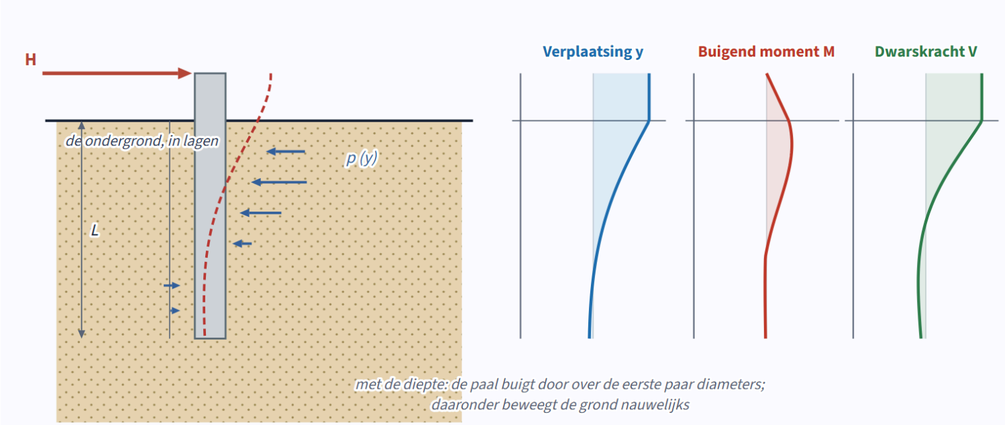
Geotechnisch college · Paalfunderingen

Horizontaal belaste paal: p–y-methode

College: de berekening van een paal onder horizontale belasting als balk op veren, p–y-krommen voor zand en klei, cyclische belasting, axiale belasting en kopcondities; bij elk onderwerp een rekenvoorbeeld.

- Balk op veren
- p–y-krommen voor zand en klei
- Cyclische belasting
- Beginvoorwaarden
- Rekenvoorbeelden



Wat leren we in dit college?

- een horizontaal belaste paal opstellen als een **balk op veren**: vergelijking, tekenafspraken, randvoorwaarden
- **Elastische oplossingen** (Matlock–Reese: zand, n_h; Hetényi: klei, k) met de hand berekenen
- de p-y-krommen volgens API (Reese–Cox–Koop) voor **zand** en volgens Matlock voor **klei**, statisch en cyclisch, punt voor punt op te stellen
- Weten **wat de numerieke oplossing (eindige elementen, Newton) doet** en hoe we de resultaten moeten lezen
- De invloed van de **axiale belasting** (P–δ), de **kopvoorwaarde** en de **vrije lengte** te interpreteren
- Het bepalen van de **belasting** die hoort bij een toegestane verplaatsing of bij de momentcapaciteit

COLLEGESTRUCTUUR

Elk onderwerp wordt in **drie stappen** behandeld:

1 · **Theorie**: wat is de regel, waarom is dat zo?

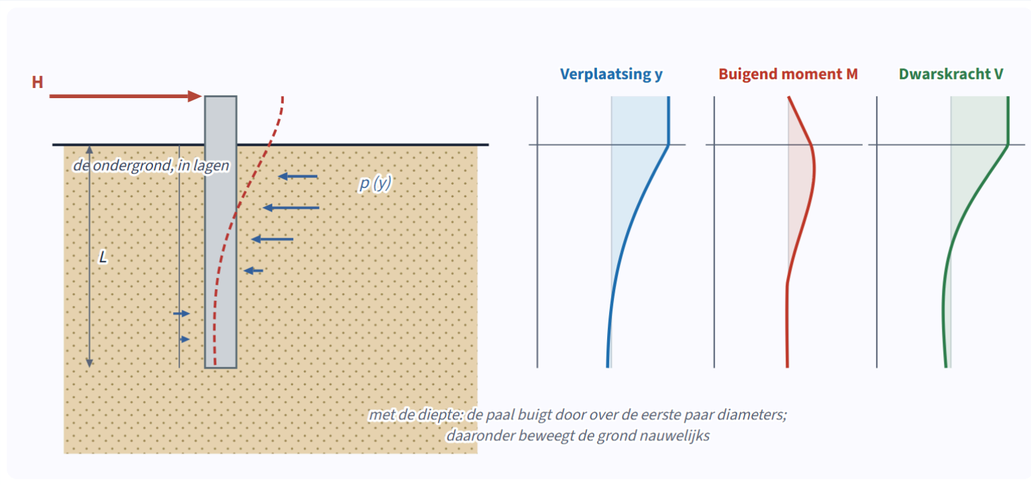
2 · **Opgave**: gegeven en gevraagd

3 · **Oplossing**: stap voor stap, met getallen

Voorbeeldpaal: betonpaal met een diameter van 0.60 m en een lengte van 14 m; in zand–klei–zand, een horizontale belasting van 120 kN op maaiveldniveau. De module opent ook met dit model.

De belasting bereikt de grond alleen via zijdelingse beweging

THEORIE



Een zijdelings belaste paal bezwijkt niet als een staande fundering: de belasting wordt **uitsluitend door de zijdelingse verplaatsing van de paal** op de grond overgedragen; de grondreactie neemt toe met de verplaatsing en stopt met toenemen wanneer de grond bezwijkt. De paal buigt als een balk over de eerste **paar diameters** grond; dieper beweegt de grond nauwelijks.

Uiterste belasting (Broms): de belasting waarbij bij een korte paal de grond bezwijkt en bij een lange paal de doorsnede bezwijkt. Dit geeft het draagvermogen, maar niet de verplaatsing en het moment bij de werkbelasting.

Elastische beddingsconstante (Matlock–Reese, Davisson–Gill, Hetényi): de grond als elastische veren; gesloten oplossing.

p–y-methode (Matlock, Reese e.a.): de veren zijn **niet-lineair**; p begint stijf ten opzichte van y, verzwakt en eindigt bij de uiterste weerstand van de grond. De oplossing is numeriek; gelaagde grond, van werkbelasting tot belasting nabij bezwijken.

Vergelijking, tekens en randvoorwaarden

THEORIE

Een paal is een balk, de grond erlangs een rij veren; elke veer werkt op haar eigen diepte en onafhankelijk van de andere (Winkler). z is neerwaarts vanaf het maaiveld, y is de verplaatsing in de richting van de belasting:

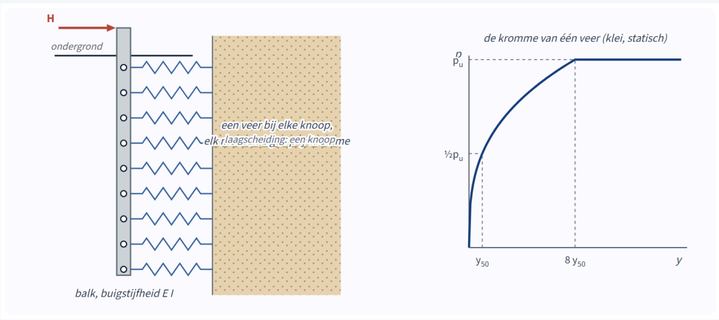
$$EI\,\frac{d^4y}{dz^4} + P\,\frac{d^2y}{dz^2} + p(y,z) = 0$$

$$\theta = \frac{dy}{dz} \qquad M = EI\frac{d^2y}{dz^2} \qquad V = EI\frac{d^3y}{dz^3} + P\theta \qquad \frac{dV}{dz} = -p$$

p is positief wanneer deze de verplaatsing tegenwerkt. Voor de veerstijfheid k geldt p = k y; **k = k_h D** (kN/m², kracht per eenheid van lengte en per eenheid van verplaatsing).

Vrije paalpunt: M = 0, V = 0. **Paalkop**: indien vrij, worden H en M_g gegeven; indien vastgehouden tegen rotatie, is de helling nul en maakt het tegenhoudende moment deel uit van de oplossing.

