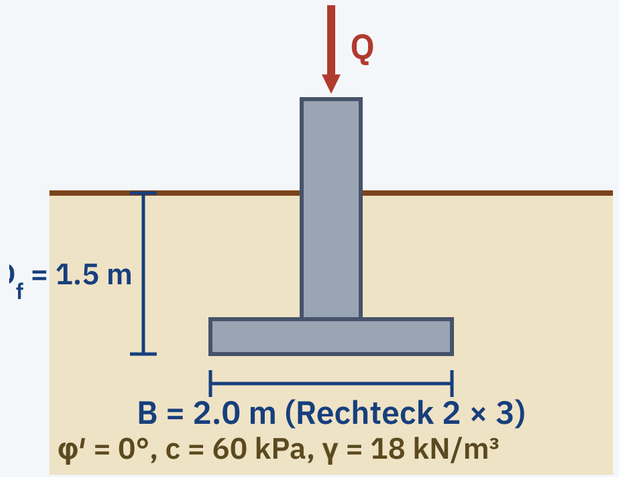
BEISPIEL

Gegeben

Fundament	**rechteckig 2 m × 3 m, D_f = 1.5 m, mittige vertikale Last**
Baugrund	**Ton, $\varphi = 0,\ c_u = 60\ \mathrm{kPa},\ \gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$; kein Grundwasser**
Sicherheit	**FS = 3**

GESUCHT

Gesucht sind q_u, die Brutto-Grundbruchspannung q_{all} und die Netto-Grundbruchspannung.



Lösung

LÖSUNG

1 Auflast und Beiwerte (φ = 0: $N_c = 5.14$, $N_q = 1$, $N_\gamma = 0$)

$$q = \gamma D_f = 18(1.5) = 27\ \text{kPa} \qquad F_{cs} = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5.14} = 1.130 \qquad F_{cd} = 1 + 0.4\frac{1.5}{2} = 1.300$$

2 Tragfähigkeit ($F_{ci} = F_{qi} = 1$; $F_{qs} = F_{qd} = 1$)

$$q_u = 5.14(60)(1.130)(1.300) + 27(1) = 452.9 + 27 = \mathbf{479.9}\ \text{kPa}$$

3 Brutto- und Netto-Grundbruchspannung (zulässige Bodenpressung)

$$q_{all,g} = \frac{479.9}{3} = \mathbf{160.0}\ \text{kPa} \qquad q_{all,n} = \frac{q_u - q}{3} = \frac{452.9}{3} = 151.0\ \text{kPa}$$

Bei undräniertem Ton stammt die Tragfähigkeit nahezu vollständig aus dem **Kohäsionsterm** (453 / 480 kPa): Die Form- (1.13) und Tiefenbeiwerte (1.30) erhöhen sie um etwa 47 %; da bei φ = 0 $N_\gamma = 0$ gilt, entfällt der Eigengewichtsterm.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Beiwerte unverändert; q und γ ändern sich

THEORIE

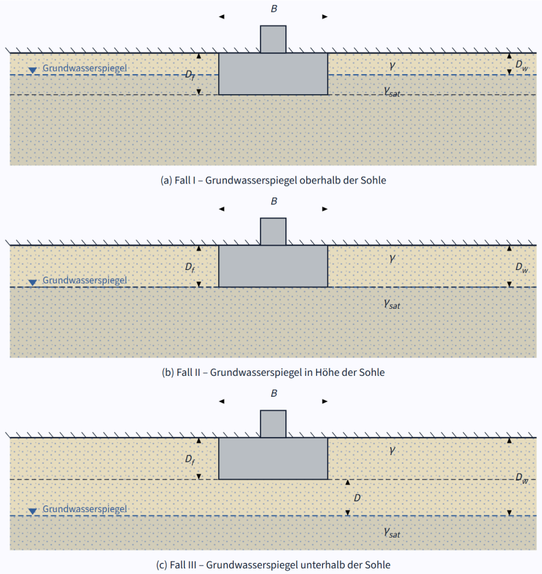
Unterhalb des Grundwasserspiegels wirkt die Wichte unter Auftrieb $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$ ($\gamma_w = 9.81$). Das Modul unterscheidet drei Fälle; D_w ist die Tiefe des Grundwasserspiegels unter der Geländeoberkante:

