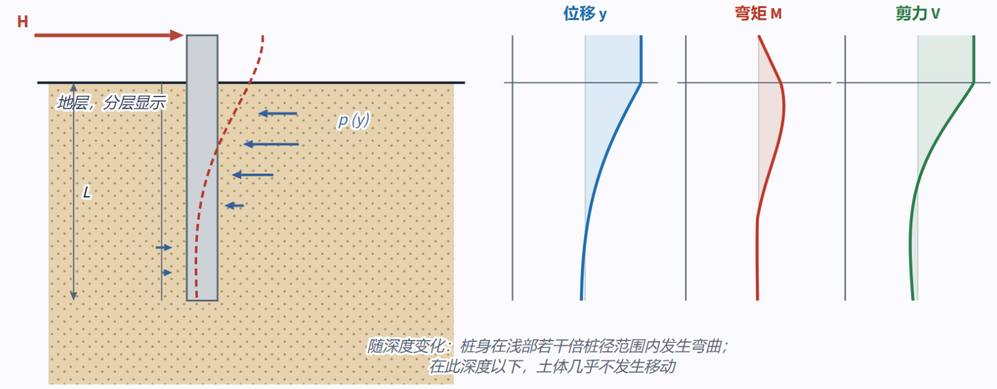
岩土工程讲义 · 桩基工程

水平受荷桩：p–y法

讲义：水平荷载作用下桩按弹簧支承梁求解，砂土与黏土的p–y曲线，循环荷载，轴向荷载和桩头条件；每个主题均配有工程算例。

弹簧支承梁 | 砂土与黏土的p–y曲线 | 循环荷载 | 桩头条件 | 工程算例



引言

本讲内容

- 将水平受荷桩建模为**弹簧支承梁**：方程、符号规定、边界条件
- 手算**弹性解**（Matlock–Reese：砂土，n_h；Hetényi：黏土，k）
- 逐点构建**砂土**的API (Reese–Cox–Koop) p–y曲线和**黏土**的Matlock p–y曲线，包括静力和循环两种情况
- 了解数值解法（有限元、Newton迭代）**做了什么**，以及如何解读结果
- 解释**轴向荷载**(P–δ)、**桩头条件**和**自由长度**的影响
- 确定与容许位移或弯矩承载力相对应的**荷载**

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：规则是什么，为什么如此?

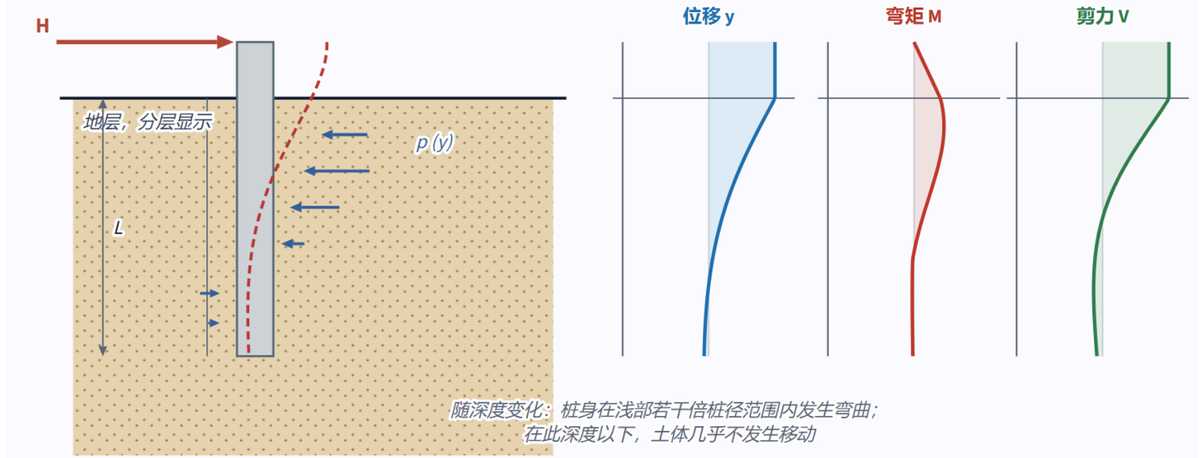
2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例桩：直径0.60 m、长14 m的混凝土桩；位于砂土–黏土–砂土地基中，地面高程处作用120 kN的水平荷载。模块同样默认载入该模型。

荷载只有通过侧向位移才传递给土体。

理论



水平受荷桩不像常规基础那样发生破坏：荷载**仅通过桩的侧向位移**传递给土体；土反力随位移增大，土体屈服后便不再增长。桩在土体最上部**几倍桩径**的深度范围内像梁一样弯曲；更深处土体几乎不动。

极限荷载(Broms)：短桩为土体破坏、长桩为桩身截面破坏时的荷载。它给出承载力，但不给出工作荷载下的位移和弯矩。

弹性基床系数(Matlock–Reese, Davisson–Gill, Hetényi)：土体视为弹性弹簧；封闭解。

p–y法（Matlock、Reese等）：弹簧为**非线性**；p相对于y起初为刚性，随后软化，最终达到土的极限抗力。采用数值求解；分层土，荷载范围从工作荷载直至接近破坏的荷载。

方程、符号与边界条件

理论

桩是一根梁，沿桩的土体是一排弹簧；每个弹簧作用于各自的深度，且相互独立(Winkler)。z自地表向下，y为沿荷载方向的位移：

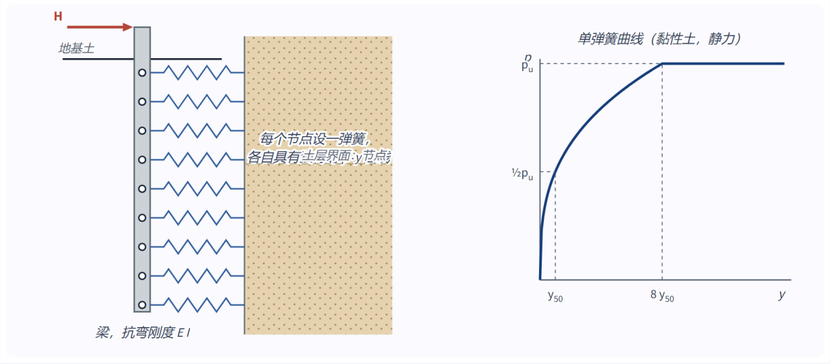
$$EI\frac{d^4y}{dz^4}+P\frac{d^2y}{dz^2}+p(y,z)=0$$

$$\theta=\frac{dy}{dz}\quad M=EI\frac{d^2y}{dz^2}\quad V=EI\frac{d^3y}{dz^3}+P\theta\quad \frac{dV}{dz}=-p$$

