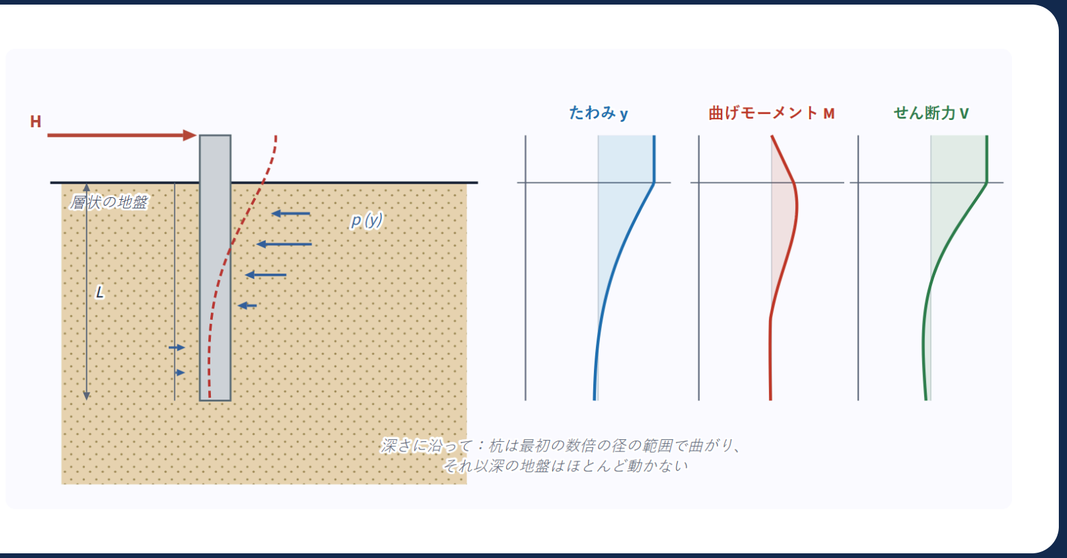
地盤工学の講義スライド・杭

水平載荷杭：p–y法

講義：水平荷重を受ける杭をばね上の梁として解く方法、砂および粘土のp–y曲線、繰返し載荷、軸力と杭頭条件；各項目に計算例を付す。

ばね上の梁
砂と粘土のp–y曲線
繰返し載荷
初期条件
計算例



この講義で学ぶこと

- 水平載荷杭を**ばね上の梁**としてモデル化する方法：方程式、符号、端部条件
- **弾性解**（Matlock–Reese：砂、n_h；Hetényi：粘土、k）を手計算すること
- **砂**に対してAPI（Reese–Cox–Koop）のp–y曲線を、**粘土**に対してMatlockのp–y曲線を、静的および繰返しについて1点ずつ作成すること
- 数値解法（有限要素法、Newton）が**何を行っているか**、および結果をどう読むかを知ること
- **軸方向荷重**（P–δ）、**先端条件**および**自由長**の影響を解釈する
- 許容変位またはモーメント容量に対応する**荷重**を求めること

講義の流れ

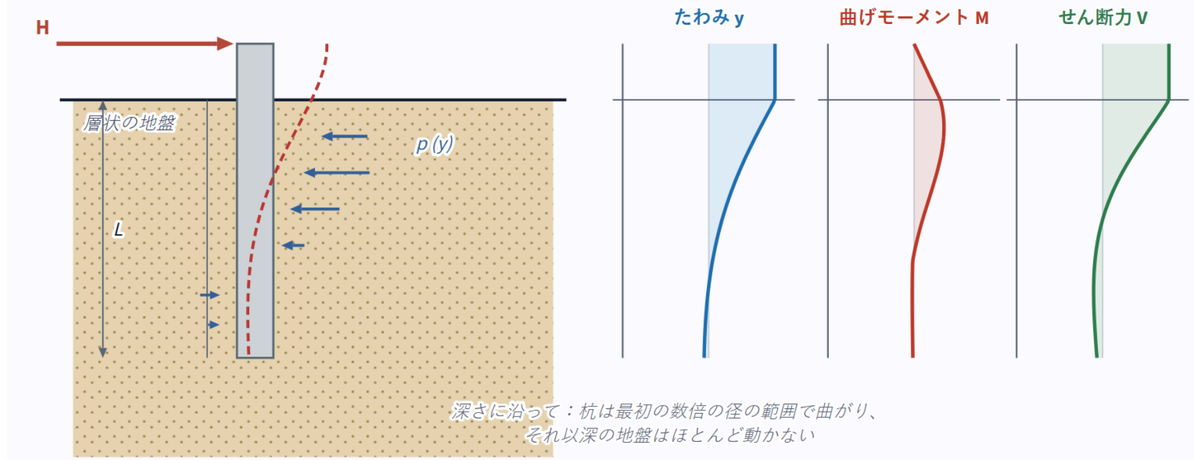
各項目は**3つの手順**で扱う：

1. **理論**：規則は何か、なぜそうなるのか
2. **問題**：与条件と求めるもの
3. **解答**：数値を用いて手順ごとに

例題の杭：直径0.60 m、長さ14 mのコンクリート杭；砂–粘土–砂の地盤中で、地表面に120 kNの水平荷重。モジュールもこのモデルで開く。

荷重は水平変位を介してのみ地盤に伝達される

理論



水平載荷された杭は、自立した基礎のようには破壊しない：荷重は**杭の水平移動によってのみ**地盤に伝達される；地盤反力は移動に応じて増大し、地盤が降伏すると増大をやめる。杭は地盤の最初の**数直径**の範囲で梁のように曲げられる；より深部では地盤はほとんど動かない。

