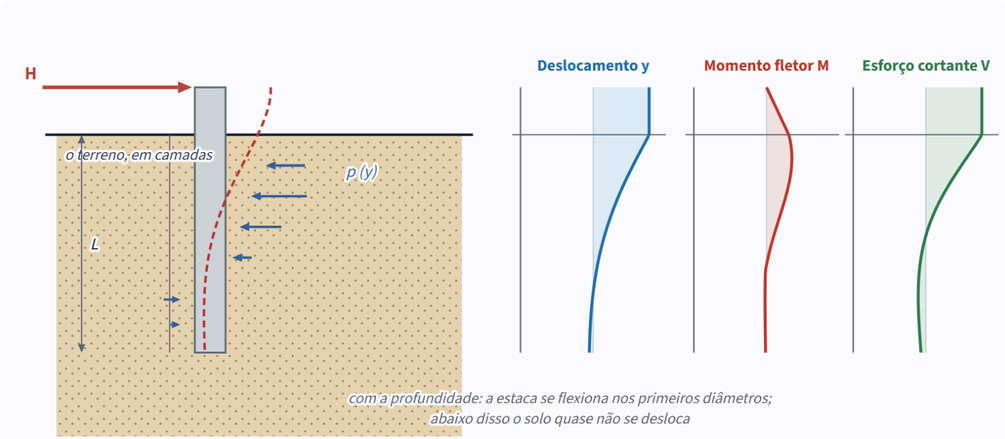
Apresentação de aula de geotecnia · Estacas

Estaca carregada horizontalmente: método p–y

Aula: análise de uma estaca sob carga horizontal como viga sobre molas, curvas p–y de areia e argila, carregamento cíclico, carga axial e condições de topo; exemplo resolvido para cada tema.

- Viga sobre molas
- Curvas p–y de areia e argila
- Carregamento cíclico
- Condições de topo
- Exemplos resolvidos



Baseia-se na página de teoria do GeoTerva · geoterva.com

O que veremos nesta aula?

- Montar a estaca carregada lateralmente como **viga sobre molas**: equação, convenções de sinais, condições de extremidade
- Calcular manualmente as **soluções elásticas** (Matlock–Reese: areia, n_h; Hetényi: argila, k)
- Construir ponto a ponto as curvas p–y da API (Reese–Cox–Koop) para **areia** e de Matlock para **argila**, estáticas e cíclicas
- Saber **o que faz** a solução numérica (elementos finitos, Newton) e como interpretar os resultados
- Interpretar o efeito da **carga axial** (P–δ), da **condição de topo** e do **comprimento livre**
- Determinar a **carga** correspondente ao deslocamento admissível ou ao momento resistente

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: qual é a regra e por que é assim?

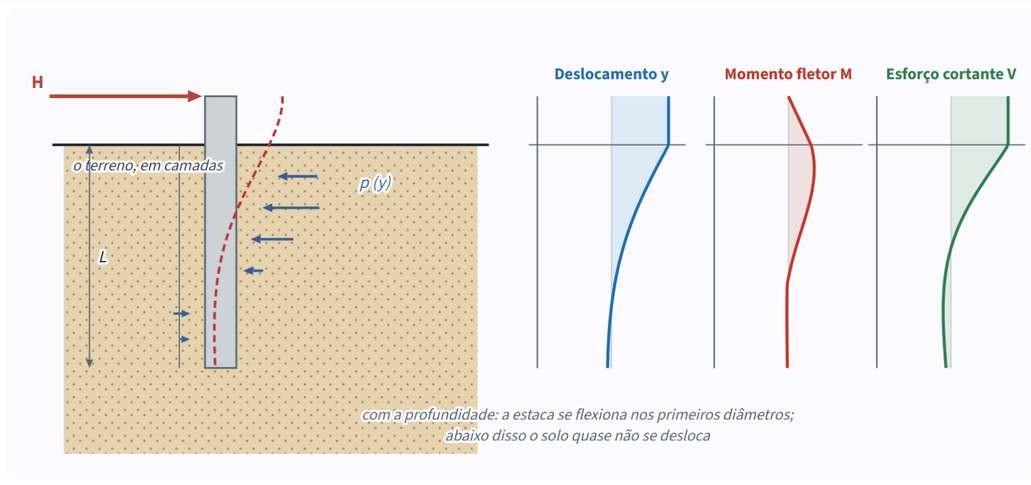
2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Estaca do exemplo: estaca de concreto de 0.60 m de diâmetro e 14 m de comprimento; em solo de areia–argila–areia, carga horizontal de 120 kN ao nível do terreno. Este também é o modelo inicial do módulo.

A carga só chega ao solo por meio do movimento lateral

TEORIA



A estaca carregada lateralmente não rompe como uma fundação assentada: a carga passa ao solo **apenas pelo movimento lateral da estaca**; a reação do solo cresce com o movimento e deixa de crescer quando o solo plastifica. A estaca flete como uma viga nos primeiros **poucos diâmetros** de solo; mais fundo, o solo quase não se move.

Carga última (Broms): a carga em que se rompe o solo, na estaca curta, e a seção, na estaca longa. Fornece a capacidade, mas não o deslocamento nem o momento na carga de trabalho.

Coeficiente de reação elástico do solo (Matlock–Reese, Davisson–Gill, Hetényi): o solo como molas elásticas; solução fechada.

Método p–y (Matlock, Reese et al.): as molas são **não lineares**; p começa rígido em relação a y, amolece e termina na resistência última do solo. A solução é numérica; solo estratificado, da carga de serviço até uma carga próxima da ruptura.

Equação, sinais e condições de contorno

TEORIA

A estaca é uma viga e o solo ao longo dela, uma fileira de molas; cada mola atua em sua própria profundidade e é independente das demais (Winkler). z é medido da superfície para baixo e y é o deslocamento no sentido da carga:

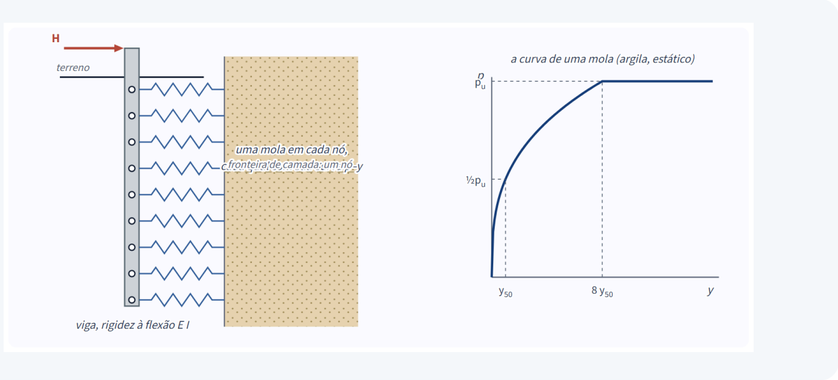
$$EI\,\frac{d^4y}{dz^4} + P\,\frac{d^2y}{dz^2} + p(y,z) = 0$$

$$\theta = \frac{dy}{dz} \qquad M = EI\frac{d^2y}{dz^2} \qquad V = EI\frac{d^3y}{dz^3} + P\theta \qquad \frac{dV}{dz} = -p$$

p é positivo quando resiste ao deslocamento. Para rigidez de mola k, p = k y; **k = k_h D** (kN/m², força por unidade de comprimento e por unidade de deslocamento).