p在抵抗位移时为正。对于弹簧刚度k，p = k y；**k = k_h D**（kN/m²，单位长度和单位位移所对应的力）。

桩端自由：M = 0，V = 0。**桩头**：自由时给定H和M_g；若限制转动，则转角为零，约束弯矩为解的一部分。

方程所需的只是土的反力规律p(y, z)：弹性情形下为恒定的k·y，非线性情形下为p–y曲线。



砂土：$k = n_h z$

理论

砂土中，地基土水平反力系数（基床系数）取与深度成正比：$k = n_h z$。桩只有一个**特征长度**；对于地面处的荷载Q和弯矩M_g，位移和弯矩为：

$$T = \left(\frac{EI}{n_h} \right)^{1/5}$$

$$y = A_y \frac{QT^3}{EI} + B_y \frac{M_g T^2}{EI} \qquad M = A_m QT + B_m M_g$$

系数A和B取决于Z = z/T（见旁图）。该桩按**长桩**考虑：L/T较大，桩端不发生移动。

模块用自身的计算引擎重现这些系数：A_y = 2.4292。

系数（长桩）

Z	A_y	A_θ	A_m	B_y	B_θ	B_m
0	2,429	−1,619	0.000	1,619	−1,747	1,000
0.5	1,640	−1,500	0.458	0.871	−1,250	0.974
1	0.961	−1,194	0.725	0.364	−0.789	0.851
1.4	0.543	−0.891	0.770	0.112	−0.480	0.686
2	0.142	−0.462	0.627	−0.070	−0.153	0.404
3	−0.075	−0.039	0.224	−0.089	0.057	0.059

A_m在Z ≈ 1.4处最大(0.77)。

题目

算例

已知条件

桩	**HP 250 × 85, L = 25 m, E I = 25 461 kN·m²**
土	**砂土，n_h = 12 000 kN/m³**
荷载	**Q作用于地表；M_g = 0，桩头自由**
系数	$A_y = 2.4292$**（桩顶），**$A_m = 0.772$**（最大值）**

求

使桩顶位移为**8 mm**，求荷载Q和**最大弯矩**。该桩是否为长桩?

解答

解答

1 特征长度与桩长

$$T = \left(\frac{25\,461}{12\,000}\right)^{1/5} = \mathbf{1.1624}\ \text{m} \qquad \frac{L}{T} = \frac{25}{1.1624} = 21.5 \Rightarrow \text{长桩}$$

2 荷载：$y = A_y\, Q\, T^3 / E\, I \Rightarrow Q = y\, E\, I / (A_y\, T^3)$

$$Q = \frac{0.008(25\,461)}{2.4292\,(1.1624)^3} = \mathbf{53.4}\ \text{kN}$$

3 最大弯矩：$M = A_m\, T\, Q$

$$M_{max} = 0.772\,(1.1624)(53.4) = \mathbf{47.9}\ \text{kN·m}$$

在该荷载下，模块给出桩头位移**8.00 mm**、最大弯矩**47.9 kN·m**：与手算结果一致。

在GeoTerva中验算解答 ↗

黏土：k为常数(Hetényi)

理论

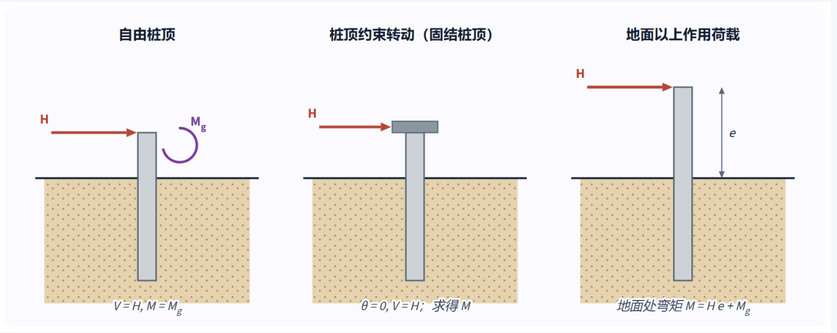
黏土中的地基反力系数随深度取**常数**。k为沿桩长每单位长度的土体刚度；**β = (k / 4EI)$^{1/4}$**。对于长桩，Hetényi的闭合解在地面处作用荷载H时为：

桩顶自由：$y_0 = \frac{2H\beta}{k}$　　$M_{max} = 0.3224\,\frac{H}{\beta}$　$(z = \frac{\pi}{4\beta})$

桩顶约束：$y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3}$　　$M_{head} = -\frac{H}{2\beta}$

桩头转动受约束的桩，其位移仅为自由桩头桩的**一半**；但桩头处的约束弯矩**大于**自由桩头桩的最大弯矩。

实际承台的性状介于这两种极端情形之间；接近极端情形的程度取决于承台与上部结构的刚度。



题目

算例

已知条件

桩	**$D = 0.60$ m，$EI = 190{,}852$ kN·m²（示例桩）**
土	**黏土，$k_h = 15{,}000$ kN/m³ ⇒ $k = k_h D = 9{,}000$ kN/m²**
荷载	**$H = 120$ kN，作用于地面**
桩	**长**

求

用Hetényi闭合解，求**自由桩头**和**固定桩头**情形下的桩头位移和弯矩。

解答 (1/2)

解答

1 β

$$\beta = \left(\frac{k}{4EI}\right)^{1/4} = \left(\frac{9{,}000}{4(190{,}852)}\right)^{1/4} = \mathbf{0.3295}\ \text{m}^{-1}$$

2 自由桩头

$$y_0 = \frac{2H\beta}{k} = \frac{2(120)(0.3295)}{9{,}000} = \mathbf{8.79}\ \text{mm}$$

$$M_{max} = 0.3224\frac{H}{\beta} = 0.3224\frac{120}{0.3295} = \mathbf{117.4}\ \text{kN·m} \quad \left(z = \tfrac{\pi}{4\beta} = 2.38\ \text{m}\right)$$

解答 (2/2)

解答

3 桩顶固定

$$y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} = \frac{120}{4(190{,}852)(0.3295)^3} = \mathbf{4.39}\ \text{mm}$$

$$M_{head} = -\frac{H}{2\beta} = -\frac{120}{2(0.3295)} = -\mathbf{182.1}\ \text{kN·m}$$

桩头固定使桩头位移减小**一半**(8.79 → 4.39 mm)，但桩头弯矩(182.1 kN·m)是自由头桩最大弯矩(117.4 kN·m)的**1.55倍**。模块的弹性选项给出相同的数值：自由头为8.79 mm和117.4 kN·m，固定头为4.39 mm和182.1 kN·m。

在GeoTerva中验算解答 ↗

API RP 2A：Reese、Cox和Koop

理论

靠近地表的土体在桩前被推成**土楔**；更深处的土体则**绕桩周水平流动**。深度z处（σ′：该深度处的有效应力）的极限抗力取二者中的较小值：

$$p_{us} = (C_1 z + C_2 D)\,\sigma' \qquad p_{ud} = C_3 D\,\sigma'$$

$$p = A\,p_u \tanh\left(\frac{k\,z\,y}{A\,p_u}\right) \quad A = \max\left(0.9;\ 3 - 0.8\tfrac{z}{D}\right)\ \text{（静态）}，\ A = 0.9\ \text{（循环）}$$