$$\text{I } (D_w \le D_f):\ q = \gamma D_w + \gamma'(D_f - D_w),\ \ \gamma \to \gamma' \text{ (dritter Term)}$$

$$\text{III } (D_f < D_w \le D_f + B):\ q = \gamma D_f,\ \ \bar{\gamma} = \frac{1}{B}\left[\gamma D + \gamma'(B - D)\right],\ D = D_w - D_f$$

Der Fall II ($D_w = D_f$) ist ein Sonderfall von I: $q = \gamma D_f$, mit γ' im dritten Term.

Wasser **wirkt nicht** tiefer als eine B unter der Sohle.



Aufgabe

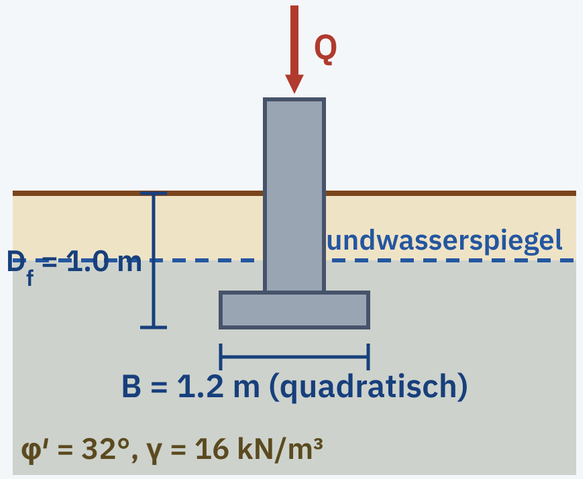
BEISPIEL

Gegeben

Fundament	**quadratisch, B = L = 1.2 m, Einbindetiefe D_f = 1.0 m**
Baugrund	**Sand:** $\varphi' = 32°,\ c = 0$
Wichte	$\gamma = 16\ \mathrm{kN/m^3}$ **(oben),** $\gamma_{sat} = 19.5\ \mathrm{kN/m^3}$ **(unter dem Grundwasserspiegel)**
Last	**vertikal, zentrisch; kein ε**

GESUCHT

Ermitteln Sie die Werte **q**, die Wichte im dritten Term und $\mathbf{q_u}$ für den Grundwasserspiegel D_W = 0.5; 1.0; 1.5 und 2.6 m. (F_{qs} = 1.625; F_{qd} = 1.230; $F_{\gamma s}$ = 0.6; N_q = 23.18; N_γ = 30.21; keine Neigung)



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Fall I ($D_w = 0.5 < D_f$) und $D_w = D_f$

$$D_w = 0.5: \;\; q = 16(0.5) + 9.69(0.5) = 12.845\ \text{kPa},\ \gamma' = 9.69$$

$$D_w = 1.0: \;\; q = 16(1.0) = 16.0\ \text{kPa},\ \gamma' = 9.69$$

2 Fall III ($D_w = 1.5 \Rightarrow D = 0.5\ \text{m} \leq B$) und Wasser ohne Wirkung ($D_w = 2.6 \Rightarrow D = 1.6 > B$)

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{1.2}\left[16(0.5) + 9.69(0.7)\right] = 12.319\ \text{kN/m}^3\ ;\;\; q = 16\ \text{kPa}$$

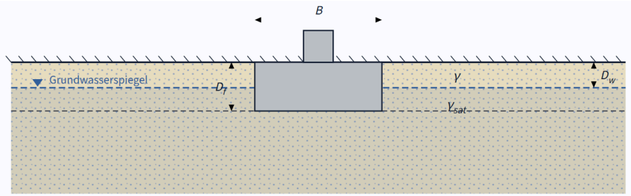
$$D_w = 2.6: \;\; q = 16,\ \gamma = 16$$