Ponta livre: M = 0, V = 0. **Cabeça**: se livre, são dados H e M_g; se impedida de girar, a inclinação é nula e o momento de restrição faz parte da solução.

A única coisa de que a equação necessita é a lei do solo p(y, z): k·y constante no caso elástico, curvas p–y no caso não linear.



Areia: $k = n_h z$

TEORIA

Na areia, o coeficiente de reação do solo é tomado como diretamente proporcional à profundidade: **$k = n_h z$**. A estaca possui um único **comprimento característico**; para a carga Q e o momento M_g na superfície do terreno, o deslocamento e o momento são:

$$T = \left(\frac{EI}{n_h} \right)^{1/5}$$

$$y = A_y \frac{QT^3}{EI} + B_y \frac{M_g T^2}{EI} \qquad M = A_m QT + B_m M_g$$

Os coeficientes A e B dependem de Z = z/T (ao lado). A estaca é considerada **longa**: L/T é grande e a ponta não se move.

O módulo reproduz esses coeficientes com seu próprio motor de cálculo: A_y = 2.4292.

COEFICIENTES (ESTACA LONGA)

Z	A_y	A_θ	A_m	B_y	B_θ	B_m
0	2,429	−1,619	0.000	1,619	−1,747	1,000
0.5	1,640	−1,500	0.458	0.871	−1,250	0.974
1	0.961	−1,194	0.725	0.364	−0.789	0.851
1.4	0.543	−0.891	0.770	0.112	−0.480	0.686
2	0.142	−0.462	0.627	−0.070	−0.153	0.404
3	−0.075	−0.039	0.224	−0.089	0.057	0.059

A_m é máximo em Z ≈ 1.4 (0.77).

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Estaca	**HP 250 × 85, L = 25 m, E I = 25 461 kN·m²**
Solo	**areia, n_h = 12 000 kN/m³**
Carga	**Q na superfície do terreno; M_g = 0, topo livre**
Coeficientes	$A_y = 2.4292$ **(topo),** $A_m = 0.772$ **(máximo)**

PEDE-SE

Determinar a carga Q e o **momento máximo** para um deslocamento da cabeça de **8 mm**. A estaca é longa?

Solução

SOLUÇÃO

1 Comprimento característico e comprimento da estaca

$$T = \left(\frac{25\,461}{12\,000}\right)^{1/5} = \mathbf{1.1624}\ \text{m} \qquad \frac{L}{T} = \frac{25}{1.1624} = 21.5 \ \Rightarrow\ \text{estaca longa}$$

2 Carga: $y = A_y\, Q\, T^3 / E\, I \Rightarrow Q = y\, E\, I / (A_y\, T^3)$

$$Q = \frac{0.008(25\,461)}{2.4292\,(1.1624)^3} = \mathbf{53.4}\ \text{kN}$$

3 Momento máximo: $M = A_m\, T\, Q$

$$M_{max} = 0.772\,(1.1624)(53.4) = \mathbf{47.9}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Para essa carga, o módulo fornece deslocamento da cabeça de **8.00 mm** e momento máximo de **47.9 kN·m**: igual ao do cálculo à mão.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Argila: k constante (Hetényi)

TEORIA

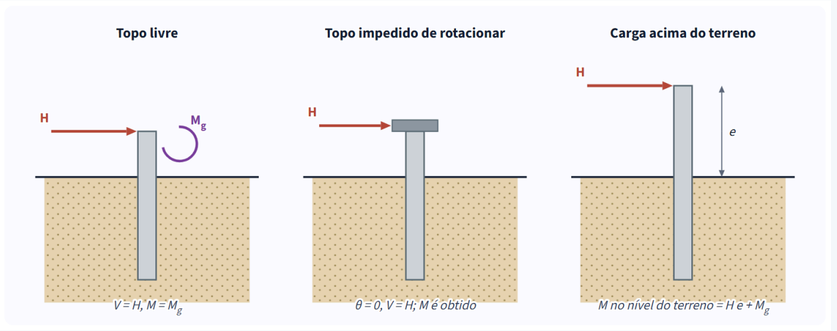
Na argila, o coeficiente de reação do solo é tomado como **constante** com a profundidade. k é a rigidez do solo por unidade de comprimento da estaca; **β = (k / 4EI)$^{1/4}$**. Para estaca longa, as soluções fechadas de Hetényi, sob uma carga H na superfície do terreno:

$$\text{cabeça livre:} \quad y_0 = \frac{2H\beta}{k} \qquad M_{max} = 0.3224\,\frac{H}{\beta} \quad \left(z = \tfrac{\pi}{4\beta}\right)$$

$$\text{cabeça restringida:} \quad y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} \qquad M_{head} = -\frac{H}{2\beta}$$

A estaca com a cabeça impedida de girar desloca-se **metade** do que a de cabeça livre; mas o momento de engastamento na cabeça é **maior** que o momento máximo da estaca livre.

O bloco de coroamento real situa-se entre esses dois extremos; o quanto se aproxima de cada um depende da rigidez do bloco e da superestrutura.



Enunciado

EXEMPLO

Dados

Estaca	**D = 0.60 m, E I = 190,852 kN·m² (estaca do exemplo)**
Solo	**argila, k_h = 15,000 kN/m³ ⇒ k = k_h D = 9,000 kN/m²**
Carga	**H = 120 kN, na superfície do terreno**
Estaca	**longo**

PEDE-SE

Determinar, para a cabeça **livre** e **engastada**, o deslocamento da cabeça e os momentos pelas soluções fechadas de Hetényi.

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 β

$$\beta = \left(\frac{k}{4EI}\right)^{1/4} = \left(\frac{9{,}000}{4(190{,}852)}\right)^{1/4} = \mathbf{0.3295}\ \mathrm{m}^{-1}$$

2 Cabeça livre

$$y_0 = \frac{2H\beta}{k} = \frac{2(120)(0.3295)}{9{,}000} = \mathbf{8.79}\ \mathrm{mm}$$

$$M_{max} = 0.3224\frac{H}{\beta} = 0.3224\frac{120}{0.3295} = \mathbf{117.4}\ \mathrm{kN{\cdot}m} \quad \left(z = \tfrac{\pi}{4\beta} = 2.38\ \mathrm{m}\right)$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Cabeça engastada

$$y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} = \frac{120}{4(190{,}852)(0.3295)^3} = \mathbf{4.39}\ \text{mm}$$

$$M_{head} = -\frac{H}{2\beta} = -\frac{120}{2(0.3295)} = -\mathbf{182.1}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

A cabeça restringida reduz o deslocamento **à metade** (8.79 → 4.39 mm), mas o momento na cabeça (182.1 kN·m) é **1.55 vez** o momento máximo da estaca livre (117.4 kN·m). A opção elástica do módulo fornece os mesmos números: livre 8.79 mm e 117.4 kN·m, restringida 4.39 mm e 182.1 kN·m.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

API RP 2A: Reese, Cox e Koop

TEORIA

O solo próximo à superfície é empurrado à frente da estaca em forma de **cunha**; mais abaixo, o solo **escoa horizontalmente ao redor** da estaca. A resistência última na profundidade z (σ′: tensão efetiva nessa profundidade) é a menor das duas:

$$p_{us} = (C_1 z + C_2 D)\,\sigma' \qquad p_{ud} = C_3 D\,\sigma'$$

$$p = A\,p_u \tanh\left(\frac{k\,z\,y}{A\,p_u}\right) \qquad A = \max\left(0.9;\ 3 - 0.8\tfrac{z}{D}\right)\ \text{(estático)},\ A = 0.9\ \text{(cíclico)}$$

C_1, C_2, C_3 dependem apenas de **φ′**; k, o módulo inicial, é tomado em função de φ′ e da água (ao lado).