De vergelijking heeft alleen de grondwet p(y, z) nodig: constant k·y in het elastische geval, p–y-krommen in het niet-lineaire geval.



Zand: $k = n_h z$

THEORIE

In zand wordt de beddingsconstante recht evenredig met de diepte aangenomen: **$k = n_h z$**. De paal heeft één **karakteristieke lengte**; voor een belasting Q en een moment M_g aan het maaiveld zijn de verplaatsing en het moment:

$$T = \left(\frac{EI}{n_h} \right)^{1/5}$$

$$y = A_y \frac{QT^3}{EI} + B_y \frac{M_g T^2}{EI} \qquad M = A_m QT + B_m M_g$$

De coëfficiënten A en B zijn afhankelijk van Z = z/T (zie zijfiguur). De paal wordt als **lang** beschouwd: L/T is groot, de paalpunt verplaatst niet.

De module reproduceert deze coëfficiënten met haar eigen berekeningskern: A_y = 2.4292.

COËFFICIËNTEN (LANGE PAAL)

Z	A_y	A_θ	A_m	B_y	B_θ	B_m
0	2,429	−1,619	0.000	1,619	−1,747	1,000
0.5	1,640	−1,500	0.458	0.871	−1,250	0.974
1	0.961	−1,194	0.725	0.364	−0.789	0.851
1.4	0.543	−0.891	0.770	0.112	−0.480	0.686
2	0.142	−0.462	0.627	−0.070	−0.153	0.404
3	−0.075	−0.039	0.224	−0.089	0.057	0.059

A_m is het grootst bij Z ≈ 1.4 (0.77).

Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Paal	**HP 250 × 85, L = 25 m, E I = 25 461 kN·m²**
Grond	**zand, n_h = 12 000 kN/m³**
Belasting	**Q aan het maaiveld; M_g = 0, vrije kop**
Coëfficiënten	$A_y = 2.4292$ **(kop),** $A_m = 0.772$ **(maximum)**

GEVRAAGD

Bepaal de belasting Q en **het maximale moment** zodanig dat de verplaatsing van de paalkop **8 mm** bedraagt. Is de paal lang?

Oplossing

OPLOSSING

1 Karakteristieke lengte en paallengte

$$T = \left(\frac{25\,461}{12\,000}\right)^{1/5} = \mathbf{1.1624}\ \text{m} \qquad \frac{L}{T} = \frac{25}{1.1624} = 21.5 \ \Rightarrow\ \text{lange paal}$$

2 Belasting: $y = A_y\, Q\, T^3 / E\, I \Rightarrow Q = y\, E\, I / (A_y\, T^3)$

$$Q = \frac{0.008(25\,461)}{2.4292\,(1.1624)^3} = \mathbf{53.4}\ \text{kN}$$

3 Maximaal moment: $M = A_m\, T\, Q$

$$M_{max} = 0.772\,(1.1624)(53.4) = \mathbf{47.9}\ \text{kN·m}$$

Voor deze belasting geeft de module een kopverplaatsing van **8.00 mm** en een maximaal moment van **47.9 kN·m**: gelijk aan de handberekening.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Klei: constante k (Hetényi)

THEORIE

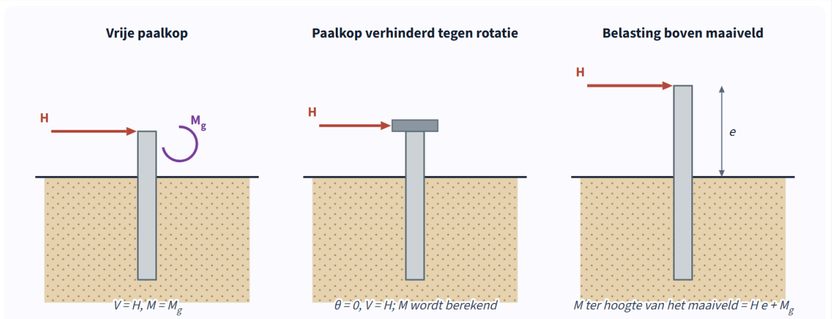
In klei wordt de beddingsconstante **constant** met de diepte aangenomen. k is de grondstijfheid per lengte-eenheid van de paal; **β = (k / 4EI)$^{1/4}$**. Voor een lange paal gelden de gesloten oplossingen van Hetényi onder een belasting H aan het maaiveld:

$$\text{vrije uiteinde:} \quad y_0 = \frac{2H\beta}{k} \qquad M_{max} = 0.3224\,\frac{H}{\beta} \quad \left(z = \tfrac{\pi}{4\beta}\right)$$

$$\text{ingeklemd uiteinde:} \quad y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} \qquad M_{head} = -\frac{H}{2\beta}$$

De paal die tegen rotatie aan de kop is ingeklemd, verplaatst **half zo veel** als de paal met vrije kop; maar het inklemmingmoment aan de kop is **groter** dan het maximale moment van de paal met vrije kop.

Het werkelijke gedrag van de poer ligt tussen deze twee uitersten; hoe dicht het daarbij komt, hangt af van de stijfheid van de poer en de bovenbouw.



Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Paal	**D = 0.60 m, E I = 190,852 kN·m² (voorbeeldpaal)**
Grond	**klei, k_h = 15,000 kN/m³ ⇒ k = k_h D = 9,000 kN/m²**
Belasting	**H = 120 kN, op het maaiveld**
Paal	**lang**

GEVRAAGD

Bepaal de verplaatsing van de paalkop en de momenten voor de gevallen **vrije kop** en **vaste kop** met de gesloten oplossingen van Hetényi.

Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 β

$$\beta = \left(\frac{k}{4EI}\right)^{1/4} = \left(\frac{9{,}000}{4(190{,}852)}\right)^{1/4} = \mathbf{0.3295}\ \mathrm{m}^{-1}$$

2 Vrije kop

$$y_0 = \frac{2H\beta}{k} = \frac{2(120)(0.3295)}{9{,}000} = \mathbf{8.79}\ \mathrm{mm}$$

$$M_{max} = 0.3224\frac{H}{\beta} = 0.3224\frac{120}{0.3295} = \mathbf{117.4}\ \mathrm{kN{\cdot}m} \quad (z = \tfrac{\pi}{4\beta} = 2.38\ \mathrm{m})$$

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

3 Ingesloten uiteinde

$$y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} = \frac{120}{4(190{,}852)(0.3295)^3} = \mathbf{4.39}\ \text{mm}$$

$$M_{head} = -\frac{H}{2\beta} = -\frac{120}{2(0.3295)} = -\mathbf{182.1}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Zij verkleint de verplaatsing bij een ingeklemde paalkop **tot de helft** (8.79 → 4.39 mm), maar het moment in de paalkop (182.1 kN·m) is **1.55 keer** het maximale moment van de vrije paal (117.4 kN·m). De elastische optie van de module geeft dezelfde getallen: vrij 8.79 mm en 117.4 kN·m, ingeklemd 4.39 mm en 182.1 kN·m.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

API RP 2A: Reese, Cox en Koop

THEORIE

De grond nabij het oppervlak wordt voor de paal als een **wig** weggeschoven; dieper **stroomt de grond horizontaal om** de paal. De uiterste weerstand op diepte z (σ′: de effectieve spanning op die diepte) is de kleinste van beide:

$$p_{us} = (C_1 z + C_2 D)\,\sigma' \qquad p_{ud} = C_3 D\,\sigma'$$

$$p = A\,p_u \tanh\left(\frac{k\,z\,y}{A\,p_u}\right) \qquad A = \max\left(0.9;\ 3 - 0.8\tfrac{z}{D}\right)\ \text{(statisch)},\ A = 0.9\ \text{(cyclisc}$$

C_1, C_2, C_3 zijn uitsluitend afhankelijk van **φ′**; k, de beginmodulus, wordt bepaald op basis van φ′ en water (aan de zijkant).

