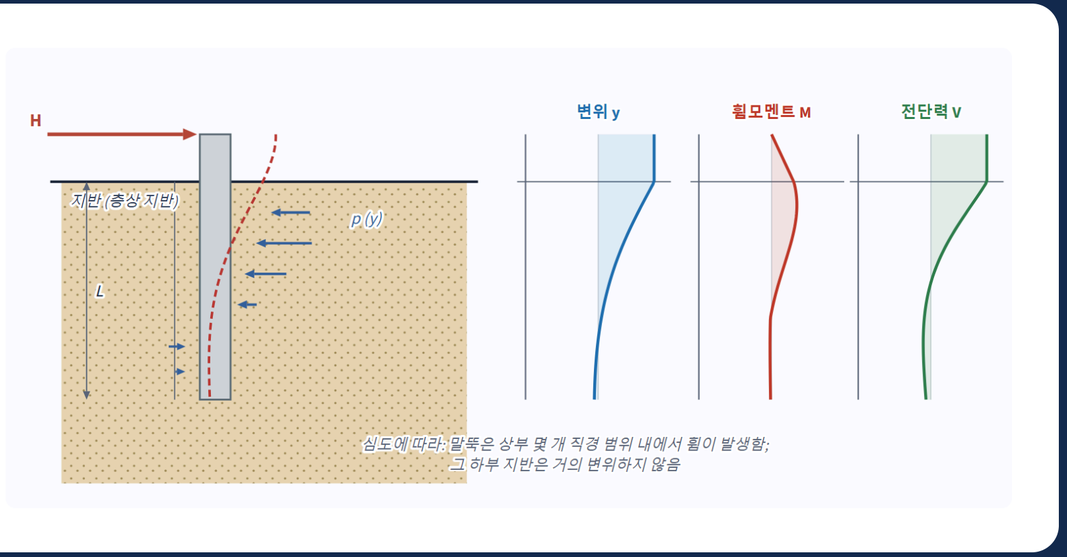
지반공학 강의 자료 · 말뚝

수평하중을 받는 말뚝: p–y 방법

강의: 수평하중을 받는 말뚝의 스프링 위의 보 해석, 모래와 점토의 p–y 곡선, 반복하중, 축하중 및 말뚝머리 조건; 주제별 계산 예제.

스프링 위의 보 · 모래와 점토의 p–y 곡선 · 반복하중 · 말뚝머리 조건 · 계산 예제



개요

이 강의에서 다루는 내용

- 수평하중을 받는 말뚝을 **스프링 위의 보**로 모델링하기: 방정식, 부호 규약, 단부 조건
- **탄성해**(Matlock–Reese: 모래, n_h; Hetényi: 점토, k)의 손계산
- **모래**에 대한 API(Reese–Cox–Koop) p–y 곡선과 **점토**에 대한 Matlock p–y 곡선을, 정적 및 반복하중 조건에 대해 점별로 작성하는 방법
- 수치 해(유한요소, Newton)가 **무엇을 하는지**와 결과를 읽는 방법을 파악하기
- **축하중**(P–δ), **말뚝머리 조건** 및 **자유장**의 영향을 해석하기
- 허용 변위 또는 모멘트 용량에 대응하는 **하중**의 산정

강의 흐름

각 주제는 **세 단계**로 다룬다:

1 · **이론**: 규칙은 무엇이며 왜 그러한가?

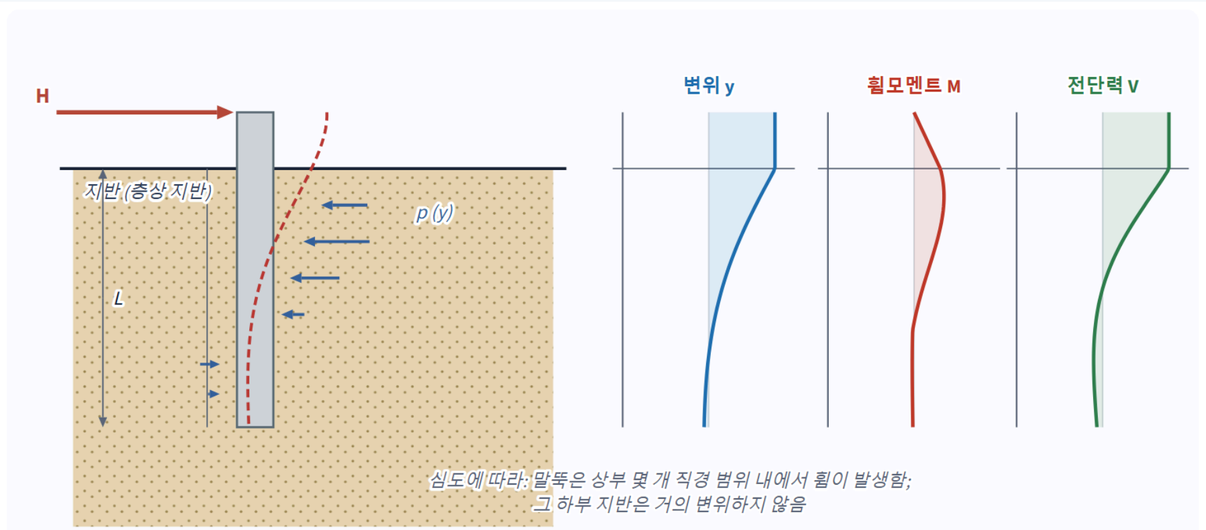
2 · **문제**: 조건과 구하는 값

3 · **풀이**: 단계별 수치 계산

예제 말뚝: 직경 0.60 m, 길이 14 m의 콘크리트 말뚝; 모래–점토–모래 지반에서 지표면 위치에 작용하는 120 kN의 수평하중. 모듈의 초기 모델도 이것이다.

하중은 횡방향 변위를 통해서만 지반에 전달된다

이론



수평하중을 받는 말뚝은 서 있는 기초처럼 파괴되지 않는다: 하중은 **말뚝의 횡방향 이동을 통해서만** 지반에 전달되며, 지반 반력은 이동에 따라 커지다가 지반이 항복하면 더 이상 커지지 않는다. 말뚝은 지반의 처음 **몇 직경** 구간에서 보처럼 휘며, 그보다 깊은 곳에서는 지반이 거의 움직이지 않는다.

극한하중(Broms): 짧은 말뚝에서는 지반이, 긴 말뚝에서는 단면이 파괴되는 하중이다. 저항력은 제공하지만 사용하중에서의 변위와 모멘트는 제공하지 않는다.

탄성 지반반력계수(Matlock–Reese, Davisson–Gill, Hetényi): 지반을 탄성 스프링으로 본다; 폐쇄형 해.

p–y 방법(Matlock, Reese 등): 스프링은 **비선형**이며, p는 y에 대해 처음에는 강하게 시작하여 연화되다가 지반의 극한저항에서 끝난다. 수치적으로 풀며, 층상 지반과 사용하중에서 파괴에 가까운 하중까지 적용한다.

식, 부호 및 경계조건

이론

말뚝은 보이고 지반은 그 길이를 따라 배열된 일련의 스프링이다; 각 스프링은 자기 깊이에서 다른 스프링과 독립적으로 작용한다(Winkler). z는 지표면에서 아래 방향이고, y는 하중 방향의 변위이다:

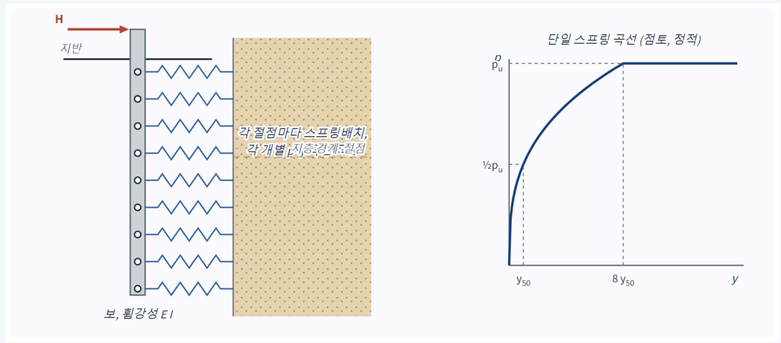
$$EI\,\frac{d^4y}{dz^4} + P\,\frac{d^2y}{dz^2} + p(y,z) = 0$$

$$\theta = \frac{dy}{dz} \qquad M = EI\frac{d^2y}{dz^2} \qquad V = EI\frac{d^3y}{dz^3} + P\theta \qquad \frac{dV}{dz} = -p$$

p는 변위에 저항할 때 양(+)이다. 스프링 강성 k에 대해 p = k y이며, **$k = k_h D$** (kN/m², 단위 길이 및 단위 변위당 힘).