Para y pequeno, a curva é a reta **k z y** (o caso n_h = k da solução elástica); para y grande, termina em **A p_u**. A vale 3.0 na superfície e 0.9 à profundidade de 2.6D: a resistência estática é maior perto da superfície e inexistente sob carregamento cíclico.

COEFICIENTES QUE VARIAM COM φ′

φ′	C_1	C_2	C_3	k (acima do NA)	k (abaixo do NA)
28°	1.60	2.41	22.5	5.4	5.4
30°	1.91	2.67	28.7	10.5	7.9
32°	2.28	2.95	36.8	20.7	11.9
34°	2.72	3.25	47.3	32.7	17.6
36°	3.24	3.59	61.2	46.3	24.8
38°	3.87	3.97	79.6	61.7	33.6
40°	4.62	4.38	104.1	78.9	44.0

k: MN/m³. Para 32°, C_1 = 2.28; C_2 = 2.95; C_3 = 36.8.

Enunciado

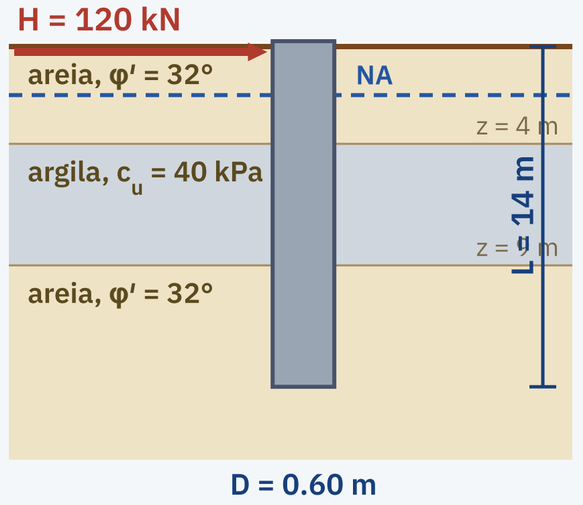
EXEMPLO

Dados

Estaca	**estaca escavada, seção circular, D = 0.60 m, L = 14 m, concreto: E I = 190 852 kN·m²**
Solo	**areia 0–4 m (φ′ = 32°) · argila 4–9 m (c_u = 40 kPa) · areia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, água	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nível do lençol freático a 2.0 m**
Profundidade	**z = 2.0 m (areia 1, nível do lençol freático); k = 20.7 MN/m³ (acima do nível d'água)**
Coeficientes	$K_0 = 0.4,\ K_a = \tan^2(45^\circ - \varphi'/2)$

PEDE-SE

Determinar σ′, C_1, C_2, C_3, $\mathbf{p_u}$, A e os valores de **p** para y = 5 mm e 10 mm.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Tensão efetiva e ângulos (nível do lençol freático = 2 m: úmido da superfície até z = 2)

$$\sigma' = 18(2) = \mathbf{36.0}\ \mathrm{kPa} \qquad \alpha = \frac{\varphi'}{2} = 16^\circ,\ \beta = 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} = 61^\circ,\ K_a = \tan^2 29^\circ = 0.3073$$

2 Coeficientes (φ′ = 32°)

$$C_1 = \frac{K_0 \tan\varphi' \sin\beta}{\tan(\beta-\varphi')\cos\alpha} + \frac{\tan^2\beta\tan\alpha}{\tan(\beta-\varphi')} + K_0\tan\beta(\tan\varphi'\sin\beta - \tan\alpha) = \mathbf{2.281}$$

$$C_2 = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\varphi')} - K_a = \mathbf{2.947}$$

$$C_3 = K_a(\tan^8\beta - 1) + K_0\tan\varphi'\tan^4\beta = \mathbf{36.81}$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Resistência última: o menor valor entre a cunha e o escoamento em torno da estaca

$$p_{us} = (2.281(2) + 2.947(0.6))(36.0) = 227.9\ \text{kN/m}$$

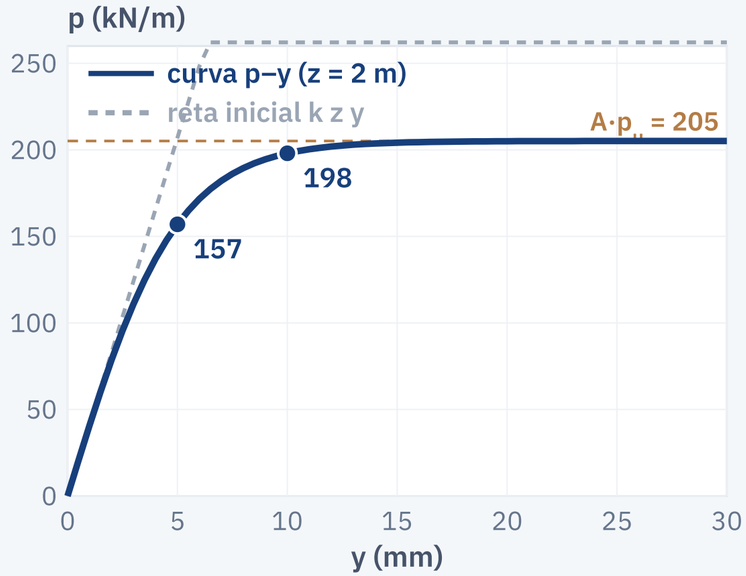
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(36.0) = 795\ \text{kN/m} \ \Rightarrow\ p_u = \mathbf{227.9}\ \text{kN/m}$$

4 A e a curva: A = max(0.9; 3 − 0.8 z/D) = max(0.9; 0.33) = 0.9; k z y / (A p_u)

$$y = 5\ \text{mm}: \ p = 0.9(227.9)\tanh\frac{20\,700(2)(0.005)}{0.9(227.9)}$$

$$= \mathbf{157.0}\ \text{kN/m}$$

$$y = 10\ \text{mm}: \ p = \mathbf{198.0}\ \text{kN/m}$$



A curva A aproxima-se de p_u = 205 kN/m; a 10 mm atinge 97% desse valor. Nessa profundidade, as curvas estática e cíclica são **iguais** (A = 0.9 em ambas).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Estaca	**estaca escavada, seção circular, D = 0.60 m, L = 14 m, concreto: E I = 190 852 kN·m²**
Solo	**areia 0–4 m (φ′ = 32°) · argila 4–9 m (c_u = 40 kPa) · areia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, água	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nível do lençol freático a 2.0 m**
Profundidade	**z = 0.6 m (1D), σ′ = 18(0.6) = 10.8 kPa; k = 20.7 MN/m³**
Areia 1	**C_1 = 2.281, C_2 = 2.947, C_3 = 36.81 (Exemplo 3)**

PEDE-SE

Determinar os valores estático e cíclico de **p–y** para y = 10 mm.