Lösung (2/2)

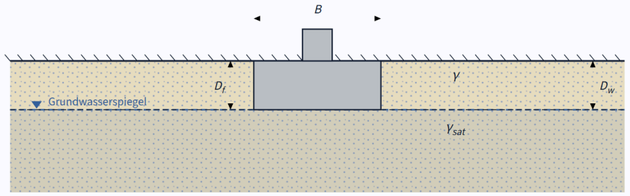
LÖSUNG

D_w (m)	Zustand	q (kPa)	γ dritter Term	q_u (kPa)
0.5	I	12.84	9.69	**520.0**
1.0	I	16.00	9.69	**635.5**
1.5	III	16.00	12.32	**649.0**
2.6	vernachlässigbar	16.00	16.00	**667.9**

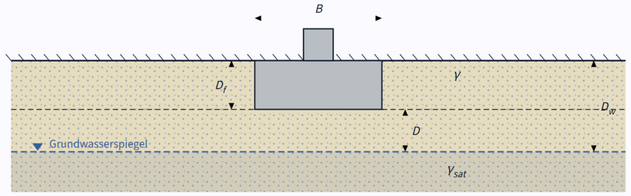
Der Grundwasserspiegel verringert die Tragfähigkeit auf zwei Wegen: Die Auflast q nimmt ab, und der Eigengewichtsterm wird mit γ′ berechnet. Bei Wasser in 0.5 m ist q_u = 520, bei tiefem Wasser 668 kPa (22% Unterschied). Die Beiwerte ändern sich nie: **Das Wasser geht nur über q und γ ein**.



(a) Fall I – Grundwasserspiegel oberhalb der Sohle



(b) Fall II – Grundwasserspiegel in Höhe der Sohle



(c) Fall III – Grundwasserspiegel unterhalb der Sohle

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

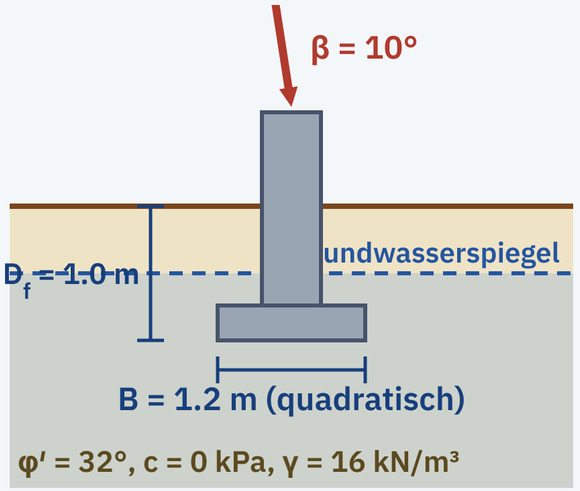
BEISPIEL

Gegeben

Fundament	**quadratisch, B = L = 1.2 m, Einbindetiefe D_f = 1.0 m**
Baugrund	**Sand:** $\varphi' = 32^\circ,\ c = 0$
Wichte	$\gamma = 16\ \mathrm{kN/m^3}$ **(oben),** $\gamma_{sat} = 19.5\ \mathrm{kN/m^3}$ **(unter dem Grundwasserspiegel)**
Grundwasser	**D_w = 0.5 m (Fall I)**
Last	**um β = 10° gegen die Vertikale geneigt**
Sicherheit	**FS = 3**

GESUCHT

q_u, die Brutto-Grundbruchspannung **q_{all}**, die zulässige vertikale Last und die **zulässige resultierende** Last; anschließend q_u für c = 5 kPa.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Beiwerte ($\varphi' = 32°$; $B/L = 1$; $D_f/B = 0.833$; $\beta = 10° < \varphi'$)

$$N_c = 35.49,\ N_q = 23.18,\ N_\gamma = 30.21$$

$$F_{qs} = 1.625,\ F_{\gamma s} = 0.600,\ F_{qd} = 1.230,\ F_{qi} = 0.790,\ F_{\gamma i} = 0.473$$