Bij kleine y is de kromme de rechte **k z y** (het geval n_h = k van de elastische oplossing); bij grote y eindigt zij op **A p_u**. A is 3.0 aan het oppervlak en 0.9 op een diepte van 2.6D: de statische weerstand is hoger nabij het oppervlak en afwezig onder cyclische belasting.

COËFFICIËNTEN DIE MET φ′ VARIËREN

φ′	C_1	C_2	C_3	k (boven water)	k (onder water)
28°	1.60	2.41	22.5	5.4	5.4
30°	1.91	2.67	28.7	10.5	7.9
32°	2.28	2.95	36.8	20.7	11.9
34°	2.72	3.25	47.3	32.7	17.6
36°	3.24	3.59	61.2	46.3	24.8
38°	3.87	3.97	79.6	61.7	33.6
40°	4.62	4.38	104.1	78.9	44.0

k: MN/m³. Voor 32°: C_1 = 2.28; C_2 = 2.95; C_3 = 36.8.

Opgave

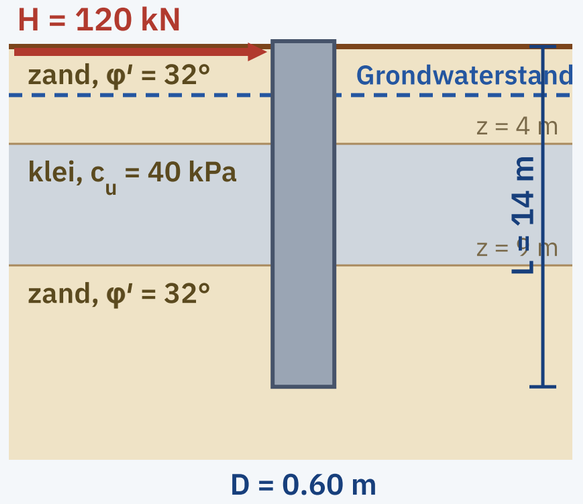
VOORBEELD

Gegeven

Paal	**boorpaal, cirkelvormige doorsnede, D = 0.60 m, L = 14 m, beton: E I = 190 852 kN·m²**
Grond	**zand 0–4 m (φ′ = 32°) · klei 4–9 m (c_u = 40 kPa) · zand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Volumiek gewicht, water	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; grondwaterstand op 2.0 m**
Diepte	**z = 2.0 m (zand 1, niveau van de grondwaterstand); k = 20.7 MN/m³ (boven water)**
Coëfficiënten	$K_0 = 0.4,\ K_a = \tan^2(45^\circ - \varphi'/2)$

GEVRAAGD

Bepaal met σ′, C_1, C_2, C_3, $\mathbf{p_u}$, A en y = 5 mm en 10 mm de waarden van **p**.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Effectieve spanning en hoeken (grondwaterstand = 2 m: vochtig van het maaiveld tot z = 2)

$$\sigma' = 18(2) = \mathbf{36.0}\ \mathrm{kPa} \qquad \alpha = \frac{\varphi'}{2} = 16^\circ,\ \beta = 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} = 61^\circ,\ K_a = \tan^2 29^\circ = 0.3073$$

2 Coëfficiënten (φ′ = 32°)

$$C_1 = \frac{K_0 \tan\varphi' \sin\beta}{\tan(\beta-\varphi')\cos\alpha} + \frac{\tan^2\beta\tan\alpha}{\tan(\beta-\varphi')} + K_0\tan\beta(\tan\varphi'\sin\beta - \tan\alpha) = \mathbf{2.281}$$

$$C_2 = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\varphi')} - K_a = \mathbf{2.947}$$

$$C_3 = K_a(\tan^8\beta - 1) + K_0\tan\varphi'\tan^4\beta = \mathbf{36.81}$$

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

3 Uiterste weerstand: de kleinste van de wig en stroming langs de omtrek

$$p_{us} = (2.281(2) + 2.947(0.6))(36.0) = 227.9\ \text{kN/m}$$

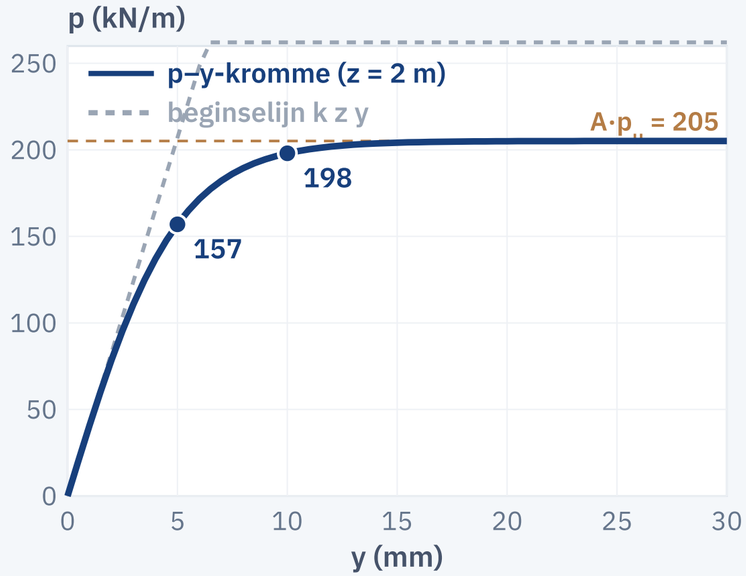
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(36.0) = 795\ \text{kN/m} \ \Rightarrow\ p_u = \mathbf{227.9}\ \text{kN/m}$$

4 A en de curve: A = max(0.9; 3 − 0.8 z/D) = max(0.9; 0.33) = 0.9; k z y / (A p_u)

$$y = 5\ \text{mm}: \ p = 0.9(227.9)\tanh\frac{20\,700(2)(0.005)}{0.9(227.9)}$$

$$= \mathbf{157.0}\ \text{kN/m}$$

$$y = 10\ \text{mm}: \ p = \mathbf{198.0}\ \text{kN/m}$$



Kromme A nadert p_u = 205 kN/m; bij 10 mm ligt zij daar tot 97% bij. Op deze diepte zijn de statische en de cyclische kromme **gelijk** (A is in beide 0.9).

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Paal	**boorpaal, cirkelvormige doorsnede, D = 0.60 m, L = 14 m, beton: E I = 190 852 kN·m²**
Grond	**zand 0–4 m (φ′ = 32°) · klei 4–9 m (c_u = 40 kPa) · zand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Volumiek gewicht, water	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; grondwaterstand op 2.0 m**
Diepte	**z = 0.6 m (1D), σ′ = 18(0.6) = 10.8 kPa; k = 20.7 MN/m³**
Zand 1	**C_1 = 2.281, C_2 = 2.947, C_3 = 36.81 (Voorbeeld 3)**

GEVRAAGD

Bepaal de statische en cyclische **p–y**-waarden voor y = 10 mm.