C_1、C_2、C_3仅取决于**φ′**；k为初始模量，按φ′及水的情况取值（见右侧）。

y较小时，曲线为直线**k z y**（弹性解的n_h = k情形）；y较大时，终止于**A p_u**。A在地表处为3.0，在2.6D深度处为0.9：靠近地表的静力抗力较高，循环荷载下则无此增大。

随φ′变化的系数

φ′	C_1	C_2	C_3	k（水位以上）	k（水位以下）
28°	1.60	2.41	22.5	5.4	5.4
30°	1.91	2.67	28.7	10.5	7.9
32°	2.28	2.95	36.8	20.7	11.9
34°	2.72	3.25	47.3	32.7	17.6
36°	3.24	3.59	61.2	46.3	24.8
38°	3.87	3.97	79.6	61.7	33.6
40°	4.62	4.38	104.1	78.9	44.0

k：MN/m³。32°时，C_1 = 2.28；C_2 = 2.95；C_3 = 36.8。

题目

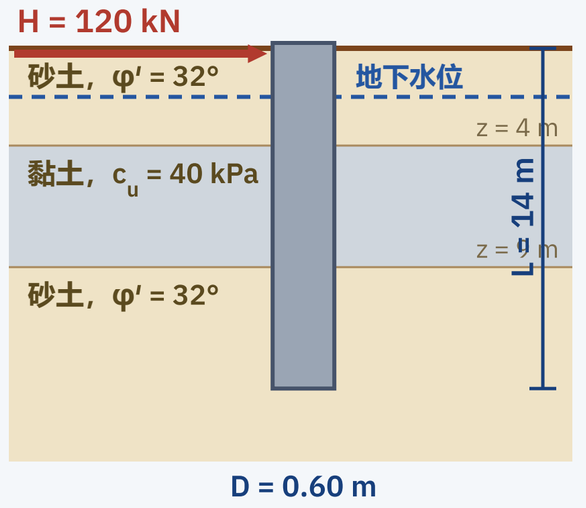
算例

已知条件

桩	**钻孔灌注桩，圆形截面，D = 0.60 m，L = 14 m，混凝土：E I = 190 852 kN·m²**
土	**砂土0–4 m(φ′ = 32°) · 黏土4–9 m(c_u = 40 kPa) · 砂土9–17 m(φ′ = 32°)**
重度、水	**γ = 18，γ_{sat} = 19 kN/m³；地下水位2.0 m**
深度	**z = 2.0 m（砂土1，地下水位处）；k = 20.7 MN/m³（水位以上）**
系数	$K_0 = 0.4,\ K_a = \tan^2(45^\circ - \varphi'/2)$

求

求σ′、C_1、C_2、C_3、p_u、A，以及y = 5 mm和10 mm时的p值。



解答 (1/2)

解答

1 有效应力与角度（地下水位为2 m：从地表至z = 2为湿润状态）

$$\sigma' = 18(2) = \mathbf{36.0}\ \text{kPa} \qquad \alpha = \frac{\varphi'}{2} = 16^\circ,\ \beta = 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} = 61^\circ,\ K_a = \tan^2 29^\circ = 0.3073$$

2 系数(φ′ = 32°)

$$C_1 = \frac{K_0 \tan\varphi' \sin\beta}{\tan(\beta-\varphi')\cos\alpha} + \frac{\tan^2\beta\tan\alpha}{\tan(\beta-\varphi')} + K_0\tan\beta(\tan\varphi'\sin\beta - \tan\alpha) = \mathbf{2.281}$$

$$C_2 = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\varphi')} - K_a = \mathbf{2.947}$$

$$C_3 = K_a(\tan^8\beta - 1) + K_0\tan\varphi'\tan^4\beta = \mathbf{36.81}$$

解答 (2/2)

解答

3 极限抗力：取土楔破坏与绕桩周流动破坏中的较小值

$$p_{us} = (2.281(2) + 2.947(0.6))(36.0) = 227.9 \text{ kN/m}$$

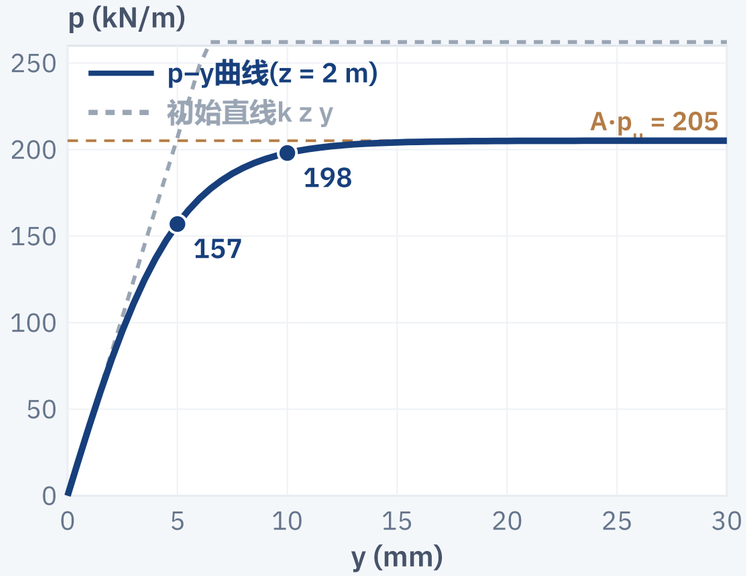
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(36.0) = 795 \text{ kN/m} \Rightarrow p_u = \mathbf{227.9} \text{ kN/m}$$

4 A和曲线：A = max(0.9; 3 − 0.8 z/D) = max(0.9; 0.33) = 0.9；k z y / (A p_u)

$$y = 5 \text{ mm}: \ p = 0.9(227.9)\tanh\frac{20\,700(2)(0.005)}{0.9(227.9)}$$

$$= \mathbf{157.0} \text{ kN/m}$$

$$y = 10 \text{ mm}: \ p = \mathbf{198.0} \text{ kN/m}$$



曲线A趋近于p_u = 205 kN/m；在10 mm时已达到其97%。在该深度处，静力曲线与循环曲线**相同**（两者的A均为0.9）。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

桩	**钻孔灌注桩，圆形截面，D = 0.60 m，L = 14 m，混凝土：E I = 190 852 kN·m²**
土	**砂土0–4 m(φ′ = 32°) · 黏土4–9 m(c_u = 40 kPa) · 砂土9–17 m(φ′ = 32°)**
重度、水	**γ = 18，γ_{sat} = 19 kN/m³；地下水位2.0 m**
深度	**z = 0.6 m (1D), σ′ = 18(0.6) = 10.8 kPa; k = 20.7 MN/m³**
砂土1	**C_1 = 2.281，C_2 = 2.947，C_3 = 36.81（算例3）**