Solução

SOLUÇÃO

1 Resistência última e A

$$p_{us} = (2.281(0.6) + 2.947(0.6))(10.8) = 33.9\ \text{kN/m}$$

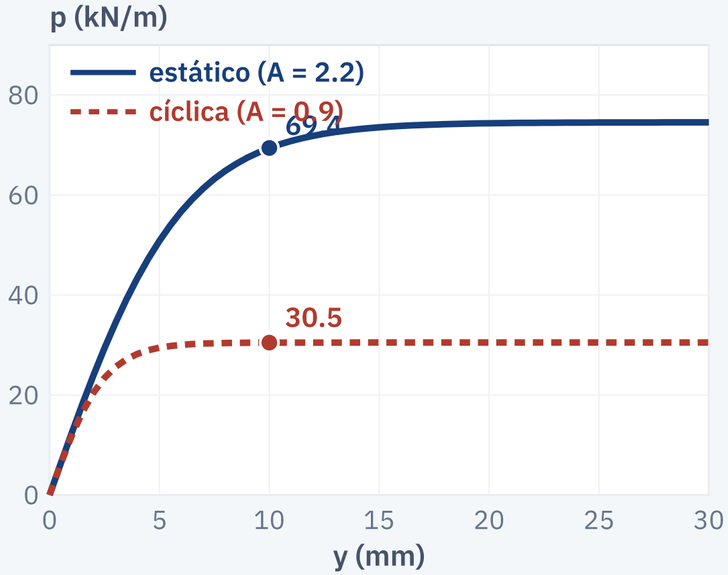
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(10.8) = 238.6\ \text{kN/m} \Rightarrow p_u = \mathbf{33.9}\ \text{kN/m}$$

$$A_{static} = \max(0.9;\ 3 - 0.8(1)) = 2.2 \qquad A_{cyclic} = 0.9$$

2 y = 10 mm: k z y = 20 700(0.6)(0.010) = 124.2

$$p_{static} = 2.2(33.9)\tanh\frac{124.2}{2.2(33.9)} = \mathbf{69.4}\ \text{kN/m}$$

$$p_{cyclic} = 0.9(33.9)\tanh\frac{124.2}{0.9(33.9)} = \mathbf{30.5}\ \text{kN/m}$$



Em areia próxima à superfície, o carregamento cíclico reduz a resistência em **56%** (69.4 → 30.5 kN/m): perde-se o multiplicador A. Por isso, o deslocamento da cabeça aumenta sob carregamento cíclico.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Matlock: argila mole, carregamento estático e cíclico

TEORIA

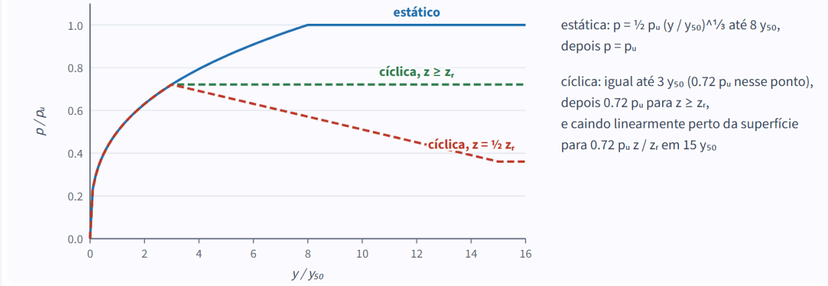
Na argila, o módulo adota a curva de argila mole de **Matlock** (1970), na forma apresentada pela API RP 2A. A resistência última é, novamente, o menor entre os valores próximo à superfície (cunha) e em profundidade (escoamento):

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{\sigma'}{c_u} + J\frac{z}{D}\right) c_u D;\ 9c_u D\right]$$

$$p = \tfrac{1}{2} p_u \left(\frac{y}{y_{50}}\right)^{1/3} \quad (y \le 8y_{50}) \qquad p = p_u \ (y > 8y_{50}) \qquad y_{50} = 2.5\,\varepsilon_{50} D$$

ε_{50} e J em função de c_u: abaixo de 48 kPa, argila mole (0.020; 0.5); de 48–96, média (0.010; 0.25); acima de 96, rija (0.005; 0.25).

Cíclico: após $3y_{50}$, a curva permanece em 0.72 p_u ($z \ge z_R$); em profundidades menores, **decresce linearmente** até 0.72 p_u z/z_R em $15y_{50}$. z_R = max[6D / ((σ′/z)(D/c_u) + J); 2.5D].



estática: p = ½ p_u (y / y_{50})^⅓ até 8 y_{50}, depois p = p_u

cíclica: igual até 3 y_{50} (0.72 p_u nesse ponto), depois 0.72 p_u para z ≥ z_r, e caindo linearmente perto da superfície para 0.72 p_u z / z_r em 15 y_{50}

Enunciado

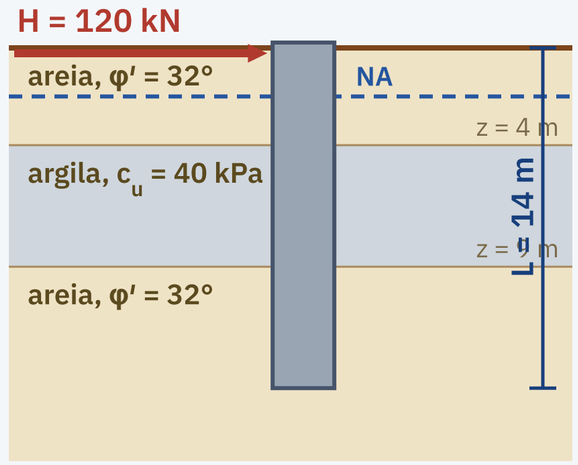
EXEMPLO

Dados

Estaca	**estaca escavada, seção circular, D = 0.60 m, L = 14 m, concreto: E I = 190 852 kN·m²**
Solo	**areia 0–4 m (φ′ = 32°) · argila 4–9 m (c_u = 40 kPa) · areia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, água	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nível do lençol freático a 2.0 m**
Profundidade	**z = 6.5 m (argila, 4–9 m); ε_{50} = 0.020, J = 0.5**
Camada	**c_u = 40 kPa**

PEDE-SE

Determinar σ′, p_u, y_{50} e os valores de p–y **estáticos** para y = 15 mm e 150 mm; determinar z_R e o valor do patamar da curva **cíclica**.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 σ′: areia 0–2 m úmida (γ = 18), areia 2–4 m e argila 4–6.5 m submersas (γ_{sat} = 19)

$$\sigma' = 18(2) + (19 - 9.81)(2) + (19 - 9.81)(2.5) = \mathbf{77.4}\ \text{kPa}$$

2 Resistência última e y_{50}

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{77.4}{40} + 0.5\frac{6.5}{0.6}\right)(40)(0.6);\ 9(40)(0.6)\right]$$

$$= \min[248.4;\ 216.0] = \mathbf{216.0}\ \text{kN/m}$$

$$y_{50} = 2.5(0.020)(0.6) = \mathbf{30.0}\ \text{mm}$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Curva estática: $p = \frac{1}{2}\, p_u\, (y/y_{50})^{1/3}$