極限荷重（Broms）：短い杭では地盤が、長い杭では断面が破壊する荷重。支持力を与えるが、使用荷重時の変位とモーメントは与えない。

弾性ばね定数（Matlock–Reese、Davisson–Gill、Hetényi）：地盤を弾性ばねとみなす；閉形式解。

p–y法（Matlock, Reeseら）：ばねは**非線形**であり、pはyに対して剛性的に始まり、軟化して地盤の極限抵抗で終わる。数値的に解く；成層地盤、常用荷重から破壊に近い荷重まで。

方程式、符号および境界条件

理論

杭は梁であり、杭に沿った地盤はばねの列である；各ばねはそれぞれの深さで他と独立に働く（Winkler）。zは地表面から下向き、yは荷重方向の変位である：

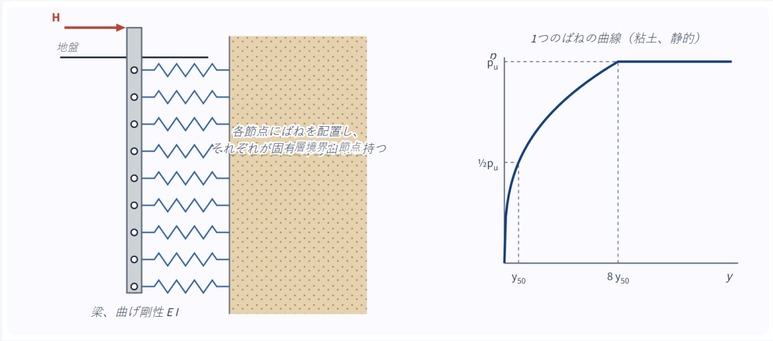
$$EI\,\frac{d^4y}{dz^4} + P\,\frac{d^2y}{dz^2} + p(y,z) = 0$$

$$\theta = \frac{dy}{dz} \qquad M = EI\frac{d^2y}{dz^2} \qquad V = EI\frac{d^3y}{dz^3} + P\theta \qquad \frac{dV}{dz} = -p$$

pは変位に抵抗するとき正である。ばね剛性kに対してp = k yであり、**k = k_h D**（kN/m²、単位長さおよび単位変位あたりの力）である。

自由端：M = 0、V = 0。**杭頭**：自由ならHとM_gを与える；回転固定なら傾きはゼロであり、拘束モーメントは解の一部となる。

この式に必要なのは地盤の構成則p(y, z)のみである：弾性時は一定のk·y、非線形時はp–y曲線である。



砂：$k = n_h z$

理論

砂では地盤反力係数を深さに正比例してとる：**$k = n_h z$**。杭は単一の**特性長**をもち、地表面における荷重QとモーメントM_gに対する変位とモーメントは：

$$T = \left(\frac{EI}{n_h} \right)^{1/5}$$

$$y = A_y \frac{QT^3}{EI} + B_y \frac{M_g T^2}{EI} \qquad M = A_m QT + B_m M_g$$

AおよびBの係数はZ = z/Tに依存する（側方）。杭は**長い**とみなされる：L/Tが大きく、先端は移動しない。

モジュールはこれらの係数を独自の計算エンジンで再現する：A_y = 2.4292。

係数（長い杭）

Z	A_y	A_θ	A_m	B_y	B_θ	B_m
0	2,429	−1,619	0.000	1,619	−1,747	1,000
0.5	1,640	−1,500	0.458	0.871	−1,250	0.974
1	0.961	−1,194	0.725	0.364	−0.789	0.851
1.4	0.543	−0.891	0.770	0.112	−0.480	0.686
2	0.142	−0.462	0.627	−0.070	−0.153	0.404
3	−0.075	−0.039	0.224	−0.089	0.057	0.059

A_mはZ ≈ 1.4で最大（0.77）。

問題

例題

与条件

杭	**HP 250 × 85, L = 25 m, E I = 25 461 kN·m²**
地盤	**砂、n_h = 12 000 kN/m³**
荷重	**地表面にQ；M_g = 0、自由端**
係数	$A_y = 2.4292$（先頭）、$A_m = 0.772$（最大）

求めるもの

杭頭変位が**8 mm**となるような荷重Qと**最大モーメント**を求めよ。杭は長いか。

解答

解答

1 特性長さと杭長

$$T = \left(\frac{25\,461}{12\,000}\right)^{1/5} = \mathbf{1.1624}\ \text{m} \qquad \frac{L}{T} = \frac{25}{1.1624} = 21.5 \ \Rightarrow\ \text{長い杭}$$

2 荷重：$y = A_y\, Q\, T^3 / E\, I \Rightarrow Q = y\, E\, I / (A_y\, T^3)$

$$Q = \frac{0.008(25\,461)}{2.4292\,(1.1624)^3} = \mathbf{53.4}\ \text{kN}$$

3 最大モーメント：$M = A_m\, T\, Q$

$$M_{max} = 0.772\,(1.1624)(53.4) = \mathbf{47.9}\ \text{kN·m}$$

この荷重に対し、モジュールは壁頭変位**8.00 mm**、最大モーメント**47.9 kN·m**を与える：手計算と同一である。

GeoTervaで解答を確認する ↗

粘土：k一定（Hetényi）

理論

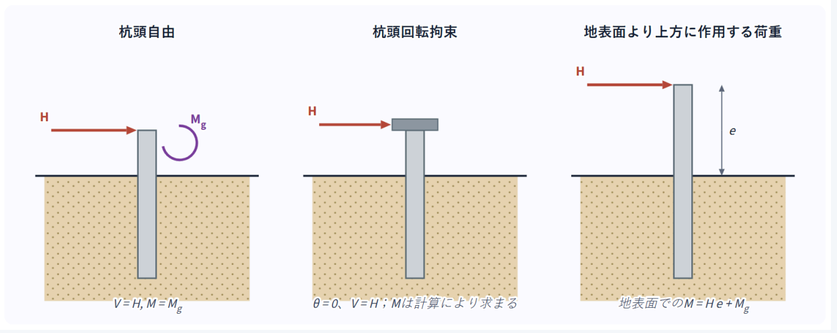
粘土では地盤反力係数を深さに対して**一定**と仮定する。kは杭の単位長さあたりの地盤剛性であり、$\beta = (k / 4EI)^{1/4}$。長い杭に対して、地表面の荷重Hのもとでの Hetényi の閉形式解は：