Oplossing

OPLOSSING

1 Uiterste weerstand en A

$$p_{us} = (2.281(0.6) + 2.947(0.6))(10.8) = 33.9\ \text{kN/m}$$

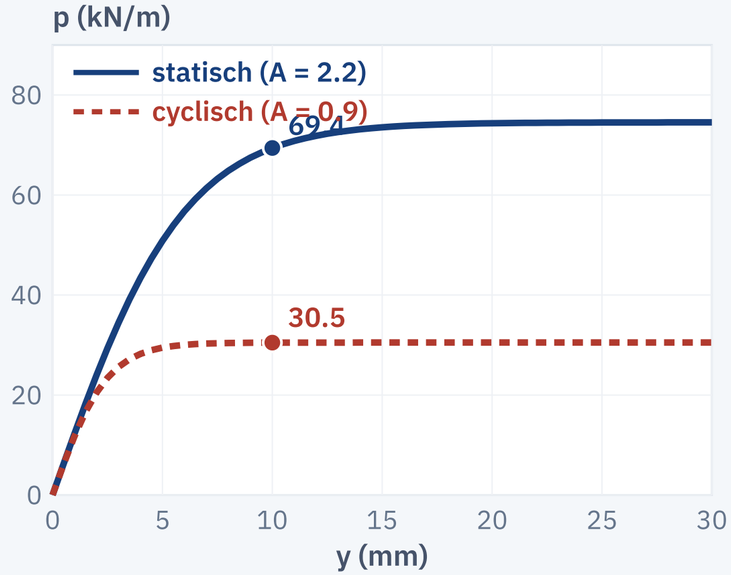
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(10.8) = 238.6\ \text{kN/m} \ \Rightarrow\ p_u = \mathbf{33.9}\ \text{kN/m}$$

$$A_{static} = \max(0.9;\ 3 - 0.8(1)) = 2.2 \qquad A_{cyclic} = 0.9$$

2 y = 10 mm: k z y = 20 700(0.6)(0.010) = 124.2

$$p_{static} = 2.2(33.9)\tanh\frac{124.2}{2.2(33.9)} = \mathbf{69.4}\ \text{kN/m}$$

$$p_{cyclic} = 0.9(33.9)\tanh\frac{124.2}{0.9(33.9)} = \mathbf{30.5}\ \text{kN/m}$$



In zand nabij het oppervlak verlaagt de cyclische belasting de weerstand met **56%** (69.4 → 30.5 kN/m): de A-factor gaat verloren. Daardoor neemt bij cyclische belasting de verplaatsing aan de kop toe.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Matlock: zachte klei, statisch en cyclisch

THEORIE

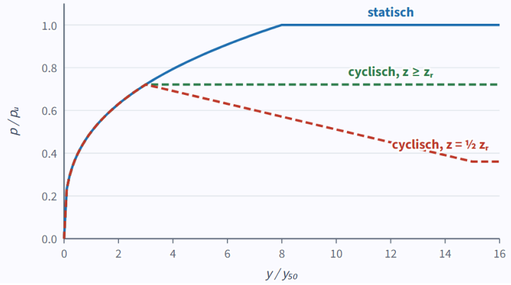
In klei gebruikt de module de **Matlock**-kromme (1970) voor zachte klei, in de vorm zoals gegeven door API RP 2A. De uiterste weerstand is opnieuw de kleinste van de waarde nabij het oppervlak (wig) en de diepe waarde (stroming):

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{\sigma'}{c_u} + J\frac{z}{D}\right) c_u D;\ 9 c_u D\right]$$

$$p = \tfrac{1}{2} p_u \left(\frac{y}{y_{50}}\right)^{1/3} \quad (y \le 8 y_{50}) \qquad p = p_u \ (y > 8 y_{50}) \qquad y_{50} = 2.5\,\varepsilon_{50} D$$

ε_{50} en J ten opzichte van c_u: beneden 48 kPa zacht (0.020; 0.5), 48–96 middel (0.010; 0.25), boven 96 stijf (0.005; 0.25).

Cyclisch: na $3y_{50}$ blijft de curve op 0.72 p_u ($z \ge z_R$); op geringere diepte **neemt zij lineair af** tot 0.72 p_u z/z_R bij $15y_{50}$. z_R = max[6D / ((σ′/z)(D/c_u) + J); 2.5D].



statisch: p = ½ p_u (y / y_{50})^⅓ tot 8 y_{50}, daarna p = p_u

cyclisch: hetzelfde tot 3 y_{50} (daar 0.72 p_u), daarna 0.72 p_u voor z ≥ z_r, en dichter bij het maaiveld lineair dalend tot 0.72 p_u z / z_r bij 15 y_{50}

Opgave

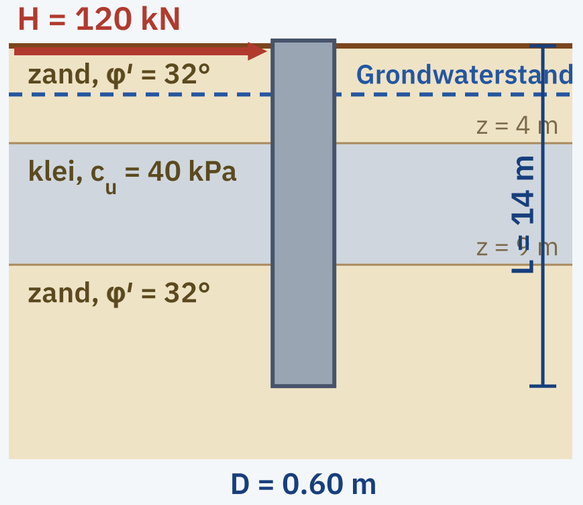
VOORBEELD

Gegeven

Paal	**boorpaal, cirkelvormige doorsnede, D = 0.60 m, L = 14 m, beton: E I = 190 852 kN·m²**
Grond	**zand 0–4 m (φ′ = 32°) · klei 4–9 m (c_u = 40 kPa) · zand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Volumiek gewicht, water	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; grondwaterstand op 2.0 m**
Diepte	**z = 6.5 m (klei, 4–9 m); ε_{50} = 0.020, J = 0.5**
Laag	**c_u = 40 kPa**

GEVRAAGD

Bepaal voor y = 15 mm en 150 mm σ′, **p_u**, y_{50} en de **statische** p–y-waarden; bepaal z_R en de plateauwaarde van de **cyclische** curve.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 σ′: zand 0–2 m vochtig (γ = 18), zand 2–4 m en klei 4–6.5 m onder water (γ_{sat} = 19)

$$\sigma' = 18(2) + (19 - 9.81)(2) + (19 - 9.81)(2.5) = \mathbf{77.4}\ \text{kPa}$$

2 Uiterste weerstand en y_{50}

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{77.4}{40} + 0.5\frac{6.5}{0.6}\right)(40)(0.6);\ 9(40)(0.6)\right]$$

$$= \min[248.4;\ 216.0] = \mathbf{216.0}\ \text{kN/m}$$

$$y_{50} = 2.5(0.020)(0.6) = \mathbf{30.0}\ \text{mm}$$

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

3 Statische kromme: $p = \frac{1}{2}\, p_u\, (y/y_{50})^{1/3}$

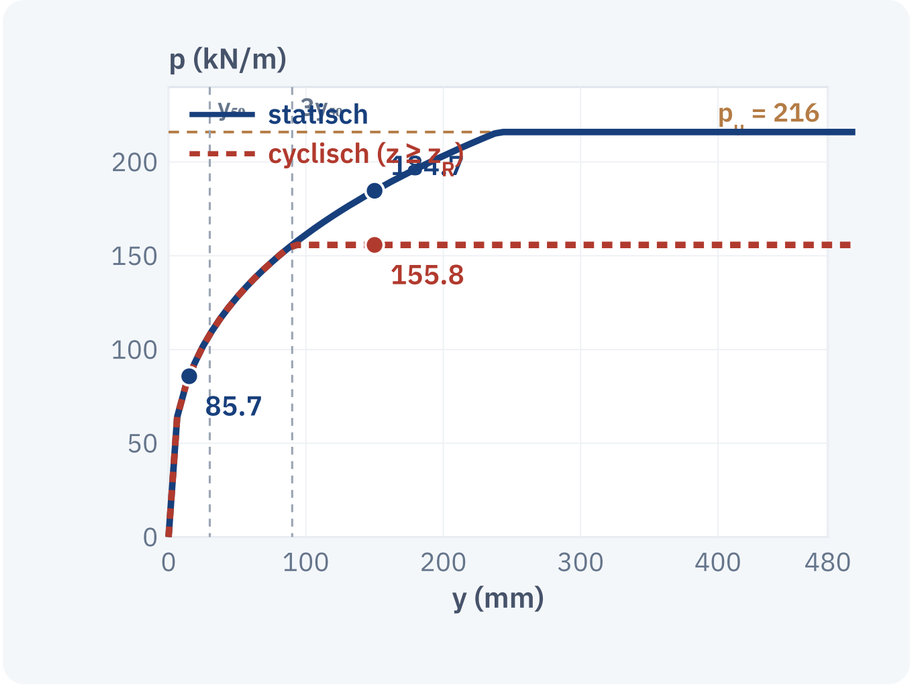
$$y = 15\ \text{mm}\ (0.5y_{50}):\ \ p = 0.5(216.0)(0.5)^{1/3} = \mathbf{85.7}\ \text{kN/m}$$