선단 자유: M = 0, V = 0. **두부**: 자유인 경우 H와 M_g가 주어진다; 회전이 구속되면 기울기는 0이며 구속 모멘트가 해의 일부가 된다.

방정식에 필요한 것은 지반의 거동 법칙 p(y, z)뿐이다: 탄성 경우에는 일정한 k·y, 비선형 경우에는 p–y 곡선.



모래: $k = n_h z$

이론

모래에서 지반반력계수는 깊이에 비례하는 것으로 취한다: **$k = n_h z$**.
말뚝에는 하나의 **특성길이**가 존재하며, 지표면의 하중 Q와 모멘트 M_g에 대한 변위와 모멘트는 다음과 같다:

$$T = \left(\frac{EI}{n_h} \right)^{1/5}$$

$$y = A_y \frac{QT^3}{EI} + B_y \frac{M_g T^2}{EI} \qquad M = A_m QT + B_m M_g$$

A와 B 계수는 Z = z/T에 의존한다(옆 그림). 말뚝은 **긴 말뚝**으로 간주한다: L/T가 크고 선단은 움직이지 않는다.

모듈은 이 계수들을 자체 계산 엔진으로 재현한다: $A_y = 2.4292$.

계수 (장말뚝)

Z	A_y	A_θ	A_m	B_y	B_θ	B_m
0	2,429	−1,619	0.000	1,619	−1,747	1,000
0.5	1,640	−1,500	0.458	0.871	−1,250	0.974
1	0.961	−1,194	0.725	0.364	−0.789	0.851
1.4	0.543	−0.891	0.770	0.112	−0.480	0.686
2	0.142	−0.462	0.627	−0.070	−0.153	0.404
3	−0.075	−0.039	0.224	−0.089	0.057	0.059

A_m은 Z ≈ 1.4에서 가장 크다 (0.77).

문제

예제

조건

말뚝	**HP 250 × 85, L = 25 m, E I = 25 461 kN·m²**
지반	**모래, n_h = 12 000 kN/m³**
하중	**지표면에 Q 작용; M_g = 0, 자유 두부**
계수	$A_y = 2.4292$ **(말뚝머리),** $A_m = 0.772$ **(최대)**

구하는 값

머리 변위가 **8 mm**가 되도록 하중 Q와 **최대 모멘트**를 구하라. 이 말뚝은 긴 말뚝인가?

풀이

풀이

1 특성길이와 말뚝 길이

$$T = \left(\frac{25\,461}{12\,000}\right)^{1/5} = \mathbf{1.1624}\ \text{m} \qquad \frac{L}{T} = \frac{25}{1.1624} = 21.5 \ \Rightarrow\ \text{장말뚝}$$

2 하중: $y = A_y\, Q\, T^3 / E\, I \Rightarrow Q = y\, E\, I / (A_y\, T^3)$

$$Q = \frac{0.008(25\,461)}{2.4292\,(1.1624)^3} = \mathbf{53.4}\ \text{kN}$$

3 최대 모멘트: $M = A_m\, T\, Q$

$$M_{max} = 0.772\,(1.1624)(53.4) = \mathbf{47.9}\ \text{kN·m}$$

모듈은 이 하중에서 말뚝 머리 변위 **8.00 mm**와 최대 모멘트 **47.9 kN·m**를 산출하며, 수계산 결과와 동일하다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

점토: 일정한 k (Hetényi)

이론

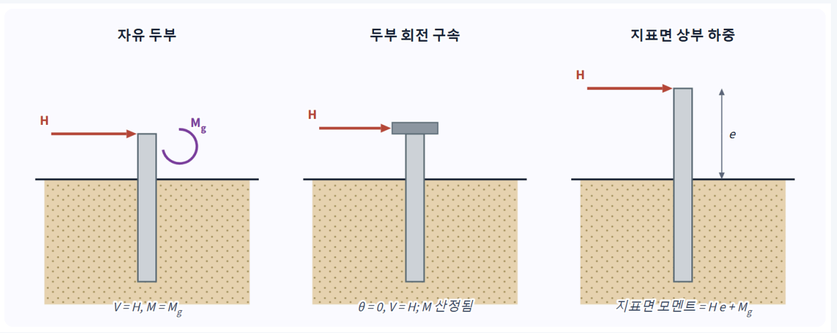
점토에서는 지반반력계수를 깊이에 관계없이 **일정**하게 취한다. k는 말뚝의 단위 길이당 지반 강성이며, **β = (k / 4EI)$^{1/4}$**이다. 긴 말뚝에 대한 Hetényi의 닫힌 형태의 해(지표면에 하중 H가 작용하는 경우):

두부 자유: $y_0 = \dfrac{2H\beta}{k}$ $\qquad M_{max} = 0.3224\,\dfrac{H}{\beta}$ $\quad (z = \frac{\pi}{4\beta})$

두부 구속: $y_0 = \dfrac{H}{4EI\beta^3}$ $\qquad M_{head} = -\dfrac{H}{2\beta}$

두부가 회전에 대해 구속된 말뚝은 자유 두부 말뚝의 **절반**만큼 변위하지만, 두부의 구속 모멘트는 자유 두부 말뚝의 최대 모멘트보다 **크다**.

실제 말뚝캡 거동은 이 두 극단 사이에 놓이며, 얼마나 가까운지는 말뚝캡과 상부구조의 강성에 달려 있다.



문제

예제

조건	
말뚝	**D = 0.60 m, E I = 190,852 kN·m² (예제 말뚝)**
지반	**점토, k_h = 15,000 kN/m³ ⇒ k = k_h D = 9,000 kN/m²**
하중	**H = 120 kN, 지표면 작용**
말뚝	**긴**

구하는 값

머리가 **자유**인 경우와 **고정**인 경우에 대해 말뚝 머리 변위와 모멘트를 Hetényi의 폐쇄형 해로 구하라.

풀이 (1/2)

풀이

1 β

$$\beta = \left(\frac{k}{4EI}\right)^{1/4} = \left(\frac{9{,}000}{4(190{,}852)}\right)^{1/4} = \mathbf{0.3295}\ \text{m}^{-1}$$

2 자유 두부

$$y_0 = \frac{2H\beta}{k} = \frac{2(120)(0.3295)}{9{,}000} = \mathbf{8.79}\ \text{mm}$$

$$M_{max} = 0.3224\frac{H}{\beta} = 0.3224\frac{120}{0.3295} = \mathbf{117.4}\ \text{kN·m} \quad \left(z = \tfrac{\pi}{4\beta} = 2.38\ \text{m}\right)$$

풀이 (2/2)

풀이

3 고정 두부

$$y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} = \frac{120}{4(190{,}852)(0.3295)^3} = \mathbf{4.39}\ \text{mm}$$

$$M_{head} = -\frac{H}{2\beta} = -\frac{120}{2(0.3295)} = -\mathbf{182.1}\ \text{kN·m}$$