2 Fall I: $q = 16(0.5) + (19.5 - 9.81)(0.5)$; $\gamma' = 9.69$ kN/m³ (im dritten Term)

$$q = \mathbf{12.845}\ \mathrm{kPa} \qquad \gamma' = \mathbf{9.69}\ \mathrm{kN/m^3}$$

Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Tragfähigkeit (c = 0: kein Kohäsionsterm)

$$q_u = (12.845)(23.18)(1.625)(1.230)(0.790) + \tfrac{1}{2}(9.69)(1.2)(30.21)(0.600)(1)(0.473) = 470.17 + 49.82 = \mathbf{519.99}\ \text{kPa}$$

4 Zulässige Bodenpressung und Lasten (A = 1.2² = 1.44 m²)

$$q_{all,g} = \frac{519.99}{3} = 173.33\ \text{kPa}$$

$$Q_{all} = 173.33(1.44) = \mathbf{249.59}\ \text{kN} \qquad \frac{Q_{all}}{\cos 10^\circ} = \mathbf{253.44}\ \text{kN}$$

5 c = 5 kPa: Kohäsionsterm (F_{cd} = 1.241, F_{cs} = 1.653, F_{ci} = 0.790)

$$c\,N_c F_{cs} F_{cd} F_{ci} = 5(35.49)(1.653)(1.241)(0.790) = 287.51 \ \Rightarrow\ q_u = \mathbf{807.50}\ \text{kPa}$$

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Brutto und netto, vertikal und Resultierende

THEORIE

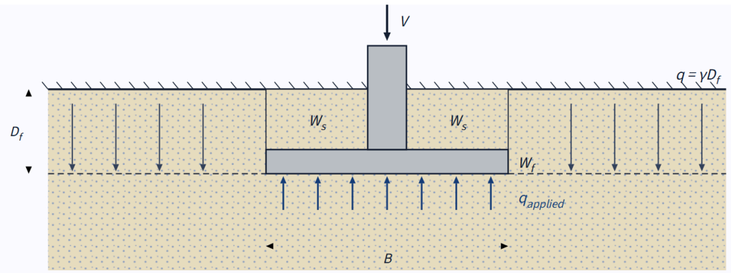
q_u ist der vertikale Druck im Bruchzustand. Das Modul behandelt **Brutto-** und **Netto**druck getrennt:

$$q_{u,net} = q_u - q \qquad q_{all,g} = \frac{q_u}{FS} \qquad q_{all,n} = \frac{q_{u,net}}{FS}$$

Der aufgebrachte Druck q_{app} ist die **vertikale Bruttospannung** an der Sohle unter Gebrauchslasten, V/A; bei ausmittiger Last wird die vertikale Komponente, nicht die Resultierende, durch die Fläche geteilt. Das Fundament ist unter den folgenden Bedingungen zulässig:

$$q_{apply} \le q_{all,g} \qquad FS_{actual} = \frac{q_u}{q_{apply}} \qquad q_{apply} - q \le q_{all,n}$$

Zulässige vertikale Last $Q_{all} = q_{all,g}\,A$; die zulässige Resultierende bei Neigung β ist $Q_{all}/\cos\beta$. Wird q_{app} nicht eingegeben, liefert das Modul nur die Tragfähigkeiten.