$$y = 150\ \text{mm}\ (5y_{50}):\ \ p = 0.5(216.0)(5)^{1/3} = \mathbf{184.7}\ \text{kN/m}$$

4 Cyclische curve: $z_R = \max[6(0.6)/((\sigma'/z)(D/c_u) + J);\ 2.5D] = \max[5.31;\ 1.5] = 5.31$ m; $z = 6.5 > z_R$

$$p_{perimeter}(y \geq 3y_{50}) = 0.72\, p_u = 0.7211(216.0) = \mathbf{155.8}\ \text{kN/m}$$

Bij y = 150 mm is de statische weerstand 184.7 en de cyclische 155.8 kN/m: de cyclische belasting vermindert de weerstand in deze klei met **16%**; tot $3y_{50}$ (90 mm) zijn de twee krommen identiek.



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Elke curve hoort bij de grond op haar eigen diepte

THEORIE

σ′ is de som van de volumieke gewichten van de bovenliggende lagen (γ boven de grondwaterstand, $\gamma_{sat} - \gamma_w$ eronder); het is **niet het gemiddelde** van de laag, maar neemt binnen de laag met de diepte toe.

Laag z geeft φ′ en k (zand) of c_u, ε_{50} en J (klei). De beginmodulus k van het zand wordt ten opzichte van het water ter plaatse van de laag genomen; in een laag die door water wordt doorsneden, wordt hij op basis van de gemiddelde diepte van de laag ingevuld en kan hij handmatig worden gewijzigd.

De elementen **overschrijden nooit een laaggrens**: op elke grens ligt een knoop; de stijfheid van de grond verspringt tussen de elementen, niet binnen een element.

Het berekeningsblad geeft voor elke laag stapsgewijs de waarden van de curve in het midden van de laag: σ′, coëfficiënten, p_u, A of y_{50} — met de hand reproduceerbaar (zoals in Voorbeeld 3 en 5 van deze presentatie).

De lagen moeten tot de paalpunt reiken; de grond onder de punt is niet gedefinieerd en de punt is vrij. Een zachte klei op een stijve zand verschijnt in de diagrammen als een **breuk** op de grens.

Eindige elementen en Newton

THEORIE

De vergelijking wordt met eindige elementen opgelost: de paal wordt verdeeld in **kubische balkelementen**, met y en helling θ in elke knoop. De grondreactie wordt in elk element in **vier Gauss-punten** uit de kromme afgelezen en geïntegreerd. De niet-lineaire vergelijking K u + f(u) = F wordt met de methode van Newton opgelost:

$$(K + K_s(u_i))\,\Delta u = F - K u_i - f(u_i) \qquad K_s = \int N^T \frac{dp}{dy} N \, dz$$

dp/dy daalt niet onder **een twintigste** van de secantstijfheid: de matrix blijft positief, ook waar de curve vlak loopt of daalt. Er is een stapsverkleinende lijnzoekmethode en, als die faalt, een gedempte secantstap.

Elementlengte D/6 (3–15 cm); het resultaat is **niet** afhankelijk van het net tot de getoonde stappen (element 0.4 → 0.025 m: kopverplaatsing 6.228 → 6.228 mm).

Als de belasting groter is dan de grond kan dragen, **is er geen evenwicht**; de module meldt dit en geeft geen getallen. De oplossing geldt ook niet als de grond onder het maaiveld meer dan **vijf paalbreedtes** is verplaatst.

De cyclische kleikromme, of de respons op axiale belasting, is geen enkele stijgende kromme; zij stijgt tot de **uiterste belasting**. De module bereikt de belasting in stappen vanaf nul.

In elke studie worden twee toetsen opgeschreven: Σ p Δz = H en moment aan de punt = 0 (statisch).

P–δ-effect en knik

THEORIE

De axiale belasting P grijpt aan langs de **vervormde vorm** van de paal: zij komt voor in de vergelijking (de term P d²y/dz²) en in de geometrische stijfheid van elk element; zij verlaagt de laterale stijfheid van de ligger onder druk en vergroot de verplaatsing en het moment. De module neemt P over de volledige lengte constant en gelijk aan de kop en de punt (in werkelijkheid draagt schachtwrijving de belasting over aan de grond; constant aannemen is aan de veilige kant).

$$P_{cr} = \sqrt{k\,EI} \qquad (\text{vrije voet},\ k\ \text{constant},\ \text{lange paal})$$

Zij is **de helft** van de waarde 2√(kEI) voor een oneindige balk: een vrij uiteinde kan roteren. Een ingeklemde kop bezwijkt bij een hogere belasting.

Naarmate P de knikbelasting nadert, stijgt de belasting–verplaatsing onbegrensd; de module meldt **"axiale belasting overschrijdt de knikbelasting"**.

De gecombineerde weerstand van de paaldoorsnede tegen axiale belasting en moment is een constructieve ontwerptoets.

VOORBEELDPAAL

Voor E I = 190,852 kN·m² en k = 9,000 kN/m² in elastische klei:

$$P_{cr} = \sqrt{9{,}000\,(190{,}852)} = 41{,}445\ \text{kN}$$

Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Paal	**boorpaal, cirkelvormige doorsnede, D = 0.60 m, L = 14 m, beton: E I = 190 852 kN·m²**
Grond	**zand 0–4 m (φ′ = 32°) · klei 4–9 m (c_u = 40 kPa) · zand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Volumiek gewicht, water	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; grondwaterstand op 2.0 m**
Belastingen	**H = 120 kN; axiale belasting P = 800 kN (constant)**
Knik	**k = k_h D = 9,000 kN/m² (elastische klei), vrije kop**
Module	**P = 0: kop 6.23 mm, M_{max} 151.8 kN·m**

GEVRAAGD

Ligt P = 800 kN **dicht** bij de knikbelasting? Hoe groot is het P–δ-effect?