머리가 구속된 경우 말뚝머리 변위를 **절반**(8.79 → 4.39 mm)으로 줄이지만, 말뚝머리 모멘트(182.1 kN·m)는 자유 말뚝의 최대 모멘트(117.4 kN·m)의 **1.55배**이다. 모듈의 탄성 옵션도 같은 값을 제공한다: 자유 8.79 mm 및 117.4 kN·m, 구속 4.39 mm 및 182.1 kN·m.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

API RP 2A: Reese, Cox 및 Koop

이론

지표면 가까이의 지반은 말뚝 앞에서 **쐐기** 형태로 밀려 올라가고, 더 깊은 곳의 지반은 말뚝 **주변을 따라 수평으로 흘러간다**. 깊이 z에서의 극한저항(σ′: 해당 깊이의 유효응력)은 두 값 중 작은 값이다:

$$p_{us} = (C_1 z + C_2 D)\,\sigma' \qquad p_{ud} = C_3 D\,\sigma'$$

$$p = A\,p_u \tanh\!\left(\frac{k\,z\,y}{A\,p_u}\right) \qquad A = \max\!\left(0.9;\ 3 - 0.8\tfrac{z}{D}\right)\ \text{(정적)},\ A = 0.9\ \text{(반복)}$$

C_1, C_2, C_3 값은 오직 **φ′**에만 의존하며, 초기 지반반력계수 k는 φ′와 지하수 조건에 따라 정한다(옆 참조).

y가 작을 때 곡선은 **k z y** 직선이며(탄성해에서 $n_h = k$인 경우), y가 클 때는 **A p_u**에서 끝난다. A는 지표면에서 3.0, 깊이 2.6D에서 0.9이며, 지표면 가까이의 정적 저항은 더 크고 반복하중에서는 이 증가가 없다.

φ′에 따라 변하는 계수

φ′	C_1	C_2	C_3	k (수면 위)	k (수면 아래)
28°	1.60	2.41	22.5	5.4	5.4
30°	1.91	2.67	28.7	10.5	7.9
32°	2.28	2.95	36.8	20.7	11.9
34°	2.72	3.25	47.3	32.7	17.6
36°	3.24	3.59	61.2	46.3	24.8
38°	3.87	3.97	79.6	61.7	33.6
40°	4.62	4.38	104.1	78.9	44.0

k: MN/m³. 32°의 경우 $C_1 = 2.28$; $C_2 = 2.95$; $C_3 = 36.8$.

문제

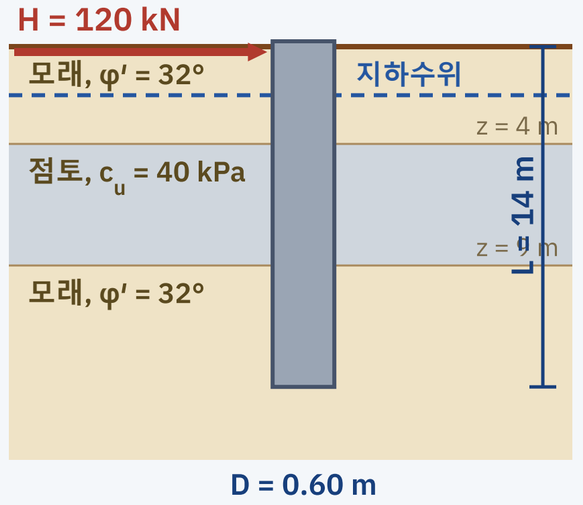
예제

조건

말뚝	**현장타설말뚝, 원형 단면, D = 0.60 m, L = 14 m, 콘크리트: E I = 190 852 kN·m²**
지반	**모래 0–4 m (φ′ = 32°) · 점토 4–9 m (c_u = 40 kPa) · 모래 9–17 m (φ′ = 32°)**
단위중량, 물	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; 지하수위 2.0 m**
깊이	**z = 2.0 m (모래 1, 지하수위 위치); k = 20.7 MN/m³ (지하수위 위)**
계수	$K_0 = 0.4,\ K_a = \tan^2(45^\circ - \varphi'/2)$

구하는 값

σ′, C_1, C_2, C_3, $\mathbf{p_u}$, A 및 y = 5 mm와 10 mm에 대한 **p** 값을 구하라.



풀이 (1/2)

풀이

1 유효응력과 각도 (지하수위 = 2 m: 지표면에서 z = 2까지 습윤)

$$\sigma' = 18(2) = \mathbf{36.0}\ \text{kPa} \qquad \alpha = \frac{\varphi'}{2} = 16^\circ,\ \beta = 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} = 61^\circ,\ K_a = \tan^2 29^\circ = 0.3073$$

2 계수 (φ′ = 32°)

$$C_1 = \frac{K_0 \tan\varphi' \sin\beta}{\tan(\beta-\varphi')\cos\alpha} + \frac{\tan^2\beta\tan\alpha}{\tan(\beta-\varphi')} + K_0\tan\beta(\tan\varphi'\sin\beta - \tan\alpha) = \mathbf{2.281}$$

$$C_2 = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\varphi')} - K_a = \mathbf{2.947}$$

$$C_3 = K_a(\tan^8\beta - 1) + K_0\tan\varphi'\tan^4\beta = \mathbf{36.81}$$

풀이 (2/2)

풀이

3 극한저항: 쐐기와 주변 유동 중 작은 값

$$p_{us} = (2.281(2) + 2.947(0.6))(36.0) = 227.9 \text{ kN/m}$$

$$p_{ud} = 36.81(0.6)(36.0) = 795 \text{ kN/m} \Rightarrow p_u = \mathbf{227.9} \text{ kN/m}$$

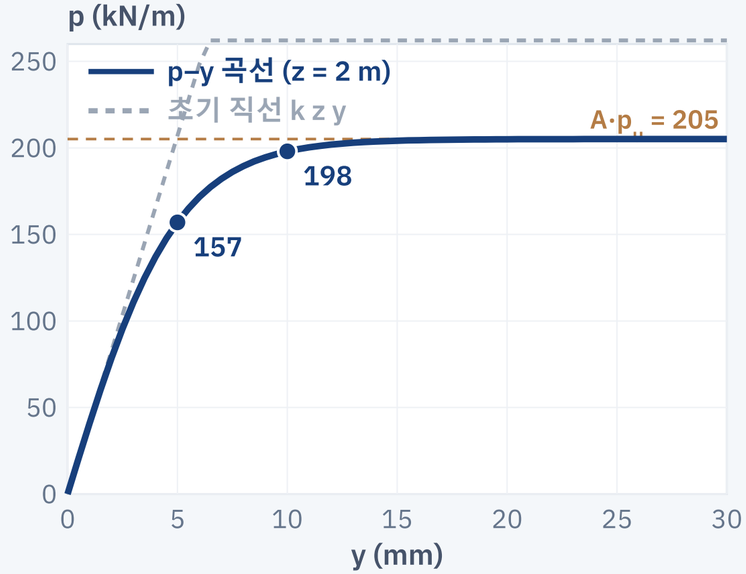
4 A와 곡선: A = max(0.9; 3 − 0.8 z/D) = max(0.9; 0.33) = 0.9; k z y / (A p_u)

$$y = 5 \text{ mm}: \; p = 0.9(227.9)\tanh\frac{20\,700(2)(0.005)}{0.9(227.9)}$$

$$= \mathbf{157.0} \text{ kN/m}$$

$$y = 10 \text{ mm}: \; p = \mathbf{198.0} \text{ kN/m}$$

곡선 A는 p_u = 205 kN/m에 접근하며, 10 mm에서 그 값의 97%에 이른다. 이 깊이에서 정적 곡선과 반복하중 곡선은 **같다**(A는 둘 다 0.9).



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

예제

조건

말뚝	**현장타설말뚝, 원형 단면, D = 0.60 m, L = 14 m, 콘크리트: E I = 190 852 kN·m²**
지반	**모래 0–4 m (φ′ = 32°) · 점토 4–9 m (c_u = 40 kPa) · 모래 9–17 m (φ′ = 32°)**
단위중량, 물	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; 지하수위 2.0 m**
깊이	**z = 0.6 m (1D), σ′ = 18(0.6) = 10.8 kPa; k = 20.7 MN/m³**
모래 1	**C_1 = 2.281, C_2 = 2.947, C_3 = 36.81 (예제 3)**

구하는 값

y = 10 mm에 대한 정적 및 반복 **p–y** 값을 구하라.