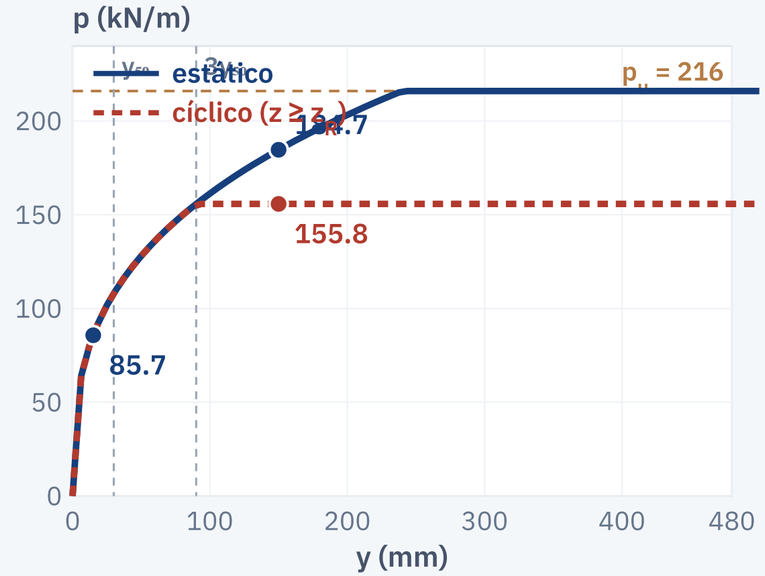
$$y = 15\ \text{mm}\ (0.5y_{50}):\ \ p = 0.5(216.0)(0.5)^{1/3} = \mathbf{85.7}\ \text{kN/m}$$

$$y = 150\ \text{mm}\ (5y_{50}):\ \ p = 0.5(216.0)(5)^{1/3} = \mathbf{184.7}\ \text{kN/m}$$

4 Curva cíclica: $z_R = \max[6(0.6)/((\sigma'/z)(D/c_u) + J);\ 2.5D] = \max[5.31;\ 1.5] = 5.31$ m; $z = 6.5 > z_R$

$$p_{perimeter}(y \geq 3y_{50}) = 0.72\, p_u = 0.7211(216.0) = \mathbf{155.8}\ \text{kN/m}$$

Em y = 150 mm, a resistência estática é 184.7 e a cíclica, 155.8 kN/m: a carga cíclica reduz a resistência desta argila em **16%**; até $3y_{50}$ (90 mm) as duas curvas são idênticas.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Cada curva corresponde ao solo da sua própria profundidade

TEORIA

σ′ é a soma dos pesos específicos das camadas superiores (γ acima do lençol freático, $\gamma_{sat} - \gamma_w$ abaixo); **não é a média** da camada, e sim cresce com a profundidade dentro da camada.

A camada em z fornece φ′ e k (areia) ou c_u, ε_{50} e J (argila). O módulo inicial k da areia é tomado em relação à água na posição da camada; em uma camada interceptada pela água, é preenchido de acordo com a profundidade média da camada e pode ser editado manualmente.

Os elementos **nunca ultrapassam o limite de uma camada**: há um nó em cada limite; a rigidez do solo varia bruscamente entre elementos, e não dentro de um elemento.

A folha de cálculo apresenta, passo a passo, os valores da curva no meio de cada camada: σ′, coeficientes, p_u, A ou y_{50} — reproduzíveis à mão (como nos Exemplos 3 e 5 desta apresentação).

As camadas devem se estender até a ponta da estaca; o solo abaixo da ponta não é definido e a ponta é livre. Uma argila mole sobre uma areia compacta aparece nos diagramas como uma **quebra** no limite entre as camadas.

Elementos finitos e Newton

TEORIA

A equação é resolvida por elementos finitos: a estaca é dividida em **elementos de viga cúbicos**, com y e rotação θ em cada nó. A reação do solo é obtida da curva em **quatro pontos de Gauss** em cada elemento e integrada. A equação não linear K u + f(u) = F é resolvida pelo método de Newton:

$$(K + K_s(u_i))\,\Delta u = F - K u_i - f(u_i) \qquad K_s = \int N^T \frac{dp}{dy} N \, dz$$

dp/dy não cai abaixo de **um vigésimo** da rigidez secante: a matriz permanece positiva mesmo onde a curva é plana ou decrescente. Há uma busca linear com redução de passo e, se esta falhar, um passo secante amortecido.

Comprimento do elemento D/6 (3–15 cm); o resultado **não** depende da malha até os passos mostrados (elemento 0.4 → 0.025 m: deslocamento da cabeça 6.228 → 6.228 mm).

Se a carga excede o que o solo pode suportar, **não há equilíbrio**; o módulo indica isso e não fornece valores. A solução também não é considerada se o solo se deslocou mais de **cinco larguras de estaca** abaixo da superfície do terreno.

A curva da argila sob carga cíclica, ou a resposta ao carregamento axial, não é uma curva única crescente; ela sobe até a **carga limite**. O módulo alcança a carga em etapas, a partir de zero.

Em cada estudo escrevem-se duas verificações: Σ p Δz = H e momento na ponta = 0 (estática).

Efeito P–δ e flambagem

TEORIA

A carga axial P atua ao longo da **configuração deformada** da estaca: aparece na equação (o termo P d²y/dz²) e na rigidez geométrica de cada elemento; reduz a rigidez lateral da viga comprimida e aumenta o deslocamento e o momento. O módulo adota P constante em todo o comprimento e igual na cabeça e na ponta (na realidade, o atrito lateral transfere a carga ao solo; adotá-la constante fica a favor da segurança).

$$P_{cr} = \sqrt{k\,EI} \qquad (\text{cabeça livre, } k \text{ constante, estaca longa})$$

É a **metade** do valor 2√(kEI) da viga infinita: a extremidade livre pode girar. Uma cabeça engastada flamba com carga maior.

À medida que P se aproxima da carga de flambagem, a relação carga–deslocamento cresce sem limite; o módulo emite a mensagem **“carga axial excede a carga de flambagem”**.

A resistência combinada da seção da estaca à carga axial e ao momento é uma verificação de projeto estrutural.

ESTACA DO EXEMPLO

Para E I = 190,852 kN·m² e k = 9,000 kN/m² em argila elástica:

$$P_{cr} = \sqrt{9{,}000\,(190{,}852)} = 41{,}445\ \text{kN}$$

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Estaca	**estaca escavada, seção circular, D = 0.60 m, L = 14 m, concreto: E I = 190 852 kN·m²**
Solo	**areia 0–4 m (φ′ = 32°) · argila 4–9 m (c_u = 40 kPa) · areia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, água	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nível do lençol freático a 2.0 m**
Cargas	**H = 120 kN; carga axial P = 800 kN (constante)**
Flambagem	**k = k_h D = 9,000 kN/m² (argila elástica), cabeça livre**
Módulo	**P = 0: topo 6.23 mm, M_{max} 151.8 kN·m**

PEDE-SE

P = 800 kN está **próxima** da carga de flambagem? Qual é a magnitude do efeito P–δ?