求

求y = 10 mm时的静力和循环**p–y**值。

解答

解答

1 极限抗力与A

$$p_{us} = (2.281(0.6) + 2.947(0.6))(10.8) = 33.9 \text{ kN/m}$$

$$p_{ud} = 36.81(0.6)(10.8) = 238.6 \text{ kN/m} \Rightarrow p_u = \mathbf{33.9} \text{ kN/m}$$

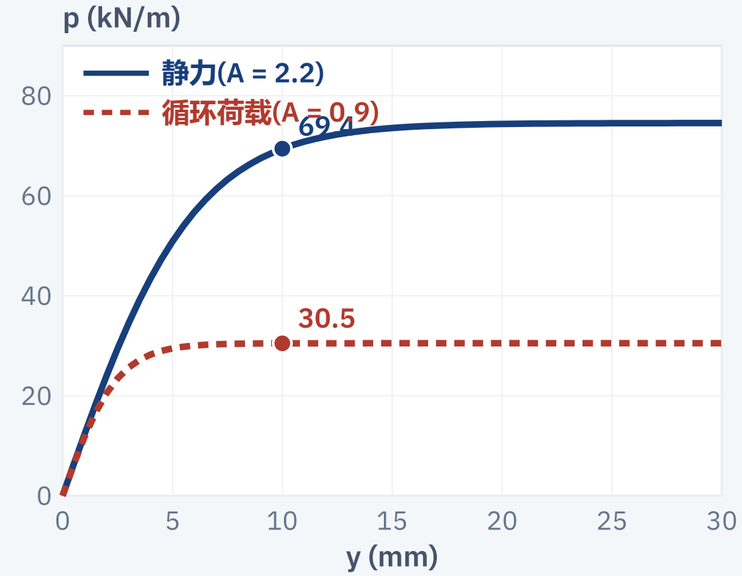
$$A_{static} = \max(0.9;\ 3 - 0.8(1)) = 2.2 \qquad A_{cyclic} = 0.9$$

2 y = 10 mm: k z y = 20 700(0.6)(0.010) = 124.2

$$p_{static} = 2.2(33.9)\tanh\frac{124.2}{2.2(33.9)} = \mathbf{69.4} \text{ kN/m}$$

$$p_{cyclic} = 0.9(33.9)\tanh\frac{124.2}{0.9(33.9)} = \mathbf{30.5} \text{ kN/m}$$

在近地表的砂土中，循环荷载使抗力降低**56%** (69.4 → 30.5 kN/m)：失去了系数A。因此循环荷载下的桩头位移增大。



在GeoTerva中验算解答 ↗

Matlock：软黏土，静力与循环加载

理论

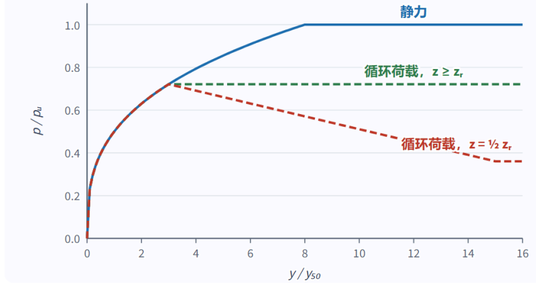
在黏土中，模块采用API RP 2A所给出形式的**Matlock** (1970)软黏土曲线。极限抗力仍取近地表（土楔）与深部（流动）两种数值中的较小者：

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{\sigma'}{c_u} + J\frac{z}{D}\right)c_u D;\ 9c_u D\right]$$

$$p = \tfrac{1}{2}p_u\left(\frac{y}{y_{50}}\right)^{1/3}\ (y \le 8y_{50}) \quad p = p_u\ (y > 8y_{50}) \quad y_{50} = 2.5\,\varepsilon_{50} D$$

ε₅₀和J随c_u取值：低于48 kPa为软(0.020; 0.5)，48–96为中等(0.010; 0.25)，高于96为硬(0.005; 0.25)。

循环荷载：超过3y_{50}之后，曲线保持在0.72 p_u（$z \ge z_R$）；在更浅处，曲线**线性下降**，至15y_{50}处为0.72 p_u z/z_R。z_R = max[6D / ((σ′/z)(D/c_u) + J); 2.5D]。



静载：p = ½ pᵤ (y / y₅₀)^⅓，直至 8 y₅₀，之后 p = pᵤ

循环荷载：至 3 y₅₀ 处相同（该点为 0.72 pᵤ），当 z ≥ zᵣ 时保持为 0.72 pᵤ，且在靠近泥面区域线性衰减至在 0.72 y₅₀ 处为 15 pᵤ z / zᵣ

题目

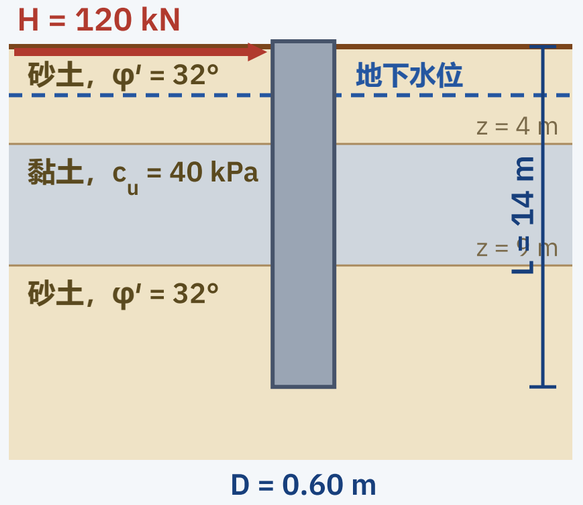
算例

已知条件

桩	**钻孔灌注桩，圆形截面，D = 0.60 m，L = 14 m，混凝土：E I = 190 852 kN·m²**
土	**砂土0–4 m(φ′ = 32°) · 黏土4–9 m(c_u = 40 kPa) · 砂土9–17 m(φ′ = 32°)**
重度、水	**γ = 18，γ_{sat} = 19 kN/m³；地下水位2.0 m**
深度	**z = 6.5 m（黏土，4–9 m）；ε_{50} = 0.020，J = 0.5**
土层	**c_u = 40 kPa**

求

求y = 15 mm和150 mm时的σ′、p_u、y_{50}以及**静力**p–y值；求**循环**曲线的z_R和平台值。



解答 (1/2)

解答

1 σ′：砂土0–2 m潮湿(γ = 18)，砂土2–4 m和黏土4–6.5 m浸水(γ_{sat} = 19)

$$\sigma' = 18(2) + (19 - 9.81)(2) + (19 - 9.81)(2.5) = \mathbf{77.4}\ \text{kPa}$$

2 极限抗力与y_{50}

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{77.4}{40} + 0.5\frac{6.5}{0.6}\right)(40)(0.6);\ 9(40)(0.6)\right]$$

$$= \min[248.4;\ 216.0] = \mathbf{216.0}\ \text{kN/m}$$

$$y_{50} = 2.5(0.020)(0.6) = \mathbf{30.0}\ \text{mm}$$

解答 (2/2)