풀이

풀이

1 극한저항과 A

$$p_{us} = (2.281(0.6) + 2.947(0.6))(10.8) = 33.9 \text{ kN/m}$$

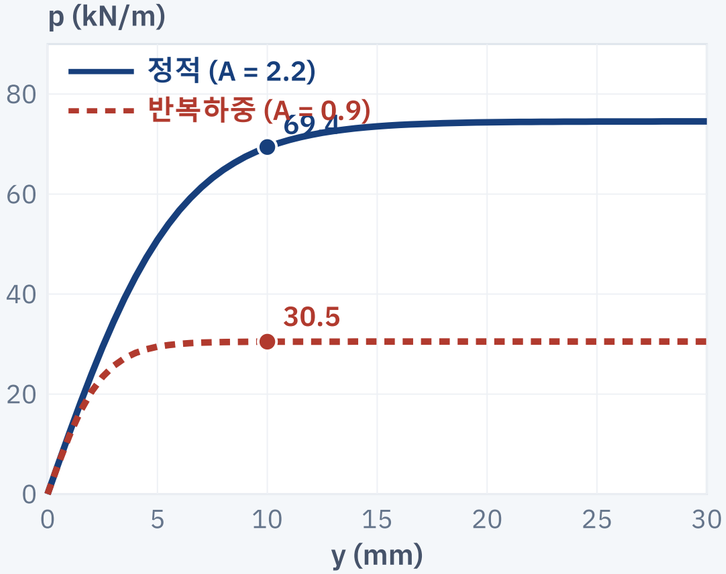
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(10.8) = 238.6 \text{ kN/m} \Rightarrow p_u = \mathbf{33.9} \text{ kN/m}$$

$$A_{static} = \max(0.9;\ 3 - 0.8(1)) = 2.2 \qquad A_{cyclic} = 0.9$$

2 y = 10 mm: k z y = 20 700(0.6)(0.010) = 124.2

$$p_{static} = 2.2(33.9)\tanh\frac{124.2}{2.2(33.9)} = \mathbf{69.4} \text{ kN/m}$$

$$p_{cyclic} = 0.9(33.9)\tanh\frac{124.2}{0.9(33.9)} = \mathbf{30.5} \text{ kN/m}$$



지표면 부근 모래에서 반복하중은 저항을 **56%** 감소시킨다 (69.4 → 30.5 kN/m): A 계수를 잃는다. 따라서 반복하중에서 말뚝 두부 변위가 커진다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

Matlock: 연약 점토, 정적 및 반복

이론

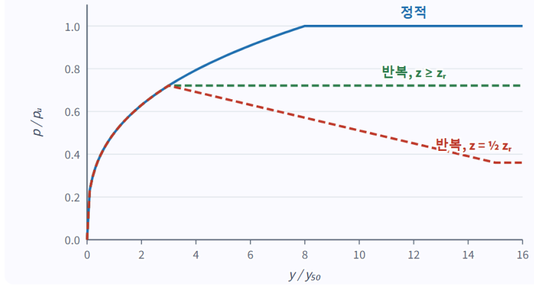
점토에서 모듈은 API RP 2A가 제시한 형태의 **Matlock** (1970) 연약 점토 곡선을 사용한다. 극한 저항은 이번에도 지표 부근(쐐기) 값과 깊은 곳(유동) 값 중 작은 값이다:

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{\sigma'}{c_u} + J\frac{z}{D}\right) c_u D;\ 9c_u D\right]$$

$$p = \tfrac{1}{2} p_u \left(\frac{y}{y_{50}}\right)^{1/3} \ (y \le 8y_{50}) \quad p = p_u \ (y > 8y_{50}) \quad y_{50} = 2.5\,\varepsilon_{50} D$$

ε_{50}과 J는 c_u에 따라: 48 kPa 미만은 연약(0.020; 0.5), 48–96은 중간(0.010; 0.25), 96 초과는 견고(0.005; 0.25).

반복하중: $3y_{50}$ 이후 곡선은 0.72 p_u에 머물고($z \ge z_R$), 더 얕은 곳에서는 $15y_{50}$에서 0.72 p_u z/z_R까지 **선형으로 감소한다**. z_R = max[6D / ((σ′/z)(D/c_u) + J); 2.5D].



정적: 8 y_{50}까지 p = ½ p_u (y / y_{50})^⅓, 이후 p = p_u

반복: 3 y_{50}(해당 위치에서 0.72 p_u)까지는 동일, 이후 z ≥ z_r 조건에서 0.72 p_u, 지표면에 가까워질수록 선형적으로 감소하여 0.72 y_{50}에서 15 p_u z / z_r에 도달한다

문제

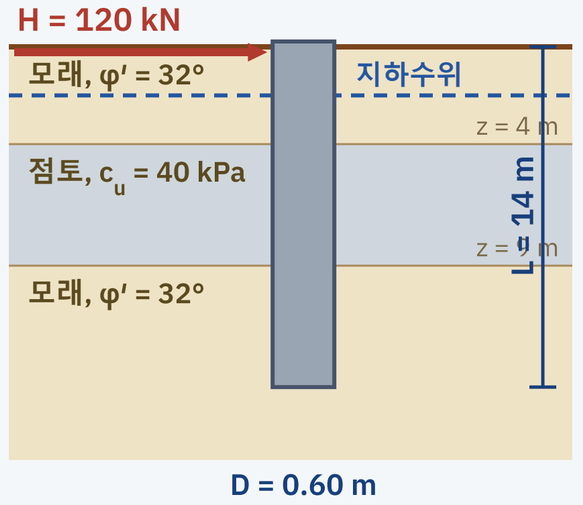
예제

조건

말뚝	**현장타설말뚝, 원형 단면, D = 0.60 m, L = 14 m, 콘크리트: E I = 190 852 kN·m²**
지반	**모래 0–4 m (φ′ = 32°) · 점토 4–9 m (c_u = 40 kPa) · 모래 9–17 m (φ′ = 32°)**
단위중량, 물	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; 지하수위 2.0 m**
깊이	**z = 6.5 m (점토, 4–9 m); ε_{50} = 0.020, J = 0.5**
지층	**c_u = 40 kPa**

구하는 값

y = 15 mm와 150 mm에 대해 σ′, **p_u**, y_{50} 및 **정적** p–y 값을 구하고, **반복하중** 곡선의 z_R과 평탄부 값을 구하라.



풀이 (1/2)

풀이

1 σ′: 모래 0–2 m 습윤 (γ = 18), 모래 2–4 m 및 점토 4–6.5 m 수중 (γ_{sat} = 19)

$$\sigma' = 18(2) + (19 - 9.81)(2) + (19 - 9.81)(2.5) = \mathbf{77.4}\ \text{kPa}$$

2 극한저항과 y_{50}

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{77.4}{40} + 0.5\frac{6.5}{0.6}\right)(40)(0.6);\ 9(40)(0.6)\right]$$

$$= \min[248.4;\ 216.0] = \mathbf{216.0}\ \text{kN/m}$$

$$y_{50} = 2.5(0.020)(0.6) = \mathbf{30.0}\ \text{mm}$$

풀이 (2/2)