Oplossing

OPLOSSING

1 Knikbelasting (vrije kop, k constant)

$$P_{cr} = \sqrt{kEI} = \sqrt{9{,}000(190{,}852)} = \mathbf{41{,}445}\ \text{kN} \qquad \frac{P}{P_{cr}} = \frac{800}{41{,}445} = \mathbf{0.019}$$

2 In de module met P = 800 kN (inclusief P–δ)

$$y_{head}:\ 6.23 \rightarrow 6.32\ \text{mm}\ \ (+2\%) \qquad M_{max}:\ 151.8 \rightarrow 154.5\ \text{kN·m}\ \ (+2\%)$$

800 kN, slechts **2%** van de kniklast: de axiale belasting brengt de paal niet in de buurt van knik; het P–δ-effect verhoogt de verplaatsing met 2% en het moment met 2%. Bij deze paal is de axiale belasting in de laterale analyse secundair, maar niet verwaarloosbaar.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Vrij, ingeklemd en bovenbelasting op de grond

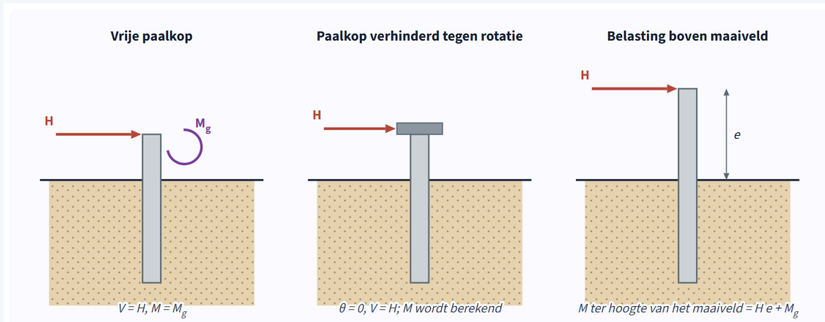
THEORIE

Vrije kop: in het belastingspunt geldt V = H en M = M_g.

Vaste kop: de helling is nul, de kop verplaatst zijwaarts. Op lange, uniforme, elastische grond verplaatst hij **half zo veel** als in het vrije geval; het weerstandbiedende moment M = −H/(2β) is groter dan het grootste moment van de vrije paal. Een werkelijke paalkop ligt tussen beide gevallen in.

Vrije lengte e: de paal boven de grond buigt als een uitkraging. De dwarskracht bedraagt H tot aan het maaiveld en het moment bereikt aan het maaiveld **M(0) = M_g + H e**; daar neemt de grond het over.

Verplaatsing van de kop = verplaatsing aan het maaiveld + rotatie aan het maaiveld × e + consoleverplaatsing van de vrije lengte (H e^3 / 3EI). Dezelfde belasting maakt de verplaatsing van de kop met een vrije lengte **veel groter** dan die van het maaiveld; het maximale moment bevindt zich meestal in de grond of iets daaronder.



Opgave

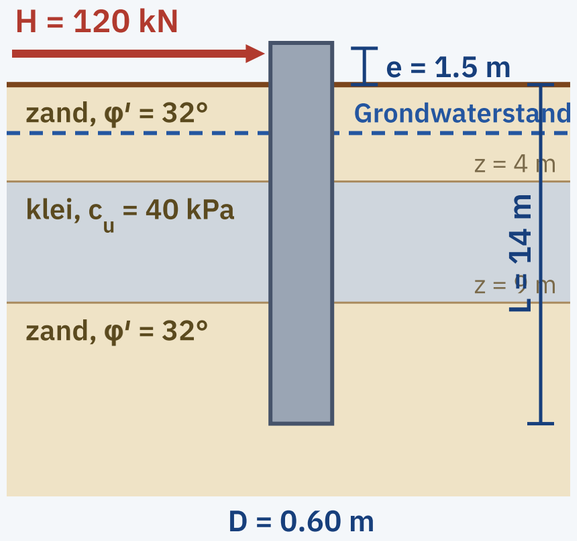
VOORBEELD

Gegeven

Paal	**boorpaal, cirkelvormige doorsnede, D = 0.60 m, L = 14 m, beton: E I = 190 852 kN·m²**
Grond	**zand 0–4 m (φ′ = 32°) · klei 4–9 m (c_u = 40 kPa) · zand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Volumiek gewicht, water	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; grondwaterstand op 2.0 m**
Vrije lengte	**belasting boven het maaiveld op e = 1.5 m; H = 120 kN, vrije kop**
Modulus (aan het maaiveld)	**y_{grond} = 11.12 mm, helling = 0.321° (naar de belasting toe)**

GEVRAAGD

Bepaal het **moment** en de **verplaatsing van de paalkop** aan het maaiveld; vergelijk het resultaat met 20.23 mm uit de module.



Oplossing

OPLOSSING

1 Moment aan het maaiveld (dwarskracht H over de vrije lengte, $M_g = 0$)

$$M(0) = M_g + H\,e = 0 + 120(1.5) = \mathbf{180}\ \mathrm{kN{\cdot}m}$$

2 Verplaatsing van de vrije lengte als vrij uitkragende staaf

$$\frac{H\,e^3}{3EI} = \frac{120(1.5)^3}{3(190{,}852)} = 0.71\ \mathrm{mm}$$

3 Verplaatsing aan de kop = $y_{grond} + |\theta|\,e + H\,e^3/3EI$

$$y_{head} = 11.12 + 5.605(1.5) + 0.71 = \mathbf{20.23}\ \mathrm{mm}$$

Met de hand **20.23 mm**, in de module 20.23 mm: identiek. Met de belasting op maaiveldniveau verschoof de kop 6.23 mm; 1.5 m vrije lengte maakt dat **3.2 keer** zoveel. Het maximale moment bedraagt 306 kN·m, 1.68 m onder het maaiveld (hoger dan de 180 kN·m aan het maaiveld).

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Welk getal zegt wat?

THEORIE

Kopverplaatsing y en rotatie (helling dy/dz; negatief voor een paal die in de belastingsrichting ligt). Bij een vrije lengte wordt ook de waarde aan het maaiveld gegeven.

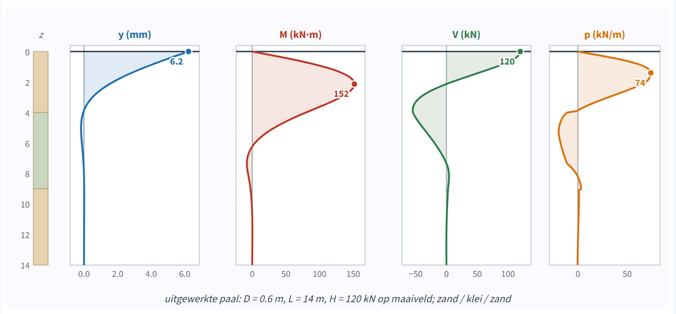
Maximaal buigend moment en de diepte ervan. Bij een ingeklemde kop wordt ook het kopmoment vermeld; dit is niet altijd het grootste.

Diepte van nulverplaatsing: de plaats waar de paal haar eigen as snijdt; daarboven beweegt de grond naar de paal toe, daaronder van de paal af.

Dwarskracht en grondreactie; de reactie en het uiteinde van de p–y-kromme worden naast elkaar uitgezet: zo is te zien hoe dicht de grond bij haar grens is.

Punt: aan de punt van een voldoende lange paal treedt geen verplaatsing op. Als de punt meer beweegt dan een tiende van de verplaatsing aan het maaiveld en meer dan 2 mm, is de paal voor deze belasting **kort**: zij roteert als een star lichaam en de lengte bepaalt het resultaat.