解答

3 静力曲线：$p = \frac{1}{2}\, p_u\, (y/y_{50})^{1/3}$

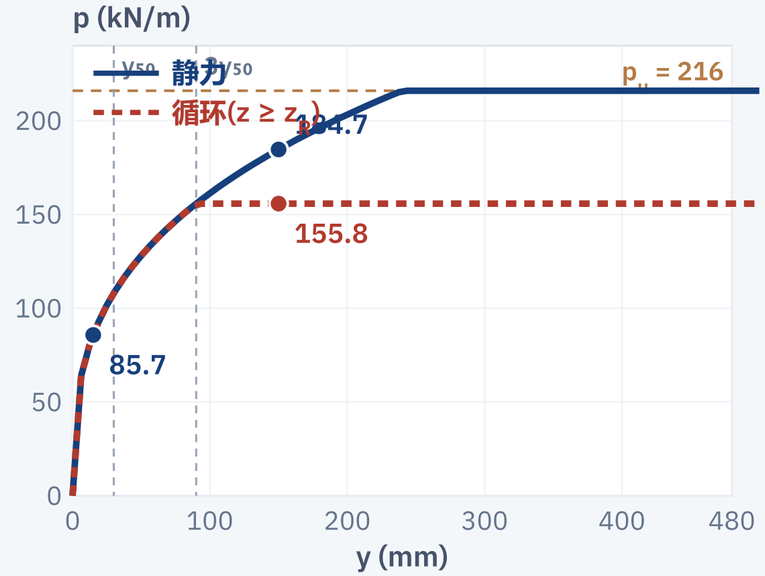
$$y = 15 \text{ mm } (0.5y_{50}): \; p = 0.5(216.0)(0.5)^{1/3} = \mathbf{85.7} \text{ kN/m}$$

$$y = 150 \text{ mm } (5y_{50}): \; p = 0.5(216.0)(5)^{1/3} = \mathbf{184.7} \text{ kN/m}$$

4 循环加载曲线：$z_R = \max[6(0.6)/((\sigma'/z)(D/c_u) + J);\ 2.5D] = \max[5.31;\ 1.5] = 5.31$ m; z = 6.5 > z_R

$$p_{perimeter}(y \geq 3y_{50}) = 0.72\, p_u = 0.7211(216.0) = \mathbf{155.8} \text{ kN/m}$$

y = 150 mm时，静力抗力为184.7，循环抗力为155.8 kN/m：循环荷载使这种黏土的抗力降低**16%**；直到3y_{50}(90 mm)为止，两条曲线完全相同。



在GeoTerva中验算解答 ↗

每条曲线对应于其所在深度处的土体

理论

σ′由上覆各土层的重度累加而得（水位以上取γ，水位以下取$\gamma_{sat}-\gamma_w$）；它**不是该土层的平均值**，而是在土层内随深度增大。

在z处，土层给出φ′和k（砂土）或c_u、ε_{50}和J（黏土）。砂土的初始模量k按土层相对于水位的位置取值；在被水位截断的土层中，按土层中点深度填入，并可手动修改。

单元**不跨越任何土层界面**：每个界面处均设有节点；土体刚度的突变出现在单元之间，而不在单元内部。

计算页面在每一土层的中点处逐步给出曲线的各项数值：σ′、系数、p_u、A或y_{50}，均可手算复现（如本讲义的算例3和5）。

各土层必须延伸至桩端；桩端以下的土未作定义，桩端为自由端。坚硬砂层之上的软黏土，在图中表现为分界处的**折点**。

有限元与Newton法

理论

方程采用有限元法求解：将桩划分为**三次梁单元**，每个节点取位移y与转角θ。每个单元内的土反力在**四个Gauss积分点**处由曲线取值并进行积分。非线性方程K u + f(u) = F采用Newton法求解：

$$(K + K_s(u_i))\,\Delta u = F - K u_i - f(u_i) \qquad K_s = \int N^T \frac{dp}{dy} N \, dz$$

dp/dy不会降到割线刚度的**二十分之一**以下：即使在曲线平坦或下降的区段，矩阵仍保持为正。设有步长缩减的直线搜索，若失败则采用阻尼割线步。

单元长度取D/6 (3–15 cm)；直至所示的各级细化步长，结果**均与网格无关**（单元长度0.4 → 0.025 m：桩头位移6.228 → 6.228 mm）。

荷载超过土体所能承受的限度时，**不存在平衡**；模块对此予以说明，且不给出数值。若土体在地表以下发生的位移超过**五倍桩宽**，该解同样不被计入。

黏土的循环曲线或轴向荷载下的响应并非单一的上升曲线，而是上升至**极限荷载**。模块从零开始分步加载至该荷载。

每次计算均写出两项验算：Σ p Δz = H，以及桩端弯矩为0（静力平衡）。

P–δ效应与屈曲

理论

轴向荷载P沿桩的**挠曲形状**作用：它出现在方程中（P d²y/dz²项）以及每个单元的几何刚度中；它降低受压梁的侧向刚度，增大位移和弯矩。模块取P沿全长为常数，且桩头与桩端相同（实际上，桩侧摩阻力会将荷载传给土体；取为常数偏于安全）。

$$P_{cr} = \sqrt{k\,EI} \qquad \text{(桩顶自由，}\ k\ \text{常数，长桩)}$$

它是无限长梁2√(kEI)值的**一半**：自由端可以转动。桩头固定时，在更大的荷载下才发生屈曲。

P趋近屈曲荷载时，荷载–位移关系无限增大；模块提示**“轴向荷载超过屈曲荷载”**。

桩截面在轴向荷载与弯矩共同作用下的承载能力属于结构设计验算。

算例桩

当E I = 190,852 kN·m²且弹性黏土中k = 9,000 kN/m²时：

$$P_{cr} = \sqrt{9{,}000\,(190{,}852)} = 41{,}445\ \text{kN}$$

题目

算例

已知条件

桩	**钻孔灌注桩，圆形截面，D = 0.60 m，L = 14 m，混凝土：E I = 190 852 kN·m²**
土	**砂土0–4 m(φ′ = 32°) · 黏土4–9 m(c_u = 40 kPa) · 砂土9–17 m(φ′ = 32°)**
重度、水	**γ = 18，γ_{sat} = 19 kN/m³；地下水位2.0 m**
荷载	**H = 120 kN；轴向荷载P = 800 kN（恒定）**
屈曲	**k = k_h D = 9,000 kN/m²（弹性黏土），桩头自由**
模块	**P = 0：桩顶6.23 mm，M_{max} 151.8 kN·m**

求

P = 800 kN是否**接近**屈曲荷载?

P–δ效应有多大?