풀이

3 정적 곡선: $p = \frac{1}{2} p_u (y/y_{50})^{1/3}$

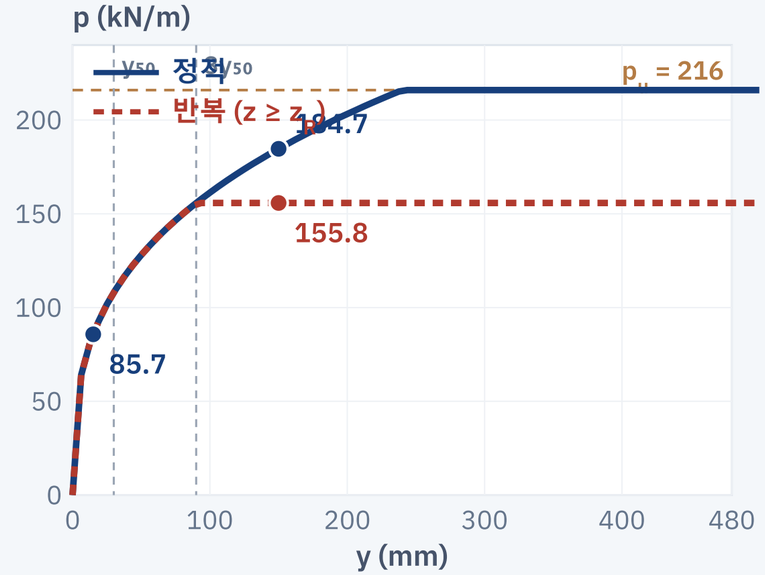
$$y = 15 \text{ mm } (0.5y_{50}): \; p = 0.5(216.0)(0.5)^{1/3} = \mathbf{85.7} \text{ kN/m}$$

$$y = 150 \text{ mm } (5y_{50}): \; p = 0.5(216.0)(5)^{1/3} = \mathbf{184.7} \text{ kN/m}$$

4 반복하중 곡선: $z_R = \max[6(0.6)/((\sigma'/z)(D/c_u) + J); 2.5D] = \max[5.31; 1.5] = 5.31$ m; $z = 6.5 > z_R$

$$p_{perimeter}(y \geq 3y_{50}) = 0.72\, p_u = 0.7211(216.0) = \mathbf{155.8} \text{ kN/m}$$

y = 150 mm에서 정적 저항은 184.7, 반복 저항은 155.8 kN/m이다: 반복하중은 이 점토에서 저항을 **16%** 감소시키며, 3y_{50}까지(90 mm)는 두 곡선이 동일하다.



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

각 곡선은 자신의 깊이에 있는 지반에 해당한다

이론

σ′는 위쪽 지층들의 단위중량의 합이다(지하수위 위에서는 γ, 아래에서는 $\gamma_{sat} - \gamma_w$). 이는 지층의 **평균이 아니며** 지층 내에서 깊이에 따라 커진다.

깊이 z의 지층에서 φ′ 및 k(모래) 또는 c_u, ε_{50}, J(점토)를 얻는다. 모래의 초기 계수 k는 지층이 위치한 곳의 지하수 조건에 따라 정하며, 지하수위가 가로지르는 지층에서는 지층 중간 깊이를 기준으로 채워지고 수동으로 변경할 수 있다.

요소는 **어떤 지층 경계도 가로지르지 않는다**: 모든 경계에 절점이 있으며, 지반의 강성은 요소 내부가 아니라 요소 사이에서 불연속적으로 변한다.

계산 페이지는 각 지층의 중간 깊이에서 곡선의 값을 단계별로 제시한다: σ′, 계수, p_u, A 또는 y_{50} — 수계산으로 재현할 수 있다(이 강의의 예제 3과 5처럼).

지층은 말뚝 선단까지 연장되어야 한다; 선단 아래의 지반은 정의되지 않으며 선단은 자유이다. 단단한 모래 위의 연약 점토는 선도에서 경계의 **꺾임**으로 나타난다.

유한요소법과 Newton

이론

방정식은 유한요소법으로 푼다: 말뚝을 **3차 보 요소**로 분할하며, 각 절점에는 y와 기울기 θ가 있다. 지반 반력은 각 요소의 **네 개의 Gauss 점**에서 곡선으로부터 취하여 적분한다. 비선형 방정식 K u + f(u) = F는 Newton 방법으로 푼다:

$$(K + K_s(u_i))\,\Delta u = F - K u_i - f(u_i) \qquad K_s = \int N^T \frac{dp}{dy} N \, dz$$

dp/dy는 할선강성의 **20분의 1** 아래로 내려가지 않는다. 곡선이 평탄하거나 하강하는 구간에서도 행렬은 양의 값을 유지한다. 단계를 줄이는 직선 탐색이 있으며, 실패하면 감쇠 할선 단계를 쓴다.

요소 길이는 D/6(3–15 cm)이며, 결과는 제시된 단계까지 격자에 **의존하지 않는다**(요소 0.4 → 0.025 m: 말뚝 두부 변위 6.228 → 6.228 mm).

하중이 지반이 지지할 수 있는 값보다 크면 **평형이 존재하지 않는다**; 모듈은 이를 알리고 수치를 제시하지 않는다. 지표면 아래에서 지반이 **말뚝 폭의 5배**를 넘어 변위한 경우에도 해로 인정하지 않는다.

반복하중에 대한 점토 곡선이나 축하중에 대한 응답은 단일한 상승 곡선이 아니라 **극한하중**까지 상승한다. 모듈은 0에서 시작해 단계적으로 하중에 도달한다.

각 해석에서 두 가지 검토 사항을 적는다: Σ p Δz = H 및 선단에서의 모멘트 = 0 (정역학).

P–δ 효과와 좌굴

이론

축하중 P는 말뚝의 **휜 형상**을 따라 작용한다. 방정식(P d²y/dz² 항)과 각 요소의 기하강성에 나타나며, 압축을 받는 보의 횡강성을 감소시키고 변위와 모멘트를 증가시킨다. 모듈은 P를 전 길이에서 일정하고 두부와 선단에서 같다고 가정한다(실제로는 주면마찰이 하중을 지반에 전달하며, 일정하게 취하는 것이 안전 측이다).

$$P_{cr} = \sqrt{k\,EI} \qquad \text{(자유 두부, } k \text{ 일정, 긴 말뚝)}$$

무한 길이 보의 2√(kEI) 값의 **절반**이다: 자유단은 회전할 수 있다. 머리가 고정된 경우에는 더 큰 하중에서 좌굴한다.

P가 좌굴하중에 가까워지면 하중–변위 관계는 한없이 증가하고, 모듈은 **"축하중이 좌굴하중을 초과함"**이라고 알린다.

축하중과 모멘트를 동시에 받는 말뚝 단면의 저항력은 구조 설계 검토 사항이다.

예제 말뚝

E I = 190,852 kN·m²이고 탄성 점토에서 k = 9,000 kN/m²인 경우:

$$P_{cr} = \sqrt{9{,}000\,(190{,}852)} = 41{,}445 \text{ kN}$$

문제

예제

조건

말뚝	**현장타설말뚝, 원형 단면, D = 0.60 m, L = 14 m, 콘크리트: E I = 190 852 kN·m²**
지반	**모래 0–4 m (φ′ = 32°) · 점토 4–9 m (c_u = 40 kPa) · 모래 9–17 m (φ′ = 32°)**
단위중량, 물	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; 지하수위 2.0 m**
하중	**H = 120 kN; 축하중 P = 800 kN (일정)**
좌굴	**k = k_h D = 9,000 kN/m² (탄성 점토), 말뚝머리 자유**
모듈	**P = 0: 말뚝 두부 변위 6.23 mm, M_{max} 151.8 kN·m**

구하는 값

P = 800 kN은 좌굴하중에 **가까운가**? P–δ 효과는 어느 정도인가?