De p–y-weergave tekent de krommen op vijf diepten in het bewegende deel en markeert op elk daarvan het **bereikte punt**: het punt aan het vlakke begin van de kromme is elastisch, het punt nabij het einde bevindt zich op de grens.



uitgewerkte paal: D = 0.6 m, L = 14 m, H = 120 kN op maaiveld; zand / klei / zand

Opgave

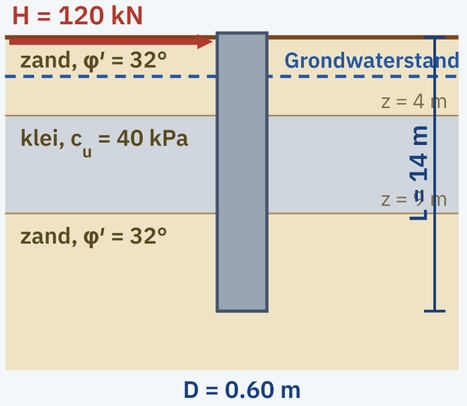
VOORBEELD

Gegeven

Paal	**boorpaal, cirkelvormige doorsnede, D = 0.60 m, L = 14 m, beton: E I = 190 852 kN·m²**
Grond	**zand 0–4 m (φ′ = 32°) · klei 4–9 m (c_u = 40 kPa) · zand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Volumiek gewicht, water	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; grondwaterstand op 2.0 m**
Moduleresultaten	**kop y = 6.23 mm, helling 0.150°; M_{max} = 151.8 kN·m (z = 2.13 m); verplaatsing nul bij z = 3.85 m; punt 0.0019 mm**
Maximale grondreactie	**p = 74.0 kN/m, z = 1.40 m; A = max(0.9; 3 − 0.8(1.4)/0.6), p_u = 125.0 kN/m**

GEVRAAGD

Is de paal **lang** voor deze belasting? Op welk **percentage** van zijn grens werkt de grond op een diepte van 1.40 m? Interpreteer de statische toetsen.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

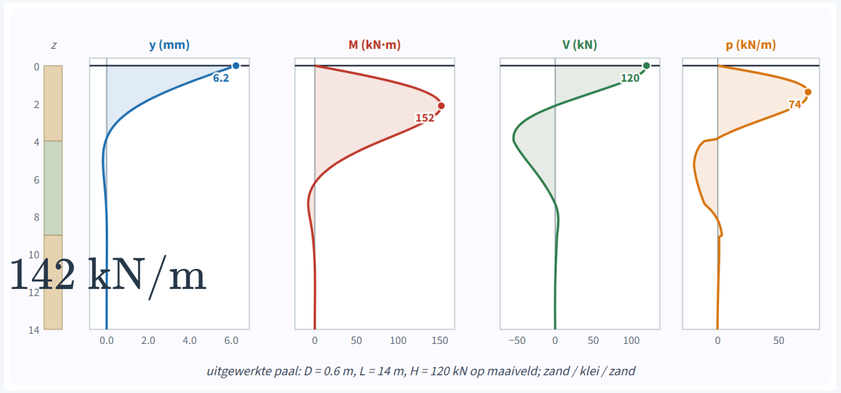
1 Randvoorwaarde: de paalkopverplaatsing wordt vergeleken met 2 mm, een tiende van de verplaatsing aan het maaiveld

$$y_{tip} = 0.0019 \text{ mm} \ll 0.1(6.23) = 0.62 \text{ mm} \;\Rightarrow\; \text{lange paal}$$

2 Bij 1.40 m: welk deel van de grond ligt binnen de grenswaarde?

$$A = \max\left(0.9;\; 3 - \frac{0.8(1.4)}{0.6}\right) = 1.133\;; \quad A\,p_u = 1.133(125.0) = 142 \text{ kN/m}$$

$$\frac{p}{Ap_u} = \frac{74.0}{142} = \mathbf{0.52}$$



uitgewerkte paal: D = 0.6 m, L = 14 m, H = 120 kN op maaiveld; zand / klei / zand

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

3 Statische toetsen

$$\sum p\,\Delta z = 120.000\ \text{kN} = H \qquad M_{tip}\ (\text{uit statisch}) = 0.000\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad 7\ \text{iteratie}$$

De paal is **lang**; op 1.40 m werkt de grond op **52%** van haar grens (niet aan het einde van de curve). Beide toetsen voldoen ook: dit zijn toetsen van de iteratie en de boekhouding, **niet van de nauwkeurigheid van het model**.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Belasting die overeenkomt met de toelaatbare waarde

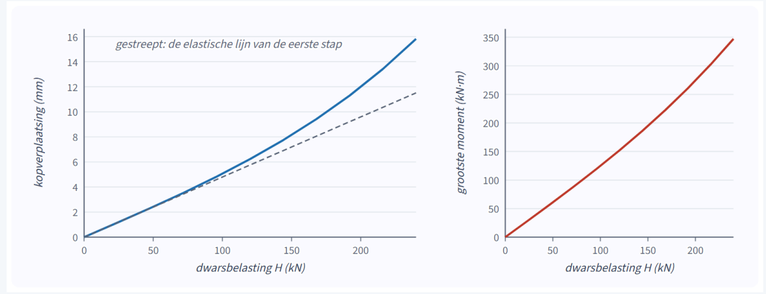
THEORIE

Omdat de grond niet-lineair is, is de verplaatsing niet evenredig met de belasting; de **belasting bij de toelaatbare verplaatsing** kan niet worden afgelezen uit het resultaat bij de werkbelasting. De module verhoogt de belasting en het moment vanaf het begin evenredig (een factor λ op H en M_g, met de axiale belasting constant), lost de vergelijking bij elke stap opnieuw op en vindt de λ waarbij de verplaatsing aan de kop de toelaatbare waarde bereikt (of het grootste moment de doorsnedecapaciteit): $\mathbf{H_y}$ of $\mathbf{H_M}$.

Als de grond de toelaatbare waarde niet kan dragen (als er geen evenwicht wordt bereikt voordat deze wordt gehaald), meldt de module **"niet bereikt"** en eindigt de curve bij de laatst opgeloste belasting. Bij cyclische klei of axiale belasting buigt de curve: dit is de **uiterste belasting van de grond**.

Dit is niet het draagvermogen van de paal: in de module is de paal elastisch; een paal die in buiging bezwijkt, kan eerder bezwijken dan de grond. Het ingevoerde momentdraagvermogen is de toets hiervoor.

De module geeft geen veiligheidsfactor en neemt er ook geen over uit de norm: de toelaatbare verplaatsing en het momentcapaciteit zijn de verantwoordelijkheid van de ingenieur.



Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Paal	**boorpaal, cirkelvormige doorsnede, D = 0.60 m, L = 14 m, beton: E I = 190 852 kN·m²**
Grond	**zand 0–4 m (φ′ = 32°) · klei 4–9 m (c_u = 40 kPa) · zand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Volumiek gewicht, water	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; grondwaterstand op 2.0 m**
Niet-lineaire oplossing	**Voor H = 30, 60, …, 270 kN de verplaatsing van de paalkop: 1.44 · 2.93 · 4.51 · 6.23 · 8.15 · 10.33 · 12.86 · 15.82 · 19.29 mm**
Toelaatbaar	**y_{all} = 10 mm; momentcapaciteit M_{cap} = 200 kN·m**

GEVRAAGD

H_y, de belasting bij y_{all} = 10 mm; H_M, de belasting die overeenkomt met M_{cap}; wat zou de fout zijn als lineaire evenredigheid werd gebruikt?

Oplossing

OPLOSSING

1 Lineaire verhouding (vanuit 6.23 mm bij de werkbelasting) en de exacte oplossing

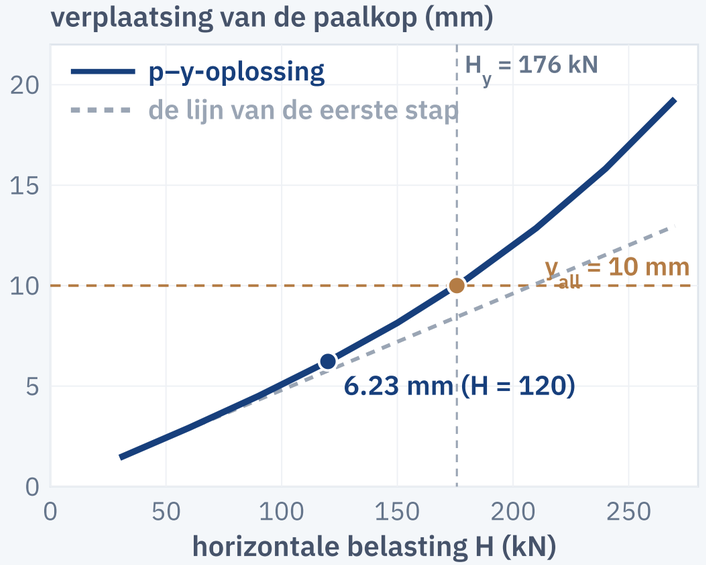
$$H_{y,linear} = 120\,\frac{10}{6.23} = 192.7\ \text{kN}$$

$$H_y = \mathbf{175.7}\ \text{kN}\ (\lambda = 1.464)$$

2 Belasting die overeenkomt met het momentcapaciteit

$$H_M = \mathbf{153.6}\ \text{kN}\ \ (\lambda = 1.280;\ y_{head} = 8.39\ \text{mm})$$

Een lineaire evenredigheid zou de belasting **10% te hoog** geven (193 ≠ 176 kN): naarmate de grond weekt, groeit de verplaatsing sneller dan de belasting. **Maatgevend** is het moment: H_M = 154 kN, waarbij de kopverplaatsing slechts 8.4 mm bedraagt; bij de belasting die hoort bij de toelaatbare verplaatsing (H_y = 176 kN) zou het moment 234 kN·m zijn.