Solução

SOLUÇÃO

1 Carga de flambagem (cabeça livre, k constante)

$$P_{cr} = \sqrt{kEI} = \sqrt{9{,}000(190{,}852)} = \mathbf{41{,}445}\ \text{kN} \qquad \frac{P}{P_{cr}} = \frac{800}{41{,}445} = \mathbf{0.019}$$

2 No módulo com P = 800 kN (incluindo P–δ)

$$y_{head}:\ 6.23 \rightarrow 6.32\ \text{mm}\ \ (+2\%) \qquad M_{max}:\ 151.8 \rightarrow 154.5\ \text{kN·m}\ \ (+2\%)$$

800 kN corresponde a apenas **2%** da carga de flambagem: a carga axial não aproxima a estaca da flambagem; o efeito P–δ aumenta o deslocamento em 2% e o momento em 2%. Nesta estaca, na análise sob carga horizontal a carga axial é secundária, mas não pode ser desprezada.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Livre, fixa e carga sobre o solo

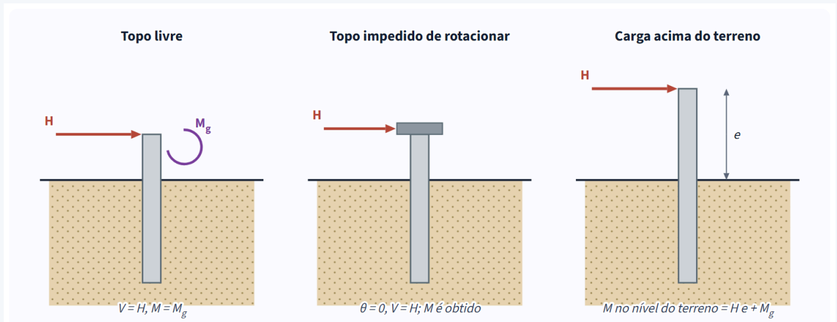
TEORIA

Cabeça livre: no ponto de aplicação da carga, V = H e M = M_g.

Cabeça engastada: a rotação é nula e a cabeça se desloca lateralmente. Em solo elástico, uniforme e com estaca longa, desloca-se **metade** do que se desloca no caso de cabeça livre; o momento de restrição M = −H/(2β) é maior que o momento máximo da estaca livre. O bloco de coroamento real situa-se entre os dois casos.

Comprimento livre e: a estaca acima do terreno flexiona como uma viga em balanço. O esforço cortante é H até o terreno e o momento atinge **M(0) = M_g + H e** na superfície do terreno; ali o solo passa a atuar.

Deslocamento da cabeça = deslocamento na superfície do solo + rotação na superfície × e + deslocamento em balanço do comprimento livre (H e^3 / 3EI). A mesma carga, com comprimento livre, torna o deslocamento da cabeça **muito maior** que o da superfície do solo; o momento máximo situa-se, na maioria das vezes, no solo ou um pouco abaixo dele.



Enunciado

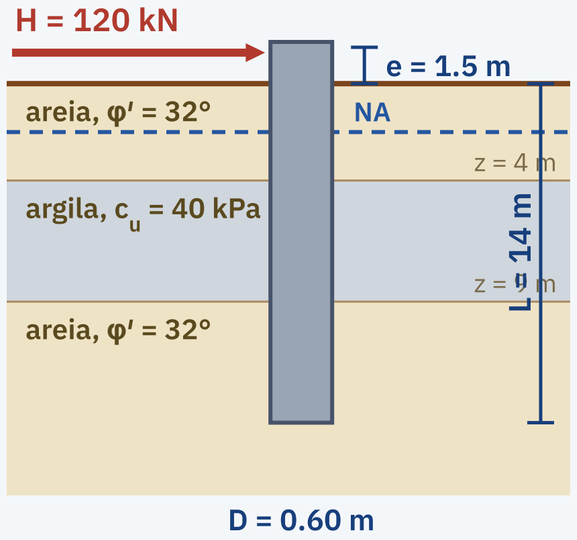
EXEMPLO

Dados

Estaca	**estaca escavada, seção circular, D = 0.60 m, L = 14 m, concreto: E I = 190 852 kN·m²**
Solo	**areia 0–4 m (φ′ = 32°) · argila 4–9 m (c_u = 40 kPa) · areia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, água	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nível do lençol freático a 2.0 m**
Comprimento livre	**carga a e = 1.5 m acima do terreno; H = 120 kN, cabeça livre**
Módulo (na superfície do terreno)	**y_{ground} = 11.12 mm, inclinação = 0.321° (em direção à carga)**

PEDE-SE

Determinar o **momento** e o **deslocamento do topo** na superfície do terreno; comparar o resultado com os 20.23 mm obtidos no módulo.



Solução

SOLUÇÃO

1 Momento na superfície do terreno (cortante H ao longo do comprimento livre, $M_g = 0$)

$$M(0) = M_g + H\,e = 0 + 120(1.5) = \mathbf{180}\ \mathrm{kN{\cdot}m}$$

2 Deslocamento em balanço do comprimento livre

$$\frac{H\,e^3}{3EI} = \frac{120(1.5)^3}{3(190{,}852)} = 0.71\ \mathrm{mm}$$

3 Deslocamento da cabeça = y_{soil} + $|\theta|$ e + H $e^3/3EI$

$$y_{head} = 11.12 + 5.605(1.5) + 0.71 = \mathbf{20.23}\ \mathrm{mm}$$

Pelo cálculo manual, **20.23 mm**; no módulo, 20.23 mm: idêntico. Com a carga ao nível do terreno, a cabeça se deslocava 6.23 mm; 1.5 m de comprimento livre multiplica esse deslocamento por **3.2**. O momento máximo é 306 kN·m, a 1.68 m abaixo da superfície do terreno (superior aos 180 kN·m na superfície do terreno).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

O que cada número indica?

TEORIA

Deslocamento da cabeça y e rotação (inclinação dy/dz; negativa quando a estaca se inclina no sentido da carga). Havendo comprimento livre, fornece-se também o valor na superfície do terreno.

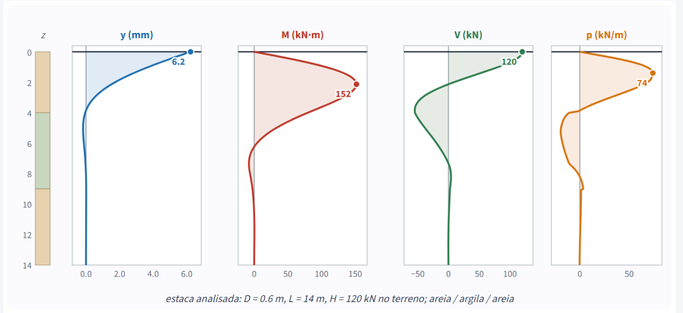
Momento fletor máximo e sua profundidade. Com cabeça engastada, lista-se também o momento na cabeça; nem sempre é ele o maior.

Profundidade de deslocamento nulo: ponto em que a estaca cruza o próprio eixo; acima dele, a estaca se move em direção ao solo; abaixo dele, afastando-se do solo.

Força cortante e reação do solo; a reação e a extremidade da curva p–y são traçadas lado a lado: vê-se o quão próximo o solo está do seu limite.

Ponta: na ponta de uma estaca suficientemente longa não há deslocamento. Se a ponta se move mais do que um décimo do deslocamento na superfície do terreno e mais de 2 mm, a estaca é **curta** para essa carga: gira como um corpo rígido, e o seu comprimento governa o resultado.

A vista p–y traça as curvas em cinco profundidades na parte em movimento e marca em cada uma o **ponto atingido**: o ponto no trecho inicial reto da curva é elástico, e o ponto próximo à extremidade está no limite.