自由端：　$y_0 = \dfrac{2H\beta}{k}$　　$M_{max} = 0.3224\,\dfrac{H}{\beta}$　$\left(z = \frac{\pi}{4\beta}\right)$

固定端：　$y_0 = \dfrac{H}{4EI\beta^3}$　　$M_{head} = -\dfrac{H}{2\beta}$

回転に対して頭部を固定した杭は、自由頭の杭の**半分**だけ変位する。しかし頭部の拘束モーメントは自由頭杭の最大モーメントより**大きい**。

実際の基礎スラブの挙動はこの両極端の間にあり；どちらに近いかはスラブと上部構造の剛性による。



問題

例題

与条件

杭	**D = 0.60 m, E I = 190,852 kN·m²（例題の杭）**
地盤	**粘土、k_h = 15 000 kN/m³ ⇒ k = k_h D = 9,000 kN/m²**
荷重	**H = 120 kN、地表面載荷**
杭	**長い**

求めるもの

自由および**固定**の杭頭条件について、Hetényiの閉形式解により杭頭変位とモーメントを求める。

解答 (1/2)

解答

1 β

$$\beta = \left(\frac{k}{4EI}\right)^{1/4} = \left(\frac{9{,}000}{4(190{,}852)}\right)^{1/4} = \mathbf{0.3295}\ \mathrm{m}^{-1}$$

2 自由頭

$$y_0 = \frac{2H\beta}{k} = \frac{2(120)(0.3295)}{9{,}000} = \mathbf{8.79}\ \mathrm{mm}$$

$$M_{max} = 0.3224\frac{H}{\beta} = 0.3224\frac{120}{0.3295} = \mathbf{117.4}\ \mathrm{kN{\cdot}m}\quad (z = \tfrac{\pi}{4\beta} = 2.38\ \mathrm{m})$$

解答 (2/2)

解答

3 固定端

$$y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} = \frac{120}{4(190{,}852)(0.3295)^3} = \mathbf{4.39}\ \text{mm}$$

$$M_{head} = -\frac{H}{2\beta} = -\frac{120}{2(0.3295)} = -\mathbf{182.1}\ \text{kN·m}$$

固定頭の変位は**半分**（8.79 → 4.39 mm）に減少するが、頭部モーメント（182.1 kN·m）は自由杭の最大モーメント（117.4 kN·m）の**1.55倍**となる。モジュールの弾性オプションでも同じ数値が得られる：自由 8.79 mm および 117.4 kN·m、固定 4.39 mm および 182.1 kN·m。

GeoTervaで解答を確認する ↗

API RP 2A：Reese、CoxおよびKoop

理論

地表面付近の地盤は杭の前方へ**くさび**状に押し出される。より深部では地盤は杭の**周囲を水平に流れる**。深さzにおける極限抵抗（σ'：その深さの有効応力）は両者の小さい方である：

$$p_{us} = (C_1 z + C_2 D)\,\sigma' \qquad p_{ud} = C_3 D\,\sigma'$$

$$p = A\,p_u \tanh\!\left(\frac{k\,z\,y}{A\,p_u}\right) \qquad A = \max\!\left(0.9;\ 3 - 0.8\tfrac{z}{D}\right)\ \text{（静的）},\ A = 0.9\ \text{（繰返し）}$$

C_1、C_2、C_3はϕ'のみに依存する。kは初期弾性係数であり、ϕ'と水に応じて取る（側方）。

小さいyでは曲線は**k z y**の直線である（弾性解のn_h = kの場合）。大きいyでは**A p_u**で終わる。Aは地表面で3.0、深さ2.6Dで0.9である：地表面付近では静的抵抗がより高く、繰返し載荷では存在しない。

ϕ'とともに変化する係数

ϕ'	C_1	C_2	C_3	k（水上）	k（水中）
28°	1.60	2.41	22.5	5.4	5.4
30°	1.91	2.67	28.7	10.5	7.9
32°	2.28	2.95	36.8	20.7	11.9
34°	2.72	3.25	47.3	32.7	17.6
36°	3.24	3.59	61.2	46.3	24.8
38°	3.87	3.97	79.6	61.7	33.6
40°	4.62	4.38	104.1	78.9	44.0