Aufgabe

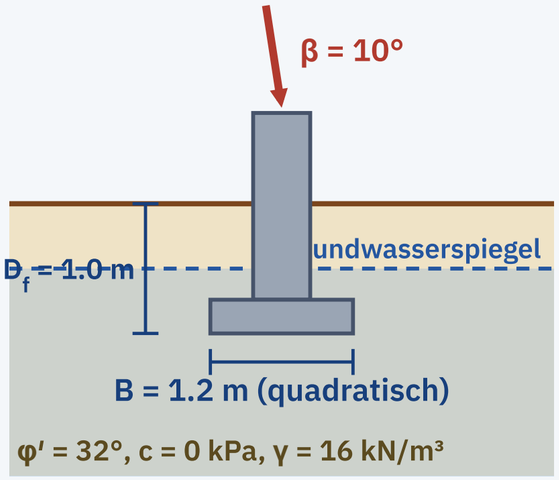
BEISPIEL

Gegeben

Fundament	**quadratisch, B = L = 1.2 m, Einbindetiefe D_f = 1.0 m**
Baugrund	**Sand:** $\varphi' = 32°,\ c = 0$
Wichte	$\gamma = 16\ \mathrm{kN/m^3}$ **(oben),** $\gamma_{sat} = 19.5\ \mathrm{kN/m^3}$ **(unter dem Grundwasserspiegel)**
Grundwasserspiegel, Neigung	**D_W = 0.5 m, β = 10° (Beispiel 8)**
Angesetzt	**q_{vorh} = 150 kPa (vertikal, Brutto)**
Ergebnis (Beispiel 8)	**q_u = 519.99 kPa, q = 12.845 kPa, FS = 3**

GESUCHT

Die drei Bedingungen (Brutto, $FS_{tatsächlich}$, Netto) prüfen.



Lösung

LÖSUNG

1 Zulässige Bruttopressung

$$q_{apply} = 150\ \text{kPa} \leq q_{all,g} = 173.33\ \text{kPa} \ \Rightarrow\ \text{gültig}$$

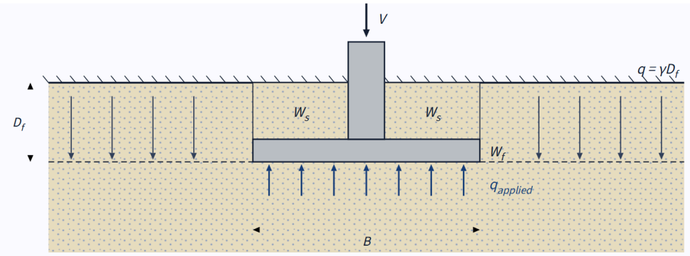
2 Tatsächlicher Sicherheitsfaktor

$$FS_{actual} = \frac{q_u}{q_{apply}} = \frac{519.99}{150} = \mathbf{3.47} \geq 3$$

3 Net

$$q_{apply} - q = 150 - 12.845 = 137.2\ \text{kPa}$$

$$q_{all,n} = \frac{519.99 - 12.845}{3} = 169.0\ \text{kPa} \ \Rightarrow\ \text{gültig}$$



Das Fundament ist unter allen drei Bedingungen ausreichend. Vertikallast V = 150 × 1.44 = 216 kN; Resultierende 216/cos10° = 219.3 kN ≤ zulässige Resultierende 253.4 kN.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Fundament	**quadratisch, B = L = 1.2 m, Einbindetiefe D_f = 1.0 m**
Baugrund	**Sand:** $\varphi' = 32°,\ c = 0$
Wichte	$\gamma = 16\ \mathrm{kN/m^3}$ **(oben),** $\gamma_{sat} = 19.5\ \mathrm{kN/m^3}$ **(unter dem Grundwasserspiegel)**
Grundwasserspiegel, Neigung	**D_w = 0.5 m, β = 10°**
Vergleich	**Vesic N_γ = 30.21 und Meyerhof (1963) N_γ = 22.02**

GESUCHT

Wie würden sich q_u und die Brutto-Grundbruchspannung q_{all} in Beispiel 8 mit dem N_γ nach Meyerhof ergeben?