Enunciado

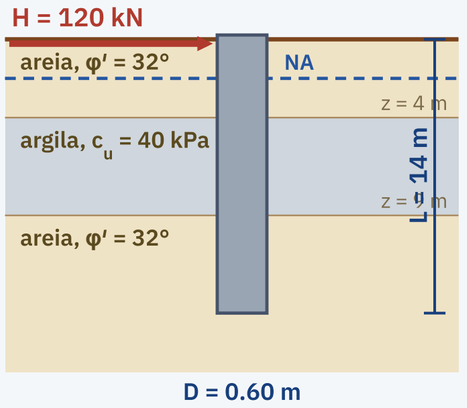
EXEMPLO

Dados

Estaca	**estaca escavada, seção circular, D = 0.60 m, L = 14 m, concreto: E I = 190 852 kN·m²**
Solo	**areia 0–4 m (φ′ = 32°) · argila 4–9 m (c_u = 40 kPa) · areia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, água	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nível do lençol freático a 2.0 m**
Resultados do módulo	**cabeça y = 6.23 mm, inclinação 0.150°; M_{max} = 151.8 kN·m (z = 2.13 m); deslocamento nulo em z = 3.85 m; ponta 0.0019 mm**
Reação máxima do solo	**p = 74.0 kN/m, z = 1.40 m; A = max(0.9; 3 − 0.8(1.4)/0.6), p_u = 125.0 kN/m**

PEDE-SE

A estaca é **longa** para esta carga? Em que **porcentagem** do seu limite o solo está trabalhando na profundidade de 1.40 m? Interpretar as verificações estáticas.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

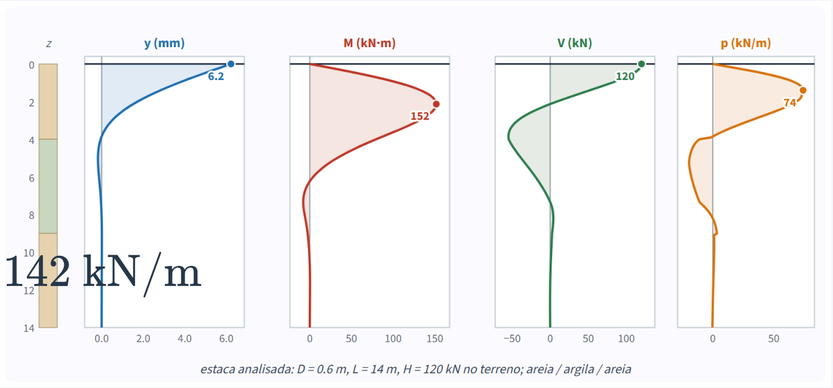
1 Condição de extremidade: o movimento da ponta é comparado com um décimo do deslocamento na superfície do terreno e com 2 mm

$$y_{tip} = 0.0019\ \text{mm} \ll 0.1(6.23) = 0.62\ \text{mm} \ \Rightarrow\ \text{estaca longa}$$

2 A 1.40 m, em que fração do seu limite se encontra o solo?

$$A = \max\left(0.9;\ 3 - \frac{0.8(1.4)}{0.6}\right) = 1.133\ ; \quad A\,p_u = 1.133(125.0) = 142\ \text{kN/m}$$

$$\frac{p}{Ap_u} = \frac{74.0}{142} = \mathbf{0.52}$$



estaca analisada: D = 0.6 m, L = 14 m, H = 120 kN no terreno; areia / argila / areia

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Verificações estáticas

$$\sum p\,\Delta z = 120.000\ \text{kN} = H \qquad M_{tip}\ (\text{da estática}) = 0.000\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad 7\ \text{iterações}$$

A estaca é **longa**; na profundidade de 1.40 m o solo trabalha a **52%** do seu limite (e não no fim da curva). As duas verificações também são satisfeitas: são verificações da iteração e da contabilização, **e não da exatidão do modelo**.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Carga correspondente ao valor admissível

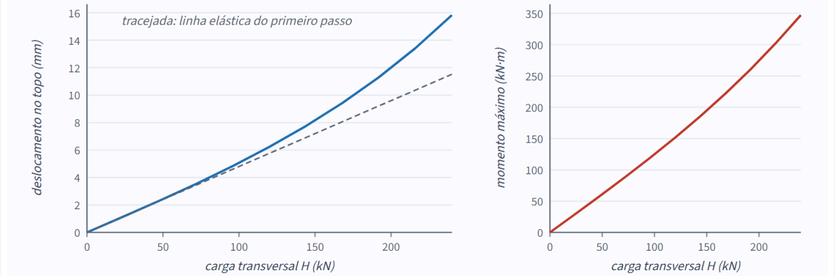
TEORIA

Como o solo é não linear, o deslocamento não é proporcional à carga; a **carga correspondente ao deslocamento admissível** não pode ser lida a partir do resultado obtido na carga de serviço. O módulo aumenta a carga e o momento proporcionalmente desde o início (um fator λ aplicado a H e M_g, com a carga axial mantida constante), resolve novamente a equação em cada etapa e determina o λ em que o deslocamento da cabeça atinge o valor admissível (ou o momento máximo atinge a capacidade resistente da seção): $\mathbf{H_y}$ ou $\mathbf{H_M}$.

Se o solo não consegue suportar o valor admissível (se não há equilíbrio antes de alcançá-lo), o módulo indica **“não atingido”** e a curva termina na última carga resolvida. Na argila sob carregamento cíclico ou com carga axial, a curva se encurva: esta é a **carga limite do solo**.

Esta não é a capacidade da estaca: no módulo, a estaca é elástica; uma estaca que atinge o escoamento por flexão pode romper antes do solo. A capacidade de momento informada é a verificação disso.

O módulo não fornece fator de segurança nem o adota de norma: o deslocamento admissível e a capacidade de momento são de responsabilidade do engenheiro.



Enunciado

EXEMPLO

Dados

Estaca	**estaca escavada, seção circular, D = 0.60 m, L = 14 m, concreto: E I = 190 852 kN·m²**
Solo	**areia 0–4 m (φ′ = 32°) · argila 4–9 m (c_u = 40 kPa) · areia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, água	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nível do lençol freático a 2.0 m**
Solução não linear	**Deslocamento da cabeça para H = 30, 60, …, 270 kN: 1.44 · 2.93 · 4.51 · 6.23 · 8.15 · 10.33 · 12.86 · 15.82 · 19.29 mm**
Admissível	**y_{all} = 10 mm; capacidade de momento M_{cap} = 200 kN·m**

PEDE-SE

H_y, a carga em y_{all} = 10 mm; H_M, a carga correspondente a M_{cap}; qual seria o erro se fosse usada proporcionalidade linear?