k：MN/m³。32°に対してC_1 = 2.28；C_2 = 2.95；C_3 = 36.8。

問題

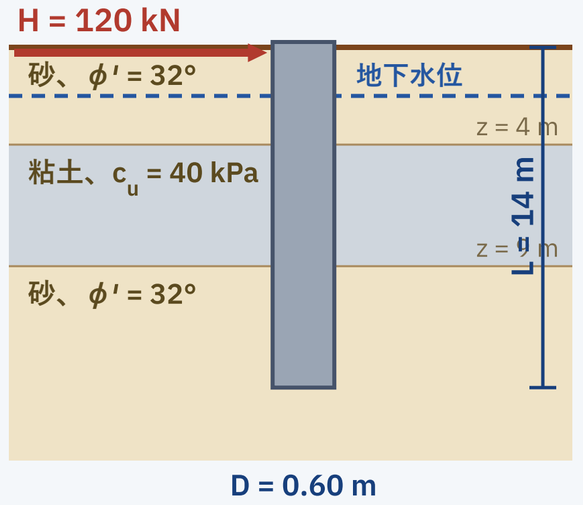
例題

与条件

杭	場所打ち杭、円形断面、D = 0.60 m, L = 14 m、コンクリート：E I = 190 852 kN·m²
地盤	砂0–4 m（$\phi' = 32°$）・粘土4–9 m（c_u = 40 kPa）・砂9–17 m（$\phi' = 32°$）
単位体積重量、水	γ = 18、γ_{sat} = 19 kN/m³；地下水位2.0 m
深さ	z = 2.0 m（砂1、地下水位）；k = 20.7 MN/m³（水面より上）
係数	$K_0 = 0.4,\ K_a = \tan^2(45° - \varphi'/2)$

求めるもの

σ'、C_1、C_2、C_3、$\mathbf{p_u}$、Aおよびy = 5 mmと10 mmについて**p**の値を求めよ。



解答 (1/2)

解答

1 有効応力と角度（地下水位 = 2 m：地表面からz = 2まで湿潤）

$$\sigma' = 18(2) = \mathbf{36.0}\ \text{kPa} \qquad \alpha = \frac{\varphi'}{2} = 16^\circ,\ \beta = 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} = 61^\circ,\ K_a = \tan^2 29^\circ = 0.3073$$

2 係数（$\phi' = 32^\circ$）

$$C_1 = \frac{K_0 \tan\varphi' \sin\beta}{\tan(\beta-\varphi')\cos\alpha} + \frac{\tan^2\beta \tan\alpha}{\tan(\beta-\varphi')} + K_0 \tan\beta(\tan\varphi' \sin\beta - \tan\alpha) = \mathbf{2.281}$$

$$C_2 = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\varphi')} - K_a = \mathbf{2.947}$$

$$C_3 = K_a(\tan^8\beta - 1) + K_0 \tan\varphi' \tan^4\beta = \mathbf{36.81}$$

解答 (2/2)

解答

3 終局抵抗：くさびと周面を回り込む流れの小さい方

$$p_{us} = (2.281(2) + 2.947(0.6))(36.0) = 227.9 \text{ kN/m}$$

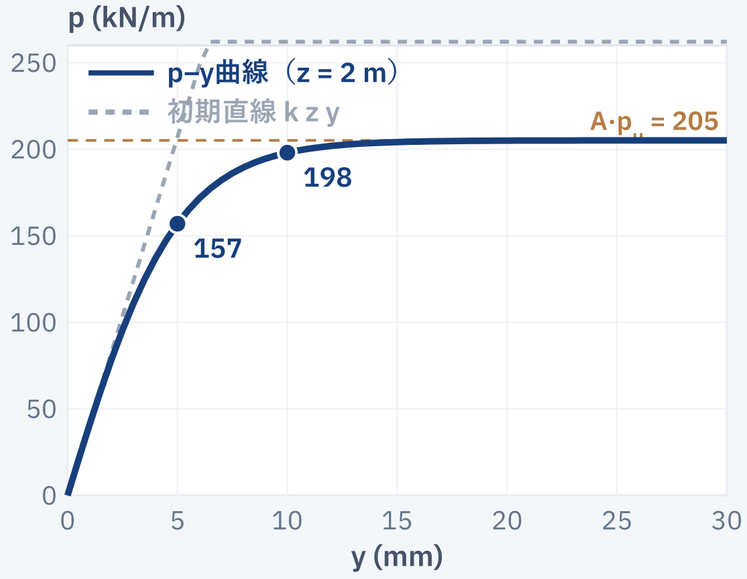
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(36.0) = 795 \text{ kN/m} \Rightarrow p_u = \mathbf{227.9} \text{ kN/m}$$

4 Aと曲線：A = max(0.9; 3 − 0.8 z/D) = max(0.9; 0.33) = 0.9、k z y / (A p_u)

$$y = 5 \text{ mm}: \ p = 0.9(227.9)\tanh\frac{20\,700(2)(0.005)}{0.9(227.9)}$$

$$= \mathbf{157.0} \text{ kN/m}$$

$$y = 10 \text{ mm}: \ p = \mathbf{198.0} \text{ kN/m}$$



曲線Aはp_u = 205 kN/mに近づく；10 mmではその97%以内にある。この深さでは静的曲線と繰返し曲線は**同一**である（いずれもA = 0.9）。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

例題

与条件

杭	場所打ち杭、円形断面、D = 0.60 m, L = 14 m、コンクリート：E I = 190 852 kN·m²
地盤	砂0–4 m（$\phi' = 32°$）・粘土4–9 m（$c_u = 40$ kPa）・砂9–17 m（$\phi' = 32°$）
単位体積重量、水	$\gamma = 18$、$\gamma_{sat} = 19$ kN/m³；地下水位2.0 m
深さ	z = 0.6 m (1D), $\sigma' = 18(0.6) = 10.8$ kPa; k = 20.7 MN/m³
砂1	$C_1 = 2.281$, $C_2 = 2.947$, $C_3 = 36.81$（例題3）