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Paal	**boorpaal, cirkelvormige doorsnede, D = 0.60 m, L = 14 m, beton: E I = 190 852 kN·m²**
Grond	**zand 0–4 m (φ′ = 32°) · klei 4–9 m (c_u = 40 kPa) · zand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Volumiek gewicht, water	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; grondwaterstand op 2.0 m**
Te vergelijken	**kopvoorwaarde · vrije lengte · cyclische belasting · axiale belasting (800 kN) · gescheurde doorsnede (E I × 0.6) · elastische grond (n_h = 8 MN/m³, k_h = 15 MN/m³)**

GEVRAAGD

Vergelijk in elk geval de verplaatsing van de paalkop en het grootste moment met de werkbelasting.

Oplossing

OPLOSSING

Toestand	y_{kop} (mm)	M_{max} (kN·m)	y / y_0	M / M_0
Zoals ingevoerd: vrij, statisch, op maaiveldniveau	6.23	152	1.00	1.00
Aan de bovenkant ingeklemd tegen rotatie (M_{top})	2.24	-175	0.36	1.15
De belasting bevindt zich 1.5 m boven het maaiveld	20.23	306	3.25	2.01
Cyclische belasting (API)	7.28	172	1.17	1.13
Axiale belasting P = 800 kN	6.32	155	1.02	1.02
Gescheurde doorsnede, E I × 0.6	7.93	140	1.27	0.92
Elastische grond (n_h, k_h)	10.49	173	1.68	1.14

De kopvoorwaarde verkleint de verplaatsing met een factor 0.36 en vergroot het moment; **de vrije lengte** heeft de grootste invloed (×3.2 verplaatsing, ×2.0 moment). **Cyclische belasting** vergroot de verplaatsing met 17%, **een gescheurde doorsnede** met 27%, maar verkleint het moment (de paal is dan flexibeler). De elastische grond is een aparte zaak: het is geen toets van de p–y-krommen.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

De uitgangspunten achter de getallen

THEORIE

Enkele paal: een paal die alleen staat, zonder buren, met zijn p–y-krommen. Een horizontaal belaste groep verplaatst meer dan een enkele paal bij dezelfde paalbelasting; de groep is het onderwerp van de module Paalgroep met p-multipliers voor de rijen.

Paal: één doorsnede over de volledige lengte, lineair elastisch; E I constant. Een gescheurde betondoorsnede wordt weergegeven door de E I-vermenigvuldigingsfactor en door het moment M_{cap} waarbij de doorsnede vloeit.

Ondergrond: onafhankelijke veren, geen afschuiving ertussen; de krommen komen uit proeven op specifieke gronden: zand is gebaseerd op φ', klei op c_u en ε_{50}. Het model beschrijft zand en zachte tot middelharde klei; harde klei, verweerde rots, gecementeerde grond en liquefactiegevoelig zand worden met hun eigen krommen beschreven.

Belasting: statisch of cyclisch met API-reductie; wordt eerst aangebracht. De **axiale belasting** is constant over de gehele lengte.

Numerieke oplossing: de eindige elementen en de niet-lineaire iteratie zijn voor de gegeven vergelijking exact tot de getoonde stappen; de benadering zit in de vergelijking (de grond wordt door veren voorgesteld). Met twee onafhankelijke programma's (eindige differenties, in een andere taal) is voor 14 palen binnen 0.01% overeenstemming gevonden.

De p–y-methode vormt in de praktijk de basis van het ontwerp van zijdelings belaste palen; de waarden moeten worden vergeleken met de toelaatbare waarden van het project en, indien beschikbaar, met de **paalbelastingproef**.

Samenvatting

Belangrijkste punten

De paal is een **balk op niet-lineaire veren**: $EI\,y'''' + P\,y'' + p(y, z) = 0$; de grondwet is de p–y-kromme

Elastisch: zand $n_h z \rightarrow T = (EI/n_h)^{1/5}$; klei $k \rightarrow \beta = (k/4EI)^{1/4}$, $y_0 = 2H\beta/k$, $M_{max} = 0.3224\ H/\beta$

Zand: $p = A\,p_u \tanh(kzy/Ap_u)$, $p_u = \min[(C_1 z + C_2 D)\sigma'; C_3 D\sigma']$ · **Klei**: $p = ½p_u(y/y_{50})^{1/3}$, $p_u = \min[(3 + \sigma'/c_u + Jz/D)c_u D; 9c_u D]$

Cyclische belasting verlaagt de weerstand nabij het oppervlak: $A = 0.9$ in zand, $0.72p_u$ in klei voorbij $3y_{50}$

Kopconditie, **vrije lengte**, **axiale belasting** en **gescheurde doorsnede** veranderen het resultaat aanzienlijk; de vrije lengte het meest

De verplaatsing is niet evenredig met de belasting: de **belasting bij de toelaatbare verplaatsing** wordt gevonden door opnieuw te berekenen (H_y, H_M)

Literatuur

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning, Boston.

Matlock, H. and Reese, L.C. (1960). Generalized solutions for laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 86(SM5), 63–91.

Matlock, H. (1970). Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay. Proceedings of the 2nd Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 1204, 577–594.

Reese, L.C., Cox, W.R. and Koop, F.D. (1974). Analysis of laterally loaded piles in sand. Proceedings of the 6th Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 2080, 473–485.

American Petroleum Institute (2000). Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms — Working Stress Design, API RP 2A-WSD, 21st ed.

Hetényi, M. (1946). Beams on Elastic Foundation. University of Michigan Press, Ann Arbor.

Reese, L.C., Isenhower, W.M. and Wang, S.-T. (2006). Analysis and Design of Shallow and Deep Foundations. John Wiley & Sons, Hoboken.

Broms, B.B. (1965). Design of laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 91(SM3), 79–99.

Reese, L.C. and Welch, R.C. (1975). Lateral loading of deep foundations in stiff clay. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 101(GT7), 633–649.

Davisson, M.T. and Gill, H.L. (1963). Laterally loaded piles in a layered soil system. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 89(SM3), 63–94.

OPMERKING

De figuren in deze presentatie zijn overgenomen van de Theoriepagina van GeoTerva; alle numerieke voorbeelden zijn geproduceerd met de eigen berekeningsmotor van de module, en de module geeft dezelfde waarden.

GeoTerva

Online geotechnische berekeningen

Van theorie naar praktijk

Bereken de voorbeeldpaal uit deze presentatie stap voor stap in GeoTerva: de getallen zijn dezelfde.

Module openen →

Theoriepagina →

Openen op de smartphone

Proefmodules vereisen geen registratie.

Wilt u ze in uw colleges gebruiken: info@geoterva.com