풀이

풀이

1 좌굴하중 (자유 두부, k 일정)

$$P_{cr} = \sqrt{kEI} = \sqrt{9{,}000(190{,}852)} = \mathbf{41{,}445}\ \text{kN} \qquad \frac{P}{P_{cr}} = \frac{800}{41{,}445} = \mathbf{0.019}$$

2 모듈에서 P = 800 kN 적용 시 (P–δ 포함)

$$y_{head}:\ 6.23 \rightarrow 6.32\ \text{mm}\ \ (+2\%) \qquad M_{max}:\ 151.8 \rightarrow 154.5\ \text{kN·m}\ \ (+2\%)$$

800 kN은 좌굴하중의 **2%**에 불과하다: 축하중이 말뚝을 좌굴에 가깝게 만들지는 않으며, P–δ 효과는 변위를 2%, 모멘트를 2% 증가시킨다. 이 말뚝의 수평하중 해석에서 축하중은 부차적이지만 무시할 수는 없다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

자유, 고정 및 지반 위의 하중

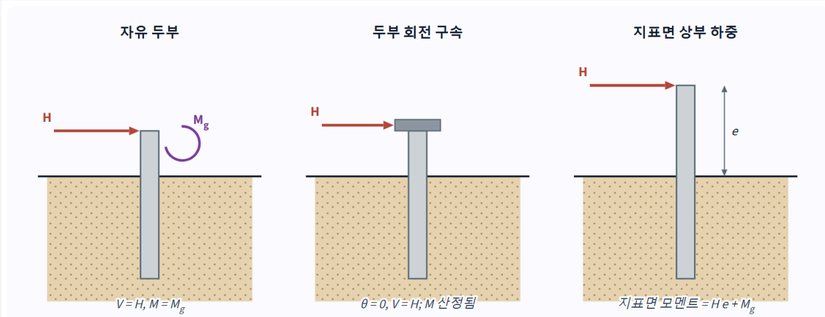
이론

자유 말뚝머리: 하중 작용점에서 V = H이고 M = M_g이다.

고정된 두부: 기울기는 영이고 두부는 횡방향으로 이동한다. 길고 균일한 탄성 지반에서는 자유 두부일 때의 **절반**만 변위하며, 구속 모멘트 M = −H/(2β)는 자유 말뚝의 최대 모멘트보다 크다. 실제 말뚝캡은 두 경우의 중간에 있다.

지상 노출 길이 e: 지표면 위의 말뚝은 캔틸레버처럼 휜다. 전단력은 지표면까지 H이고, 모멘트는 지표면에서 **M(0) = M_g + H e**에 이르며, 그 지점부터 지반이 저항하기 시작한다.

말뚝머리 변위 = 지표면 변위 + 지표면 회전각 × e + 자유 길이의 캔틸레버 변위(H e^3 / 3EI). 같은 하중이라도 자유 길이가 있으면 말뚝머리 변위가 지표면 변위보다 **훨씬 커지며**, 최대 모멘트는 대부분 지반 내이거나 그보다 약간 아래에 있다.



문제

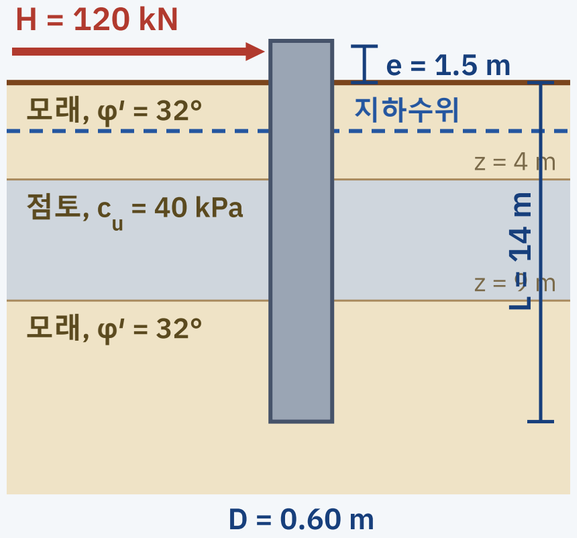
예제

조건

말뚝	**현장타설말뚝, 원형 단면, D = 0.60 m, L = 14 m, 콘크리트: E I = 190 852 kN·m²**
지반	**모래 0–4 m (φ′ = 32°) · 점토 4–9 m (c_u = 40 kPa) · 모래 9–17 m (φ′ = 32°)**
단위중량, 물	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; 지하수위 2.0 m**
자유장	**하중은 지표면보다 e = 1.5 m 위; H = 120 kN, 말뚝머리 자유**
탄성계수 (지표면에서)	**y_{ground} = 11.12 mm, 기울기 = 0.321° (하중 쪽으로)**

구하는 값

지표면에서의 **모멘트**와 **말뚝머리 변위**를 구하고, 결과를 모듈의 20.23 mm와 비교하라.



풀이

풀이

1 지표면에서의 모멘트 (자유 길이에서 전단력 H, $M_g = 0$)

$$M(0) = M_g + H\,e = 0 + 120(1.5) = \mathbf{180}\ \text{kN·m}$$

2 자유 길이 캔틸레버 변위

$$\frac{H\,e^3}{3EI} = \frac{120(1.5)^3}{3(190{,}852)} = 0.71\ \text{mm}$$

3 말뚝머리 변위 = y_{soil} + |θ| e + H e^3/3EI

$$y_{head} = 11.12 + 5.605(1.5) + 0.71 = \mathbf{20.23}\ \text{mm}$$

손계산 **20.23 mm**, 모듈 20.23 mm: 일치한다. 하중이 지표면에 있을 때 두부 변위는 6.23 mm였는데, 1.5 m의 자유 길이가 이를 **3.2배**로 만든다. 최대 모멘트는 306 kN·m이며 지표면 아래 1.68 m에 위치한다(지표면의 180 kN·m보다 크다).

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

각 수치는 무엇을 의미하는가?

이론

두부 변위 y와 회전(기울기 dy/dz; 하중 방향으로 누운 말뚝에서는 음수). 자유장이 있으면 지표면에서의 값도 제시한다.

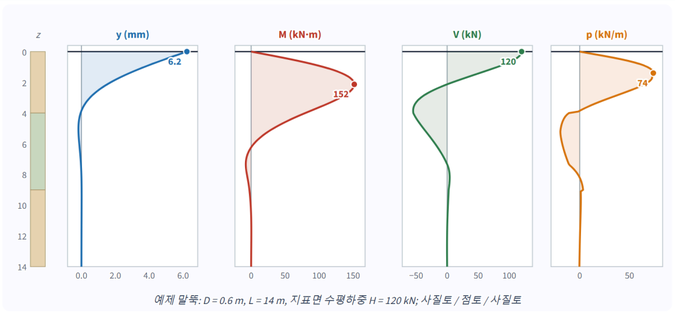
최대 휨모멘트와 그 깊이. 머리가 고정된 경우에는 머리 모멘트도 함께 나열되며, 이것이 항상 최대인 것은 아니다.

변위가 영이 되는 깊이: 말뚝이 자신의 축과 교차하는 위치; 그 위쪽에서는 말뚝이 지반 쪽으로, 아래쪽에서는 지반에서 멀어지는 쪽으로 움직인다.

전단력과 지반 반력; 반력과 p–y 곡선의 끝점을 나란히 그려, 지반이 한계에 얼마나 가까운지 확인할 수 있다.

선단: 충분히 긴 말뚝의 선단에는 변위가 없다. 선단이 지표면 변위의 10분의 1을 넘고 2 mm를 넘게 움직이면 이 하중에 대해 말뚝은 **짧은 말뚝**이며, 강체처럼 회전하고 길이가 결과를 결정한다.

p–y 보기는 움직이는 구간의 다섯 깊이에서 곡선을 그리고 각 곡선에서 **도달한 점**을 표시한다: 곡선의 평평한 시작부에 있는 점은 탄성 상태이고, 끝부분에 가까운 점은 극한 상태이다.