求めるもの

y = 10 mmに対する静的および繰返し**p–y**値を求めよ。

解答

解答

1 極限抵抗とA

$$p_{us} = (2.281(0.6) + 2.947(0.6))(10.8) = 33.9 \text{ kN/m}$$

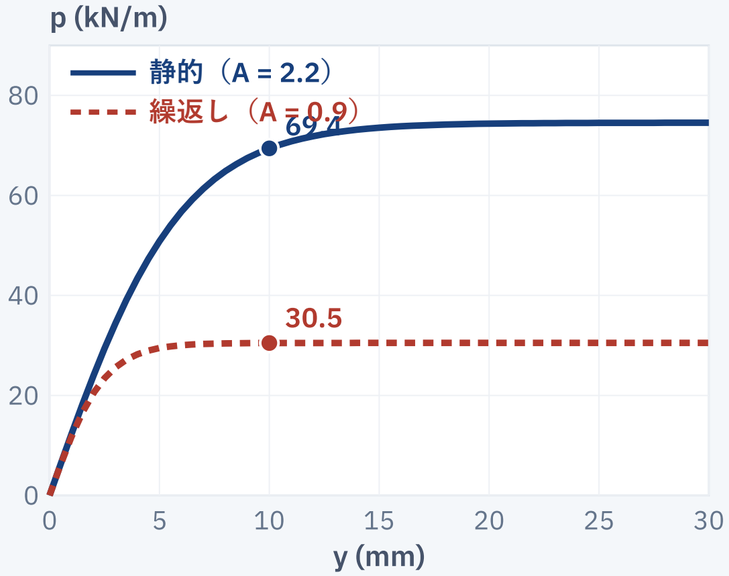
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(10.8) = 238.6 \text{ kN/m} \Rightarrow p_u = \mathbf{33.9} \text{ kN/m}$$

$$A_{static} = \max(0.9;\ 3 - 0.8(1)) = 2.2 \qquad A_{cyclic} = 0.9$$

2 y = 10 mm: k z y = 20 700(0.6)(0.010) = 124.2

$$p_{static} = 2.2(33.9)\tanh\frac{124.2}{2.2(33.9)} = \mathbf{69.4} \text{ kN/m}$$

$$p_{cyclic} = 0.9(33.9)\tanh\frac{124.2}{0.9(33.9)} = \mathbf{30.5} \text{ kN/m}$$



地表付近の砂では繰返し載荷により抵抗が**56%**低下する（69.4 → 30.5 kN/m）：Aの係数を失う。そのため繰返し載荷では杭頭変位が大きくなる。

GeoTervaで解答を確認する ↗

Matlock：軟弱粘土、静的および繰返し

理論

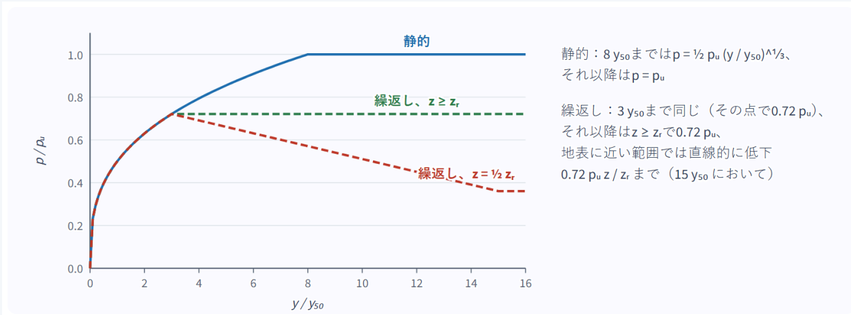
粘土では、モジュールはAPI RP 2Aが与える形式で**Matlock**（1970）の軟弱粘土曲線を採用する。極限抵抗はやはり、地表近く（くさび）の値と深部（流動）の値の小さい方である：

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{\sigma'}{c_u} + J\frac{z}{D}\right)c_u D;\ 9c_u D\right]$$

$$p = \tfrac{1}{2}p_u\left(\frac{y}{y_{50}}\right)^{1/3}\ (y \le 8y_{50}) \quad p = p_u\ (y > 8y_{50}) \quad y_{50} = 2.5\,\varepsilon_{50} D$$

ε_{50}およびJはc_uに応じて：48 kPa未満は軟質（0.020；0.5）、48–96は中硬（0.010；0.25）、96超は硬質（0.005；0.25）。

繰返し載荷：$3y_{50}$以降、曲線は0.72 p_uで一定となる（$z \ge z_R$）。より浅い位置では$15y_{50}$において0.72 p_u z/z_Rまで**線形に低下する**。z_R = max[6D / ((σ′/z)(D/c_u) + J); 2.5D]。



問題

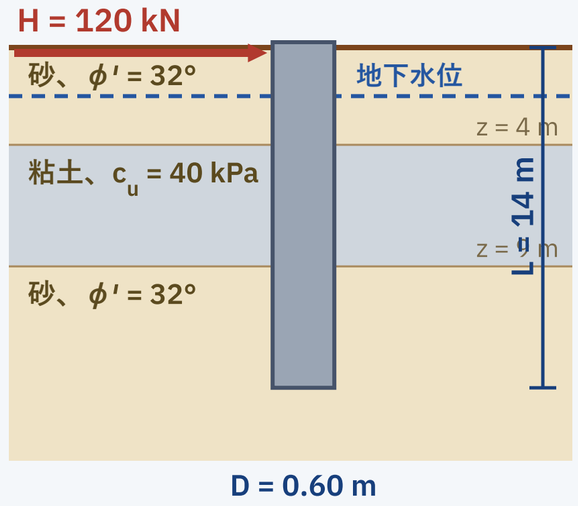
例題

与条件

杭	場所打ち杭、円形断面、D = 0.60 m, L = 14 m、コンクリート：E I = 190 852 kN·m²
地盤	砂0–4 m（$\phi' = 32°$）・粘土4–9 m（c_u = 40 kPa）・砂9–17 m（$\phi' = 32°$）
単位体積重量、水	γ = 18、γ_{sat} = 19 kN/m³；地下水位2.0 m
深さ	z = 6.5 m（粘土、4–9 m）；ε_{50} = 0.020, J = 0.5
層	c_u = 40 kPa