解答

解答

1 屈曲荷载（桩头自由，k为常数）

$$P_{cr} = \sqrt{kEI} = \sqrt{9{,}000(190{,}852)} = \mathbf{41{,}445}\ \text{kN} \qquad \frac{P}{P_{cr}} = \frac{800}{41{,}445} = \mathbf{0.019}$$

2 模块中采用P = 800 kN（含P–δ效应）

$$y_{head}：\ 6.23 \rightarrow 6.32\ \text{mm}\ \ (+2\%) \qquad M_{max}：\ 151.8 \rightarrow 154.5\ \text{kN·m}\ \ (+2\%)$$

800 kN仅为屈曲荷载的**2%**：轴向荷载并未使桩接近屈曲；P–δ效应使位移增大2%、弯矩增大2%。对该桩而言，水平受荷分析中轴向荷载是次要的，但不可忽略。

在GeoTerva中验算解答 ↗

自由、固定和地面以上的荷载

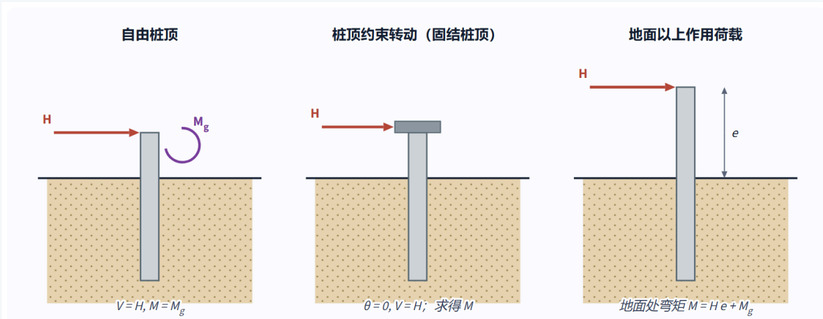
理论

桩头自由：在荷载作用点处V = H且M = M_g。

固定桩头：转角为零，桩头产生侧向位移。在长、均匀、弹性地基中，其位移仅为自由桩头情形的**一半**；约束弯矩M = −H/(2β)大于自由桩的最大弯矩。实际承台介于这两种情形之间。

自由长度e：地面以上的桩如悬臂梁般弯曲。直至地面处剪力均为H，弯矩在地面处达到**M(0) = M_g + H e**；从该处起土体开始起作用。

桩头位移=地面处位移+地面处转角×e+自由段的悬臂位移(H e^3 / 3EI)。在相同荷载作用下，存在自由段时桩头位移**远大于**地面处位移；最大弯矩多出现在地面处或其略下方。



题目

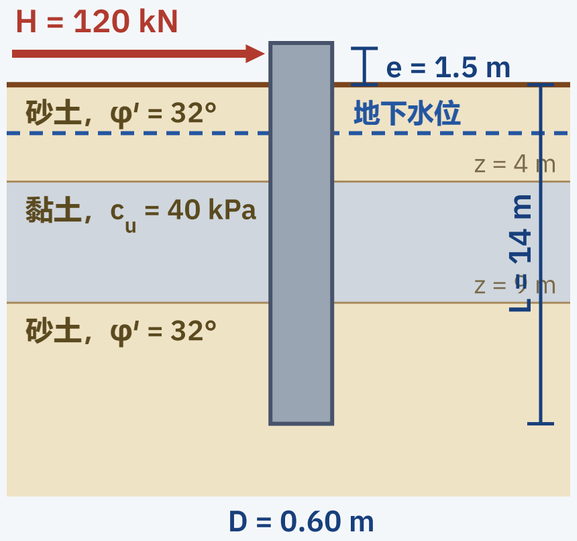
算例

已知条件

桩	**钻孔灌注桩，圆形截面，D = 0.60 m，L = 14 m，混凝土：E I = 190 852 kN·m²**
土	**砂土0–4 m(φ′ = 32°) · 黏土4–9 m(c_u = 40 kPa) · 砂土9–17 m(φ′ = 32°)**
重度、水	**γ = 18，γ_{sat} = 19 kN/m³；地下水位2.0 m**
自由段长度	**荷载位于地面以上e = 1.5 m处；H = 120 kN，桩头自由**
模量（地表处）	**y_{ground} = 11.12 mm，转角 = 0.321°（朝向荷载）**

求

求地表处的**弯矩**和**桩头位移**，并将结果与模块给出的20.23 mm比较。



解答

解答

1 地表处的弯矩（自由段内剪力为H，$M_g = 0$）

$$M(0) = M_g + H\,e = 0 + 120(1.5) = \mathbf{180}\ \text{kN·m}$$

2 自由长度的悬臂位移

$$\frac{H\,e^3}{3EI} = \frac{120(1.5)^3}{3(190{,}852)} = 0.71\ \text{mm}$$

3 桩头位移=y_{soil} + |θ| e + H e^3/3EI

$$y_{head} = 11.12 + 5.605(1.5) + 0.71 = \mathbf{20.23}\ \text{mm}$$

手算得**20.23 mm**，模块得20.23 mm：二者一致。荷载作用于地面标高时，桩头位移为6.23 mm；1.5 m的自由长度使位移增大到**3.2倍**。最大弯矩为306 kN·m，位于地面以下1.68 m处（大于地面处的180 kN·m）。

在GeoTerva中验算解答 ↗

各数值说明什么?