예제 말뚝: D = 0.6 m, L = 14 m, 지표면 수평하중 H = 120 kN; 사질토 / 점토 / 사질토

문제

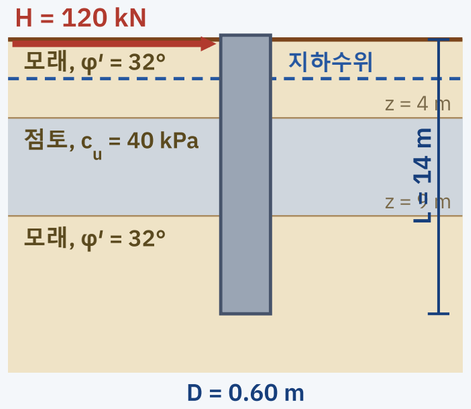
예제

조건

말뚝	**현장타설말뚝, 원형 단면, D = 0.60 m, L = 14 m, 콘크리트: E I = 190 852 kN·m²**
지반	**모래 0–4 m (φ′ = 32°) · 점토 4–9 m (c_u = 40 kPa) · 모래 9–17 m (φ′ = 32°)**
단위중량, 물	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; 지하수위 2.0 m**
모듈 결과	**말뚝머리 y = 6.23 mm, 기울기 0.150°; M_{max} = 151.8 kN·m (z = 2.13 m); z = 3.85 m에서 변위 0; 선단 0.0019 mm**
최대 지반반력	**p = 74.0 kN/m, z = 1.40 m; A = max(0.9; 3 – 0.8(1.4)/0.6), p_u = 125.0 kN/m**

구하는 값

이 하중에 대해 말뚝은 **긴 말뚝**인가? 깊이 1.40 m에서 지반은 한계의 **몇 퍼센트**로 거동하고 있는가? 정적 검토 결과를 고찰하라.



풀이 (1/2)

풀이

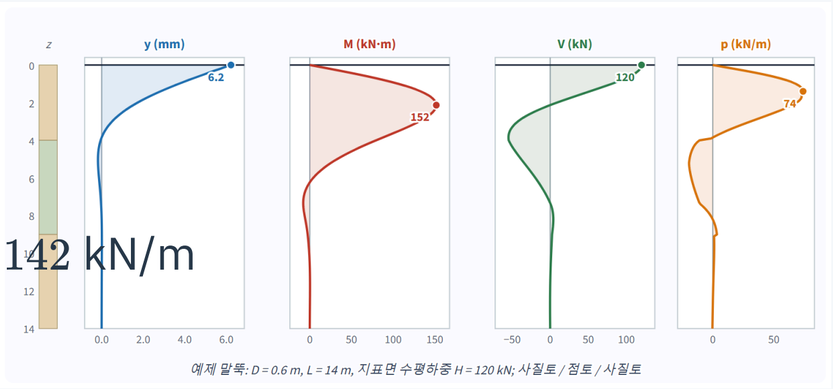
1 선단 조건: 말뚝 선단의 변위를 지표면 변위의 10분의 1 및 2 mm와 비교한다

$$y_{tip} = 0.0019\ \text{mm} \ll 0.1(6.23) = 0.62\ \text{mm} \ \Rightarrow\ \text{장말뚝}$$

2 1.40 m에서 지반은 한계의 어느 정도에 이르는가?

$$A = \max\left(0.9;\ 3 - \frac{0.8(1.4)}{0.6}\right) = 1.133\ ; \quad A\,p_u = 1.133(125.0) = 142\ \text{kN/m}$$

$$\frac{p}{Ap_u} = \frac{74.0}{142} = \mathbf{0.52}$$



예제 말뚝: D = 0.6 m, L = 14 m, 지표면 수평하중 H = 120 kN; 사질토 / 점토 / 사질토

풀이 (2/2)

풀이

3 정적 검토

$\sum p\,\Delta z = 120.000\ \text{kN} = H$ M_{tip} (정적 계산에서) $= 0.000\ \text{kN·m}$ 7 반복 계산

말뚝은 **길다**. 지반은 1.40 m 깊이에서 한계의 **52%**로 거동한다(곡선의 끝이 아님). 두 검토 모두 만족한다. 이는 반복 계산과 집계의 점검이며, **모델 정확도의 검토가 아니다**.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

허용값에 해당하는 하중

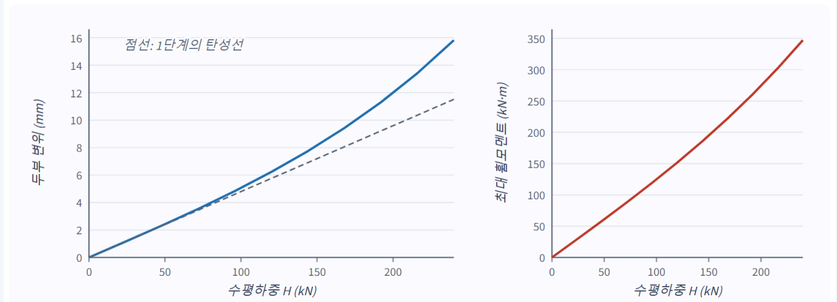
이론

지반이 비선형이므로 변위는 하중에 비례하지 않으며, **허용 변위에서의 하중**은 사용하중에서의 결과로부터 읽을 수 없다. 모듈은 하중과 모멘트를 처음부터 비례적으로 증가시키고(H와 M_g에 배율 λ를 곱하며 축하중은 일정), 매 단계에서 방정식을 다시 풀어 말뚝 두부 변위가 허용값에 도달하는(또는 최대 모멘트가 단면 내력에 도달하는) λ를 찾는다: **H_y** 또는 **H_M**.

지반이 허용값을 지지하지 못하면(허용값에 도달하기 전에 평형이 성립하지 않으면) 모듈은 **"도달하지 못함"**으로 표시하고 곡선은 마지막으로 해를 구한 하중에서 끝난다. 반복하중 점토나 축하중 조건에서는 곡선이 꺾이며, 이것이 **지반의 한계하중**이다.

이는 말뚝의 내력이 아니다: 모듈에서 말뚝은 탄성체이며, 휨에서 항복하는 말뚝은 지반보다 먼저 파괴될 수 있다. 입력한 모멘트 내력이 이에 대한 검토이다.

이 모듈은 안전율을 제시하지 않으며 기준에서 가져오지도 않는다: 허용 변위와 모멘트 용량은 기술자의 책임이다.



문제

예제

조건

말뚝	**현장타설말뚝, 원형 단면, D = 0.60 m, L = 14 m, 콘크리트: E I = 190 852 kN·m²**
지반	**모래 0–4 m (φ′ = 32°) · 점토 4–9 m (c_u = 40 kPa) · 모래 9–17 m (φ′ = 32°)**
단위중량, 물	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; 지하수위 2.0 m**
비선형 해	**H = 30, 60, …, 270 kN에 대한 말뚝 머리 변위: 1.44 · 2.93 · 4.51 · 6.23 · 8.15 · 10.33 · 12.86 · 15.82 · 19.29 mm**
허용	**y_{all} = 10 mm; 모멘트 용량 M_{cap} = 200 kN·m**

구하는 값

y_{all} = 10 mm일 때의 하중 H_y, M_{cap}에 해당하는 H_M; 선형 비례를 사용했다면 오차는 얼마가 되겠는가?