求めるもの

y = 15 mm および 150 mm について σ′、p_u、y_{50} および**静的**p–y の値を求める。**繰返し**曲線の z_R とプラトー値を求めよ。



解答 (1/2)

解答

1 σ'：砂0–2 mは湿潤（γ = 18）、砂2–4 mおよび粘土4–6.5 mは水中（γ_{sat} = 19）

$$\sigma' = 18(2) + (19 - 9.81)(2) + (19 - 9.81)(2.5) = \mathbf{77.4}\ \text{kPa}$$

2 極限抵抗とy_{50}

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{77.4}{40} + 0.5\frac{6.5}{0.6}\right)(40)(0.6);\ 9(40)(0.6)\right]$$

$$= \min[248.4;\ 216.0] = \mathbf{216.0}\ \text{kN/m}$$

$$y_{50} = 2.5(0.020)(0.6) = \mathbf{30.0}\ \text{mm}$$

解答 (2/2)

解答

3 静的曲線：$p = \frac{1}{2} p_u (y/y_{50})^{1/3}$

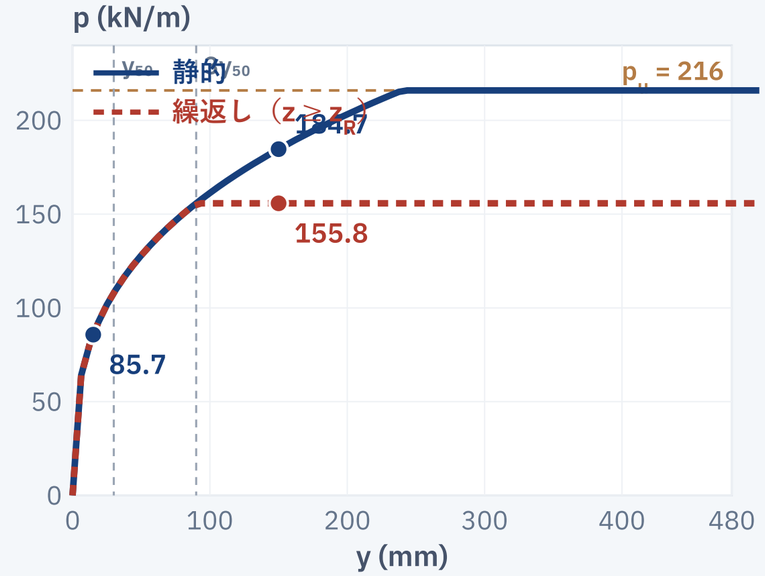
$$y = 15 \text{ mm } (0.5y_{50}): \ p = 0.5(216.0)(0.5)^{1/3} = \mathbf{85.7} \text{ kN/m}$$

$$y = 150 \text{ mm } (5y_{50}): \ p = 0.5(216.0)(5)^{1/3} = \mathbf{184.7} \text{ kN/m}$$

4 繰返し曲線：$z_R = \max[6(0.6)/((\sigma'/z)(D/c_u) + J); 2.5D] = \max[5.31; 1.5] = 5.31$ m；$z = 6.5 > z_R$

$$p_{perimeter}(y \geq 3y_{50}) = 0.72\, p_u = 0.7211(216.0) = \mathbf{155.8} \text{ kN/m}$$

y = 150 mmで静的抵抗184.7、繰返し抵抗155.8 kN/m：繰返し載荷によりこの粘土の抵抗は**16%**低下する。3y_{50}（90 mm）までは2本の曲線は一致する。



GeoTervaで解答を確認する ↗

各曲線はそれぞれの深さの地盤に対応する

理論

σ'は上位層の単位体積重量の総和である（水上ではγ、水下では$\gamma_{sat} - \gamma_w$）。層の**平均値ではない**。層内では深さとともに増大する。

層zはϕ'とk（砂）、またはc_u、ε_{50}、J（粘土）を与える。砂の初期剛性kは、その層が位置する水面を基準に取る。水が交差する層では層の中央深さに応じて補完され、手動で変更できる。

要素は**いかなる層境界も越えない**：各境界に節点が存在する；地盤の剛性は要素内部ではなく要素間で急変する。

計算シートは各層について、層の中央での曲線の数値（σ'、係数、p_u、Aまたはy_{50}）を手順ごとに示す。手計算で再現可能である（本講義の例題3および5のように）。

層は杭先端まで及ぶ必要がある。先端より下の地盤は定義されておらず、先端は自由である。硬い砂の上の軟弱粘土は、図中で境界における**折れ**として現れる。

有限要素法とNewton

理論

方程式は有限要素法により解く：杭を**3次はり要素**に分割し、各節点でyとたわみ角 θ を与える。地盤反力は各要素の**4つのガウス点**で曲線から求め、積分する。非線形方程式 K u + f(u) = F はNewton法により解く：

$$(K + K_s(u_i))\,\Delta u = F - K u_i - f(u_i) \qquad K_s = \int N^T \frac{dp}{dy} N \, dz$$

dp/dyは、割線剛性の**20分の1**を下回らない：曲線が平坦または下降する箇所でも行列は正定値のままである。ステップを縮小する直線探索があり、それが失敗した場合には減衰付き割線ステップを用いる。

要素長はD/6（3–15 cm）；結果は示した段階までメッシュに**依存しない**（要素0.4 → 0.025 m：頭部変位6.228 → 6.228 mm）。

荷重が地盤の支持できる範囲を超えると**釣合いが成り立たない**。モジュールはその旨を示し、数値は与えない。地盤が地表面下で**5杭幅以上**変位した場合も解として扱わない。