理论

桩头位移y和转角（斜率dy/dz；桩沿荷载方向倾斜时为负）。若有自由段，则同时给出地面处的值。

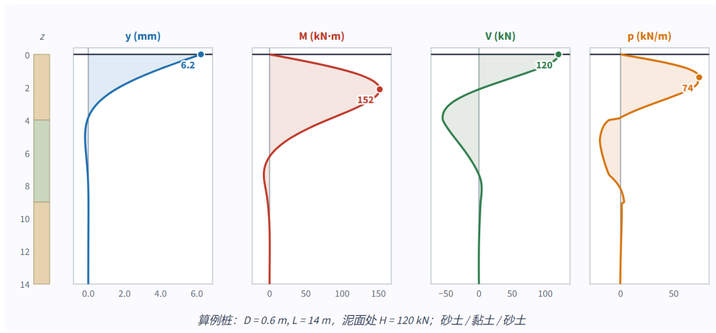
最大弯矩及其深度。桩头固定时，桩头弯矩也一并列出；它并不总是最大值。

零位移深度：桩与自身轴线相交之处；其上桩身向土体一侧位移，其下桩身背离土体位移。

剪力与土反力；将反力与p–y曲线末端并排绘出：由此可见土体接近其极限的程度。

桩端：足够长的桩，其桩端处没有位移。若桩端位移大于地表位移的十分之一且大于2 mm，则对该荷载而言桩**偏短**：桩像刚体一样转动，桩长对结果起决定作用。

p–y视图在发生位移的区段内绘出五个深度处的曲线，并在每条曲线上标出**所达到的点**：位于曲线平直起始段的点处于弹性状态，接近曲线末端的点已达极限状态。



算例桩：D = 0.6 m, L = 14 m，泥面处 H = 120 kN；砂土 / 黏土 / 砂土

题目

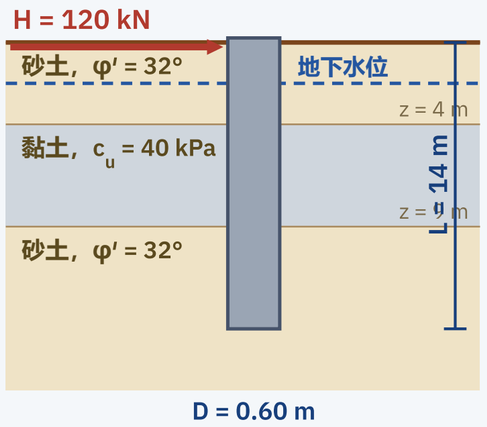
算例

已知条件

桩	**钻孔灌注桩，圆形截面，D = 0.60 m，L = 14 m，混凝土：E I = 190 852 kN·m²**
土	**砂土0–4 m(φ′ = 32°) · 黏土4–9 m(c_u = 40 kPa) · 砂土9–17 m(φ′ = 32°)**
重度、水	**γ = 18，γ_{sat} = 19 kN/m³；地下水位2.0 m**
模块结果	**桩头y = 6.23 mm，转角0.150°；M_{max} = 151.8 kN·m(z = 2.13 m)；位移为零处z = 3.85 m；桩端 0.0019 mm**
最大土反力	**p = 74.0 kN/m, z = 1.40 m; A = max(0.9; 3 − 0.8(1.4)/0.6), p_u = 125.0 kN/m**

求

该桩对此荷载是否属**长桩**？土体在1.40 m深度处发挥到其极限的**百分之几**？评述静力验算结果。



解答 (1/2)

解答

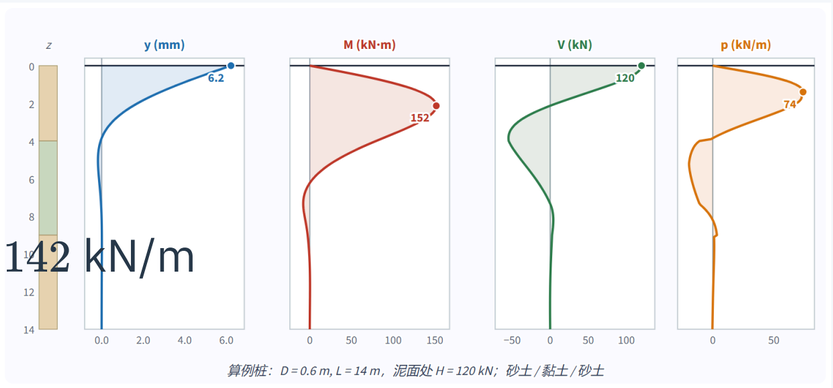
1 桩端条件：将桩端位移分别与地面处位移的十分之一和2 mm比较

$$y_{tip} = 0.0019 \text{ mm} \ll 0.1(6.23) = 0.62 \text{ mm} \;\Rightarrow\; \text{长桩}$$

2 土体在1.40 m处达到其极限的多大比例?

$$A = \max\left(0.9;\; 3 - \frac{0.8(1.4)}{0.6}\right) = 1.133\;; \quad A\,p_u = 1.133(125.0) = 142 \text{ kN/m}$$

$$\frac{p}{Ap_u} = \frac{74.0}{142} = \mathbf{0.52}$$



算例桩：D = 0.6 m, L = 14 m，泥面处 H = 120 kN；砂土 / 黏土 / 砂土

解答 (2/2)

解答

3 静力验算

$$\sum p\,\Delta z = 120.000\ \text{kN} = H \qquad M_{tip}\ (\text{取自静态}) = 0.000\ \text{kN·m} \qquad 7\ \text{迭代}$$

该桩为**长桩**；土体在1.40 m处的发挥程度为其极限的**52%**（不在曲线末端）。两项验算也均满足：它们是对迭代和核算的验算，**而不是对模型准确性的验证。**

在GeoTerva中验算解答 ↗

对应容许值的荷载

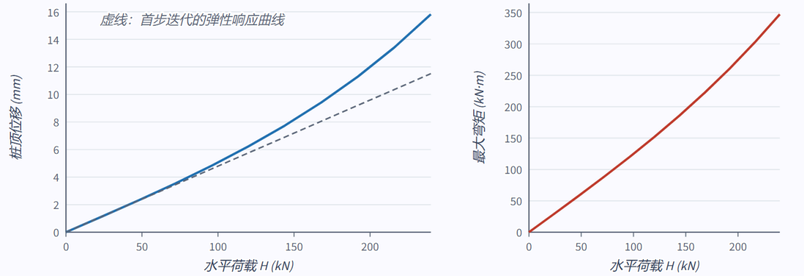
理论

由于土体为非线性，位移与荷载不成正比；**容许位移对应的荷载**无法从工作荷载下的结果中直接读出。模块自初始起按比例增大荷载与弯矩（对H和M_g乘以系数λ，轴向荷载保持不变），在每一步重新求解方程，并求出桩顶位移达到容许值（或最大弯矩达到截面承载力）时的λ：H_y或H_M。

若土体无法承担容许值（即在达到该值之前无法平衡），模块给出**“未达到”**，曲线终止于最后一个求解的荷载。循环加载黏土或有轴向荷载时，曲线发生弯折：这就是**土的极限荷载**。

这并非桩的承载力：模块中桩按弹性处理；受弯屈服的桩可能先于土体破坏。所输入的弯矩承载力即用于对此进行验算。

模块不给出安全系数，也不从规范中取用：容许位移和弯矩承载力由工程师自行确定。



题目

算例

已知条件

桩	钻孔灌注桩，圆形截面，D = 0.60 m，L = 14 m，混凝土：E I = 190 852 kN·m²
土	砂土0–4 m($\varphi' = 32°$) · 黏土4–9 m($c_u = 40$ kPa) · 砂土9–17 m($\varphi' = 32°$)
重度、水	$\gamma = 18$，$\gamma_{sat} = 19$ kN/m³；地下水位2.0 m
非线性解	H = 30, 60, …, 270 kN时的桩头位移：1.44 · 2.93 · 4.51 · 6.23 · 8.15 · 10.33 · 12.86 · 15.82 · 19.29 mm
容许值	y_{all} = 10 mm；抗弯承载力M_{cap} = 200 kN·m

求

y_{all} = 10 mm时的荷载H_y，M_{cap}对应的H_M；若采用线性比例关系，误差会有多大?