Solução

SOLUÇÃO

1 Proporção linear (a partir de 6.23 mm na carga de trabalho) e solução exata

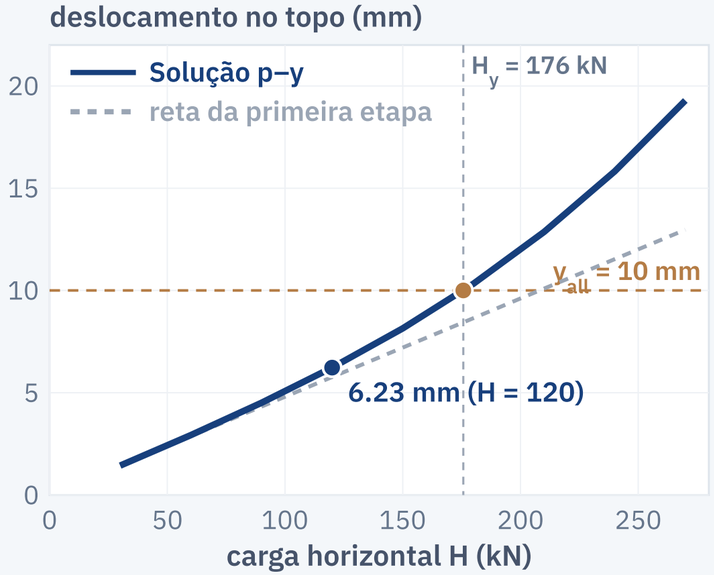
$$H_{y,linear} = 120\,\frac{10}{6.23} = 192.7\ \text{kN}$$

$$H_y = \mathbf{175.7}\ \text{kN}\ (\lambda = 1.464)$$

2 Carga correspondente ao momento resistente

$$H_M = \mathbf{153.6}\ \text{kN}\ \ (\lambda = 1.280;\ y_{head} = 8.39\ \text{mm})$$

A proporcionalidade linear daria uma carga **10% maior** (193 ≠ 176 kN): à medida que o solo amolece, o deslocamento cresce mais rápido que a carga. O **determinante** é o momento: H_M = 154 kN, carga na qual a cabeça se desloca apenas 8.4 mm; na carga correspondente ao deslocamento admissível (H_y = 176 kN), o momento seria de 234 kN·m.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Estaca	**estaca escavada, seção circular, D = 0.60 m, L = 14 m, concreto: E I = 190 852 kN·m²**
Solo	**areia 0–4 m (φ′ = 32°) · argila 4–9 m (c_u = 40 kPa) · areia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, água	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nível do lençol freático a 2.0 m**
A comparar	**condição na cabeça · comprimento livre · carga cíclica · carga axial (800 kN) · seção fissurada (E I × 0.6) · solo elástico (n_h = 8 MN/m³, k_h = 15 MN/m³)**

PEDE-SE

Comparar, em cada caso, o deslocamento no topo da estaca e o momento máximo em relação à carga de trabalho.

Solução

SOLUÇÃO

Situação	y_{head} (mm)	M_{max} (kN·m)	y / y_0	M / M_0
Conforme informado: livre, estático, no nível do terreno	6.23	152	1.00	1.00
Cabeça impedida de girar (M_{top})	2.24	-175	0.36	1.15
A carga está 1.5 m acima do terreno	20.23	306	3.25	2.01
Carregamento cíclico (API)	7.28	172	1.17	1.13
Carga axial P = 800 kN	6.32	155	1.02	1.02
Seção fissurada, E I × 0.6	7.93	140	1.27	0.92
Solo elástico (n_h, k_h)	10.49	173	1.68	1.14

A condição de cabeça reduz o deslocamento (fator 0.36) e aumenta o momento; o **comprimento livre** é o que mais influencia (deslocamento ×3.2, momento ×2.0). O **carregamento cíclico** aumenta o deslocamento em 17% e a **seção fissurada**, em 27%, mas reduz o momento (a estaca fica mais flexível). O solo elástico é um caso à parte: não é uma verificação das curvas p–y.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Hipóteses de cálculo por trás dos números

TEORIA

Estaca isolada: uma estaca sozinha, sem vizinhas, analisada com as suas curvas p–y. Um grupo sob carga horizontal desloca-se mais do que a estaca isolada para a mesma carga por estaca; o grupo é objeto do módulo de grupo de estacas, com os multiplicadores de p das fileiras.

Estaca: seção única em todo o comprimento, linear elástica; E I constante. Uma seção de concreto fissurada é representada pelo multiplicador de E I, e o momento no qual a seção escoa, por M_{cap}.

Solo: molas independentes, sem cisalhamento entre elas; as curvas provêm de ensaios realizados em solos específicos: a areia depende de φ′, a argila de c_u e ε_{50}. Descreve areia e argila mole a média; argila rija, rocha alterada, solo cimentado e areia liquefazível são descritos por curvas próprias.

Carregamento: estático ou cíclico com redução da API; aplicado no início. A **carga axial** é constante em todo o comprimento.

Solução numérica: os elementos finitos e a iteração não linear são exatos para a equação dada, até os dígitos mostrados; a aproximação está na equação (o solo é representado por molas). Houve concordância dentro de 0.01% em 14 estacas com dois programas independentes (diferenças finitas, em outra linguagem).

O método p–y é, na prática, a base do projeto de estacas sob carga horizontal; os valores devem ser comparados com os valores admissíveis do projeto e, se houver, com a **prova de carga**.

Resumo

Pontos-chave

A estaca é uma **viga sobre molas não lineares**: $EI\,y'''' + P\,y'' + p(y, z) = 0$; a lei do solo é a curva p–y

Elástico: areia $n_h z \rightarrow T = (EI/n_h)^{1/5}$; argila $k \rightarrow \beta = (k/4EI)^{1/4}$, $y_0 = 2H\beta/k$, $M_{max} = 0.3224\ H/\beta$

Areia: $p = A\,p_u \tanh(kzy/Ap_u)$, $p_u = \min[(C_1 z + C_2 D)\sigma'; C_3 D\sigma']$ · **Argila**: $p = \frac{1}{2} p_u (y/y_{50})^{1/3}$, $p_u = \min[(3 + \sigma'/c_u + Jz/D)c_u D; 9c_u D]$

A carga **cíclica** reduz a resistência próxima à superfície: $A = 0.9$ na areia, $0.72p_u$ na argila além de $3y_{50}$

A **condição de topo**, o **comprimento livre**, a **carga axial** e a **seção fissurada** alteram o resultado de forma marcante; o comprimento livre é o que mais

O deslocamento não é proporcional à carga: a **carga correspondente ao deslocamento admissível** é obtida resolvendo-se novamente (H_y, H_M)

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning, Boston.

Matlock, H. e Reese, L.C. (1960). Generalized solutions for laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 86(SM5), 63–91.

Matlock, H. (1970). Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay. Proceedings of the 2nd Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 1204, 577–594.

Reese, L.C., Cox, W.R. and Koop, F.D. (1974). Analysis of laterally loaded piles in sand. Proceedings of the 6th Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 2080, 473–485.

American Petroleum Institute (2000). Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms — Working Stress Design, API RP 2A-WSD, 21st ed.

Hetényi, M. (1946). Beams on Elastic Foundation. University of Michigan Press, Ann Arbor.

Reese, L.C., Isenhower, W.M. and Wang, S.-T. (2006). Analysis and Design of Shallow and Deep Foundations. John Wiley & Sons, Hoboken.

Broms, B.B. (1965). Design of laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 91(SM3), 79–99.

Reese, L.C. e Welch, R.C. (1975). Lateral loading of deep foundations in stiff clay. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 101(GT7), 633–649.

Davisson, M.T. e Gill, H.L. (1963). Laterally loaded piles in a layered soil system. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 89(SM3), 63–94.

NOTA

As figuras desta apresentação foram extraídas da página de Teoria do GeoTerva; todos os exemplos numéricos foram gerados com o motor de cálculo do próprio módulo, e o módulo fornece os mesmos valores.

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Calcular, passo a passo no GeoTerva, a estaca do exemplo desta apresentação: os números são os mesmos.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.