繰返し粘土曲線や軸方向載荷に対する応答は単一の上昇曲線ではなく、**極限荷重**まで上昇する。モジュールは荷重をゼロから段階的に載荷する。

各検討では2つの照査式を立てる：Σ p Δz = H、および先端のモーメント = 0（静力学）。

P–δ効果と座屈

理論

軸方向荷重Pは杭の**たわみ形状**に沿って作用する：式中（P d²y/dz²の項）および各要素の幾何剛性に含まれ、圧縮下の梁の水平剛性を低下させ、変位とモーメントを増大させる。本モジュールではPを全長にわたり一定とし、杭頭と杭先端で同じとみなす（実際には周面摩擦が荷重を地盤に伝達するが、一定と仮定することは安全側である）。

$$P_{cr} = \sqrt{k\,EI} \qquad \text{(自由端, } k \text{ 一定、長い杭)}$$

無限長はりの2√(kEI)の値の**半分**である：自由端は回転できる。固定頭部はより高い荷重で座屈する。

Pが座屈荷重に近づくにつれて荷重–変位は限りなく上昇する。モジュールは「**軸荷重が座屈荷重を超えている**」と表示する。

杭断面の軸力とモーメントの複合抵抗は構造設計の照査である。

杭の例題

E I = 190,852 kN·m²、弾性粘土でk = 9,000 kN/m²の場合：

$$P_{cr} = \sqrt{9{,}000\,(190{,}852)} = 41{,}445 \text{ kN}$$

問題

例題

与条件

杭	場所打ち杭、円形断面、D = 0.60 m, L = 14 m、コンクリート：E I = 190 852 kN·m²
地盤	砂0–4 m（$\phi' = 32°$）・粘土4–9 m（$c_u = 40$ kPa）・砂9–17 m（$\phi' = 32°$）
単位体積重量、水	$\gamma = 18$、$\gamma_{sat} = 19$ kN/m³；地下水位2.0 m
荷重	H = 120 kN；軸方向荷重 P = 800 kN（一定）
座屈	$k = k_h D = 9{,}000$ kN/m²（弾性粘土）、自由端
モジュール	P = 0：先端6.23 mm、M_{max} 151.8 kN·m

求めるもの

P = 800 kNは座屈荷重に**近い**か。

P–δ効果はどの程度か。

解答

解答

1 座屈荷重（自由端、k 一定）

$$P_{cr} = \sqrt{kEI} = \sqrt{9{,}000(190{,}852)} = \mathbf{41{,}445}\ \text{kN} \qquad \frac{P}{P_{cr}} = \frac{800}{41{,}445} = \mathbf{0.019}$$

2 モジュールでP = 800 kNとして（P–δを含む）

$$y_{head}:\ 6.23 \rightarrow 6.32\ \text{mm}\ \ (+2\%) \qquad M_{max}:\ 151.8 \rightarrow 154.5\ \text{kN·m}\ \ (+2\%)$$

800 kNは座屈荷重のわずか**2%**：軸力は杭を座屈に近づけない；P–δ効果は変位を2%、モーメントを2%増大させる。この杭では軸力は横方向解析において二次的であるが、無視はできない。

GeoTervaで解答を確認する ↗

自由、固定、および地盤上の上載荷重

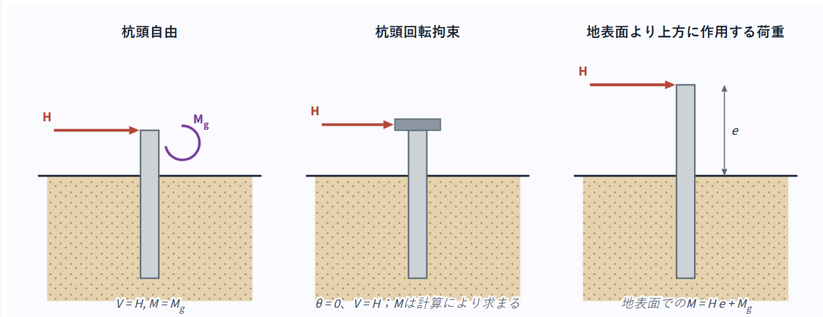
理論

自由端：載荷点においてV = H、M = M_g。

固定頭：傾きはゼロで、頭部は横方向に移動する。長く一様な弾性地盤では、自由頭の場合の**半分**だけ変位する。拘束モーメントM = −H/(2β)は、自由頭杭の最大モーメントより大きい。実際のフーチングは両ケースの中間にある。

自由長 e：地盤より上の杭は片持ち梁のようにたわむ。せん断力は地盤面まで H であり、モーメントは地盤面で **M(0) = M_g + H e** に達する。そこから地盤が抵抗を発揮する。

頂部変位 = 地表面での変位 + 地表面での回転 × e + 自由長の片持ち梁変位（H e^3 / 3EI）。同じ荷重でも、自由長があると頂部変位は地表面のそれより**はるかに大きくなる**；最大モーメントは多くの場合、地盤内またはそのやや下方にある。