Lösung

LÖSUNG

1 Nur der dritte Term ändert sich

$$\tfrac{1}{2}(9.69)(1.2)(22.02)(0.600)(0.473) = \mathbf{36.31}\ \text{kPa} \quad (\text{Vesic: } 49.82)$$

2 q_u und q_{all}

$$q_u = 470.17 + 36.31 = \mathbf{506.48}\ \text{kPa} \qquad q_{all,g} = 168.83\ \text{kPa}$$

Bei diesem Fundament beträgt der Unterschied nur **2.6%** (520 → 506 kPa): Der Eigengewichtsterm macht etwa 10% von q_u aus. **Bei einem breiten Fundament** und geringer Auflast wird der Eigengewichtsterm maßgebend, und die Wahl von N_γ verändert das Ergebnis deutlich.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Zusammenfassung

Die wichtigsten Punkte

Allgemeine Gleichung: $q_u = cN_cF_c. + qN_qF_q. + ½\gamma BN_\gamma F_\gamma.$; mit Form- (s), Tiefen- (d) und Neigungsbeiwerten (i)

Theorie nach Meyerhof: Keil unter $45° + \varphi/2$, radiale Zone, Mischzone; dargestellt durch eine äquivalente freie Oberfläche über der Sohle (p_o, s_o, m, η, β)

Flachgründung: $N_q = e^{\pi \tan\varphi}\tan^2(45° + \varphi/2)$ (Reissner), $N_c = (N_q - 1)\cot\varphi$ (Prandtl); $N_\gamma = 2(N_q + 1)\tan\varphi$ (Vesic)

De Beer Formbeiwerte, **Hansen** Tiefenbeiwerte, **Meyerhof** Neigungsbeiwerte; bei $\varphi = 0$ ist $N_c = 5.14$, $N_q = 1$, $N_\gamma = 0$

Grundwasser verändert nur q und γ (3 Fälle), nicht die Beiwerte

Nachweis: $q_{angreifend} \leq q_{all,g}$, $FS_{tatsächlich}$ und netto; bei geneigter Last die sichere Resultierende $Q_{all}/\cos\beta$

Literatur

Meyerhof, G.G. (1951). The ultimate bearing capacity of foundations. Géotechnique, 2(4), 301–332.

Meyerhof, G.G. (1963). Some recent research on the bearing capacity of foundations. Canadian Geotechnical Journal, 1(1), 16–26.

Das, B.M. (2017). Shallow Foundations: Bearing Capacity and Settlement, 3rd ed. CRC Press – Abschnitte 2.4–2.5; diese Seite folgt der Reihenfolge der dortigen Herleitung; im Text dieser Seite als „die Quelle“ bezeichnet.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage – die allgemeine Grundbruchgleichung und ihre Beiwerte; im Text dieser Seite als „die zweite Quelle“ bezeichnet.

Reissner, H. (1924). Zum Erddruckproblem. Proc. 1st Int. Congress of Applied Mechanics, Delft, 295–311.

Prandtl, L. (1921). Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden. ZAMM, 1(1), 15–20.

Vesic, A.S. (1973). Analysis of ultimate loads of shallow foundations. JSMFD, ASCE, 99(SM1), 45–73.

De Beer, E.E. (1970). Experimental determination of the shape factors and the bearing capacity factors of sand. Géotechnique, 20(4), 387–411.

Hansen, J.B. (1970). A revised and extended formula for bearing capacity. Danish Geotechnical Institute Bulletin 28.

Die Abbildungen sind aus dem Mechanismus selbst gezeichnet; das Diagramm von Nq ist aus den Gleichungen dieser Seite berechnet.

HINWEIS

Die Abbildungen in dieser Präsentation sind der Theorieseite von GeoTerva entnommen; alle Rechenbeispiele wurden mit der moduleigenen Berechnungsbibliothek erzeugt, das Modul liefert dieselben Werte.

GeoTerva

Geotechnische Berechnungen online

Von der Theorie zur Praxis

Berechnen Sie das Beispielfundament aus dieser Vorlesung Schritt für Schritt in GeoTerva: Das Modul öffnet sich mit diesem Modell.

Modul öffnen →

Theorieseite →

Auf dem Smartphone öffnen
Die Beispielmodule erfordern keine Registrierung.

Falls Sie sie in Ihren Vorlesungen verwenden möchten: info@geoterva.com