풀이

풀이

1 선형 비례 (사용하중에서의 6.23 mm 기준) 및 엄밀해

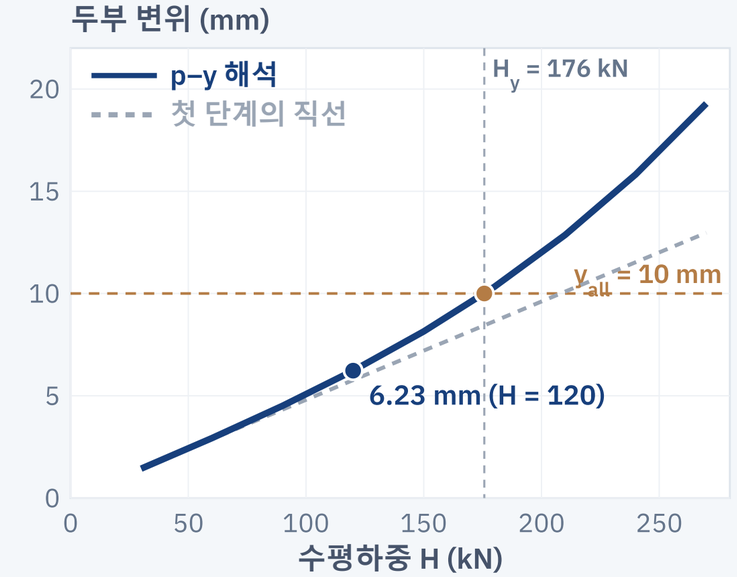
$$H_{y,linear} = 120\,\frac{10}{6.23} = 192.7\ \text{kN}$$

$$H_y = \mathbf{175.7}\ \text{kN}\ (\lambda = 1.464)$$

2 모멘트 용량에 해당하는 하중

$$H_M = \mathbf{153.6}\ \text{kN}\ \ (\lambda = 1.280;\ y_{head} = 8.39\ \text{mm})$$

선형 비례를 적용하면 하중이 **10% 크게** 산정된다(193 ≠ 176 kN): 지반이 연화됨에 따라 변위가 하중보다 빠르게 증가한다. **지배적인** 것은 모멘트이다: H_M = 154 kN이며, 그 하중에서 말뚝머리는 8.4 mm에 불과하다; 허용 변위에 해당하는 하중(H_y = 176 kN)에서는 모멘트가 234 kN·m가 될 것이다.



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

예제

조건

말뚝	현장타설말뚝, 원형 단면, D = 0.60 m, L = 14 m, 콘크리트: E I = 190 852 kN·m²
지반	모래 0–4 m (φ′ = 32°) · 점토 4–9 m (c_u = 40 kPa) · 모래 9–17 m (φ′ = 32°)
단위중량, 물	γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; 지하수위 2.0 m
비교 대상	두부 조건 · 자유 길이 · 반복하중 · 축하중(800 kN) · 균열 단면(E I × 0.6) · 탄성 지반(n_h = 8 MN/m³, k_h = 15 MN/m³)

구하는 값

각 경우에 대해 말뚝머리 변위와 최대 모멘트를 사용하중 기준으로 비교하라.

풀이

풀이

상태	y_{head} (mm)	M_{max} (kN·m)	y / y_0	M / M_0
입력한 대로: 자유, 정적, 지표면 위치	6.23	152	1.00	1.00
두부 회전 구속 (M_{top})	2.24	-175	0.36	1.15
하중: 지표면 위 1.5 m	20.23	306	3.25	2.01
반복하중 (API)	7.28	172	1.17	1.13
축하중 P = 800 kN	6.32	155	1.02	1.02
균열 단면, E I × 0.6	7.93	140	1.27	0.92
탄성 지반 (n_h, k_h)	10.49	173	1.68	1.14

두부 조건은 변위를 0.36배로 줄이고 모멘트는 증가시킨다. **자유장**의 영향이 가장 크다(변위 ×3.2, 모멘트 ×2.0). **반복하중**은 변위를 17%, **균열 단면**은 27% 증가시키지만 모멘트는 감소시킨다(말뚝이 더 유연해진다). 탄성 지반은 별개의 지반 조건이며 p–y 곡선에 대한 검토가 아니다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

수치 이면의 가정사항

이론

단일 말뚝: 이웃 말뚝 없이 홀로 서 있는 말뚝을 p–y 곡선으로 해석한다. 수평하중을 받는 무리말뚝은 같은 말뚝 하중에서 단일 말뚝보다 더 큰 변위가 생기며, 열별 p 승수를 적용하는 무리말뚝 해석은 무리말뚝 모듈의 주제이다.

말뚝: 전 길이에 걸쳐 단일 단면, 선형 탄성; EI 일정. 균열이 발생한 콘크리트 단면은 EI 배율과, 단면이 항복하는 모멘트 M_{cap}으로 나타낸다.

지반: 서로 독립된 스프링이며 스프링 사이에 전단은 없다; 곡선은 특정 지반에서 수행한 시험에 근거하며, 모래는 φ'에, 점토는 c_u와 ε_{50}에 의존한다. 모래와 연약–중간 점토를 나타내며, 단단한 점토, 풍화암, 고결 지반, 액상화되는 모래는 각각의 곡선으로 기술된다.

하중 재하: 정적 하중 또는 API 감소를 적용한 반복하중; 말뚝 머리에 작용한다. **축하중**은 전체 길이에서 일정하다.

수치해: 유한요소와 비선형 반복계산은 주어진 방정식에 대해 표시된 자릿수까지 정확하며, 근사는 방정식에 있다(지반을 스프링으로 표현한다). 서로 독립적인 두 프로그램(유한차분법, 다른 언어)과 말뚝 14개에서 0.01% 이내로 일치하였다.

p–y 방법은 실무에서 수평하중을 받는 말뚝 설계의 기본이다; 산정값은 프로젝트의 허용값 및, 있는 경우 **재하시험**과 비교해야 한다.

요약

핵심 정리

말뚝은 **비선형 스프링 위의 보**이다: $EI\,y'''' + P\,y'' + p(y, z) = 0$; 지반의 거동 법칙은 p–y 곡선이다

탄성: 모래 $n_h z \to T = (EI/n_h)^{1/5}$; 점토 $k \to \beta = (k/4EI)^{1/4}$, $y_0 = 2H\beta/k$, $M_{max} = 0.3224\,H/\beta$

모래: $p = A\,p_u \tanh(kzy/Ap_u)$, $p_u = \min[(C_1 z + C_2 D)\sigma'; C_3 D\sigma']$ · **점토**: $p = \frac{1}{2} p_u (y/y_{50})^{1/3}$, $p_u = \min[(3 + \sigma'/c_u + Jz/D)c_u D; 9c_u D]$

반복 하중은 지표 부근의 저항을 감소시킨다: 모래에서 $A = 0.9$, 점토에서는 $3y_{50}$ 초과 시 $0.72p_u$

두부 조건, **자유장**, **축방향 하중**, **균열 단면**이 결과를 뚜렷하게 변화시키며, 그중 자유장의 영향이 가장 크다

변위는 하중에 비례하지 않는다: **허용 변위에서의 하중**은 다시 풀어서 구한다 (H_y, H_M)

참고문헌

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning, Boston.

Matlock, H. and Reese, L.C. (1960). Generalized solutions for laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 86(SM5), 63–91.

Matlock, H. (1970). Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay. Proceedings of the 2nd Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 1204, 577–594.

Reese, L.C., Cox, W.R. and Koop, F.D. (1974). Analysis of laterally loaded piles in sand. Proceedings of the 6th Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 2080, 473–485.

American Petroleum Institute (2000). Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms — Working Stress Design, API RP 2A-WSD, 21st ed.

Hetényi, M. (1946). Beams on Elastic Foundation. University of Michigan Press, Ann Arbor.

Reese, L.C., Isenhower, W.M. and Wang, S.-T. (2006). Analysis and Design of Shallow and Deep Foundations. John Wiley & Sons, Hoboken.

Broms, B.B. (1965). Design of laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 91(SM3), 79–99.

Reese, L.C. and Welch, R.C. (1975). Lateral loading of deep foundations in stiff clay. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 101(GT7), 633–649.

Davisson, M.T. and Gill, H.L. (1963). Laterally loaded piles in a layered soil system. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 89(SM3), 63–94.

참고

이 발표 자료의 그림은 GeoTerva 이론 페이지에서 가져온 것이며, 수치 예제는 모두 모듈 자체의 계산 엔진으로 산출하였고 모듈이 동일한 값을 제공한다.

온라인 지반공학 계산

이론에서 실무로

이 강의자료의 예제 말뚝을 GeoTerva에서 단계별로 계산해 보시오: 수치는 동일하다.

모듈 열기 →

이론 페이지 →

스마트폰으로 열기

체험 모듈은 가입 없이 이용할 수 있습니다.

강의에서 사용하려면: info@geoterva.com