解答

解答

1 线性比例（由工作荷载下的6.23 mm推算）与精确解

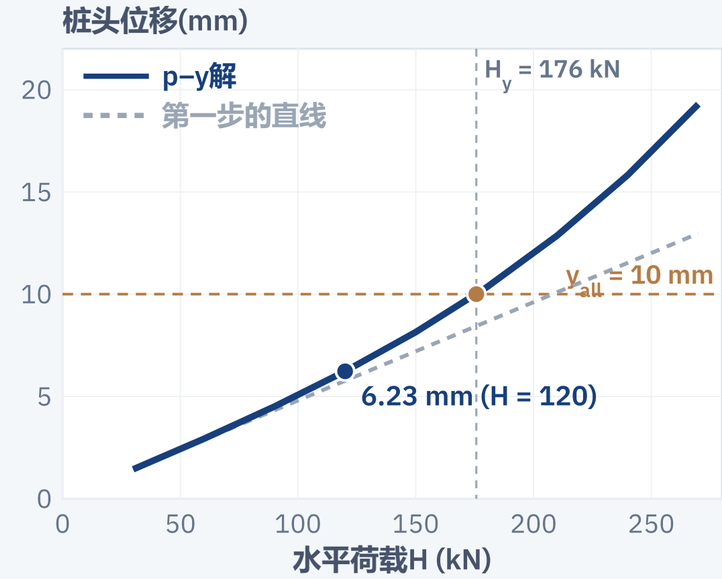
$$H_{y,linear} = 120\,\frac{10}{6.23} = 192.7\ \text{kN}$$

$$H_y = \mathbf{175.7}\ \text{kN}\ (\lambda = 1.464)$$

2 对应弯矩承载力的荷载

$$H_M = \mathbf{153.6}\ \text{kN}\ \ (\lambda = 1.280;\ y_{head} = 8.39\ \text{mm})$$

按线性比例推算，所得荷载将**偏大10%**(193 ≠ 176 kN)：随着土体软化，位移的增长快于荷载的增长。**起控制作用的**是弯矩：H_M = 154 kN，在该荷载下桩头位移仅为8.4 mm；在允许位移所对应的荷载(H_y = 176 kN)作用下，弯矩将达到234 kN·m。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

桩	钻孔灌注桩，圆形截面，D = 0.60 m，L = 14 m，混凝土：E I = 190 852 kN·m²
土	砂土0–4 m($\varphi' = 32°$) · 黏土4–9 m($c_u = 40$ kPa) · 砂土9–17 m($\varphi' = 32°$)
重度、水	$\gamma = 18$，$\gamma_{sat} = 19$ kN/m³；地下水位2.0 m
待对比	桩头条件 · 自由长度 · 循环荷载 · 轴向荷载(800 kN) · 开裂截面(E I × 0.6) · 弹性地基($n_h = 8$ MN/m³, $k_h = 15$ MN/m³)

求

对每种情况，按工作荷载比较桩头位移和最大弯矩。

解答

解答

状态	y_{head} (mm)	M_{max} (kN·m)	y / y_0	M / M_0
按输入条件：自由、静力、位于地面标高处	6.23	152	1.00	1.00
桩顶转动被约束(M_{top})	2.24	-175	0.36	1.15
荷载位于地面以上1.5 m	20.23	306	3.25	2.01
循环加载(API)	7.28	172	1.17	1.13
轴向荷载P = 800 kN	6.32	155	1.02	1.02
开裂截面，E I × 0.6	7.93	140	1.27	0.92
弹性土体(n_h, k_h)	10.49	173	1.68	1.14

桩头约束条件使位移降为原来的0.36倍，并使弯矩增大；**自由长度**影响最大（位移×3.2，弯矩×2.0）。**循环荷载**使位移增大17%，**开裂截面**使位移增大27%，但使弯矩减小（桩较柔）。弹性土属于另一类土：并非对p–y曲线的验算。

在GeoTerva中验算解答 ↗

数值背后的假定

理论

单桩：孤立存在、没有相邻桩的桩，采用其p–y曲线。水平受荷群桩在相同单桩荷载下的位移比单桩大；群桩问题属于群桩模块（采用各排的p折减系数）的内容。

桩：全长为单一截面，线弹性；E I为常数。开裂的混凝土截面通过E I修正系数以及截面屈服时的弯矩M_{cap}来表示。

土体：各弹簧相互独立，弹簧之间无剪切作用；曲线来自在特定土类上进行的试验：砂土取决于φ′，黏土取决于c_u和ε_{50}。这些曲线描述砂土以及软至中硬黏土；硬黏土、风化岩、胶结土和液化砂土则需用各自的曲线描述。

加载：静力荷载，或按API折减的循环荷载；作用于桩顶。**轴向荷载**沿全长为常数。

数值解：有限元与非线性迭代对于所给方程在所示位数范围内是精确的；近似存在于方程本身（土体以弹簧表示）。已与两个独立程序（有限差分法，采用另一种编程语言）对14根桩进行了对照，结果相差在0.01%以内。

p–y法是实际工程中水平受荷桩设计的基础；所得数值应与项目的容许值比较，如有**载荷试验**，还应与其比较。

小结

要点回顾

桩是**支承于非线性弹簧上的梁**：$EI\,y'''' + P\,y'' + p(y, z) = 0$；土的反力规律即p–y曲线

弹性解：砂土$n_h z \to T = (EI/n_h)^{1/5}$；黏土$k \to \beta = (k/4EI)^{1/4}$，$y_0 = 2H\beta/k$，$M_{max} = 0.3224\,H/\beta$

砂土：$p = A\,p_u \tanh(kzy/Ap_u)$，$p_u = \min[(C_1 z + C_2 D)\sigma'; C_3 D\sigma']$；**黏土**：$p = \frac{1}{2} p_u (y/y_{50})^{1/3}$，$p_u = \min[(3 + \sigma'/c_u + Jz/D)c_u D; 9c_u D]$

循环荷载会降低近地表的抗力：砂土中$A = 0.9$，黏土中超过$3y_{50}$后为$0.72p_u$

桩头条件、**自由段长度**、**轴向荷载**和**开裂截面**对结果影响显著，其中自由段长度的影响最大

位移与荷载不成正比：通过重新求解得到**达到容许位移时的荷载**(H_y, H_M)

参考文献

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning, Boston.

Matlock, H. and Reese, L.C. (1960). Generalized solutions for laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 86(SM5), 63–91.

Matlock, H. (1970). Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay. Proceedings of the 2nd Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 1204, 577–594.

Reese, L.C., Cox, W.R. and Koop, F.D. (1974). Analysis of laterally loaded piles in sand. Proceedings of the 6th Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 2080, 473–485.

American Petroleum Institute (2000). Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms — Working Stress Design, API RP 2A-WSD, 21st ed.

Hetényi, M. (1946). Beams on Elastic Foundation. University of Michigan Press, Ann Arbor.

Reese, L.C., Isenhower, W.M. and Wang, S.-T. (2006). Analysis and Design of Shallow and Deep Foundations. John Wiley & Sons, Hoboken.

Broms, B.B. (1965). Design of laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 91(SM3), 79–99.

Reese, L.C. and Welch, R.C. (1975). Lateral loading of deep foundations in stiff clay. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 101(GT7), 633–649.

Davisson, M.T. and Gill, H.L. (1963). Laterally loaded piles in a layered soil system. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 89(SM3), 63–94.

注

本课件中的图件取自GeoTerva理论页面；所有数值算例均由模块自带的计算引擎生成，模块给出的数值与之相同。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中逐步计算本讲义中的算例桩：数值相同。

打开模块→

理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。