問題

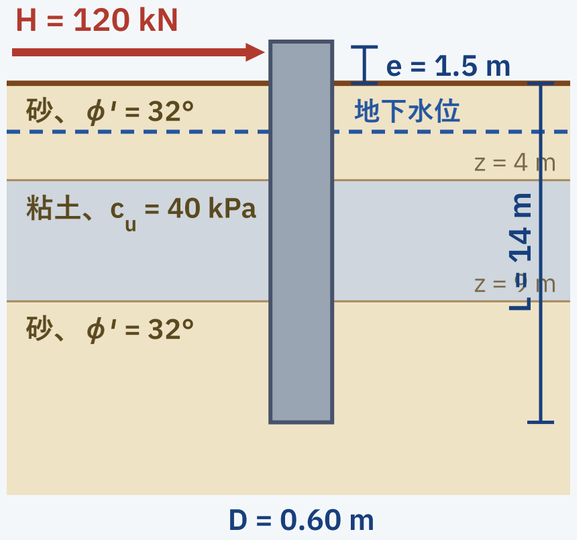
例題

与条件

杭	場所打ち杭、円形断面、D = 0.60 m, L = 14 m、コンクリート：E I = 190 852 kN·m²
地盤	砂0–4 m（$\phi' = 32°$）・粘土4–9 m（$c_u = 40$ kPa）・砂9–17 m（$\phi' = 32°$）
単位体積重量、水	$\gamma = 18$、$\gamma_{sat} = 19$ kN/m³；地下水位2.0 m
自由長	載荷点は地表面からe = 1.5 m上方；H = 120 kN、自由端
モジュール（地表面において）	$y_{地盤} = 11.12$ mm、傾斜 = 0.321°（荷重方向へ）

求めるもの

地盤表面における**モーメント**と**頭部変位**を求めよ；結果をモジュールの20.23 mmと比較せよ。



解答

解答

1 地表面におけるモーメント（自由長区間のせん断力H、$M_g = 0$）

$$M(0) = M_g + H\,e = 0 + 120(1.5) = \mathbf{180}\ \text{kN·m}$$

2 自由長部の片持ち梁変位

$$\frac{H\,e^3}{3EI} = \frac{120(1.5)^3}{3(190{,}852)} = 0.71\ \text{mm}$$

3 杭頭変位 = y_{soil} + $|\theta|\,e + H\,e^3/3EI$

$$y_{head} = 11.12 + 5.605(1.5) + 0.71 = \mathbf{20.23}\ \text{mm}$$

手計算で**20.23 mm**、モジュールでも20.23 mm：一致する。荷重が地表面にあるとき杭頭は6.23 mm変位していた；1.5 mの自由長はそれを**3.2倍**にする。最大モーメントは306 kN·mで、地表面から1.68 m下（地表面での180 kN·mより大きい）。

GeoTervaで解答を確認する ↗

どの数値が何を表すか

理論

杭頭変位yおよび回転（勾配dy/dz、荷重方向に傾く杭では負）。自由長がある場合には地表面での値も与えられる。

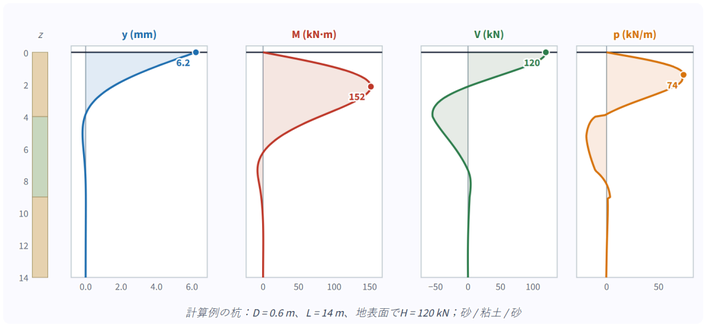
最大曲げモーメントとその深さ。固定頭部では頭部モーメントも表示される。常にそれが最大とは限らない。

変位ゼロの深さ：杭が自身の軸と交わる位置。その上では地盤は杭に向かって、その下では杭から離れる方向に動く。

せん断力と地盤反力；反力とp–y曲線の端点を並べて描く：地盤が限界にどれだけ近いかがわかる。

先端：十分に長い杭の先端では変位が生じない。先端の移動量が地表面変位の10分の1かつ2 mmを超える場合、その荷重に対して杭は**短い**：剛体として回転し、杭長が結果を左右する。

p–y表示では、可動部の5つの深さにおける曲線と、それぞれで**到達した点**を描く：曲線の平坦な始点にある点は弾性、終点付近の点は限界状態である。



計算例の杭：D = 0.6 m、L = 14 m、地表面でH = 120 kN；砂 / 粘土 / 砂

問題

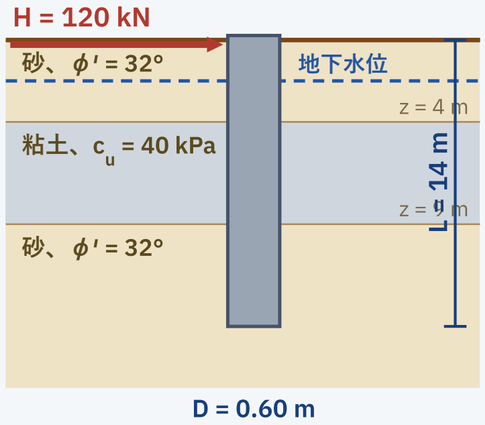
例題

与条件

杭	場所打ち杭、円形断面、D = 0.60 m, L = 14 m、コンクリート：E I = 190 852 kN·m²
地盤	砂0–4 m（$\phi' = 32°$）・粘土4–9 m（$c_u = 40$ kPa）・砂9–17 m（$\phi' = 32°$）
単位体積重量、水	$\gamma = 18$、$\gamma_{sat} = 19$ kN/m³；地下水位2.0 m
モジュールの結果	杭頭 y = 6.23 mm、傾斜 0.150°; $M_{max} = 151.8$ kN·m (z = 2.13 m); 変位ゼロ z = 3.85 m; 先端 0.0019 mm
最大地盤反力	p = 74.0 kN/m, z = 1.40 m; A = max(0.9; 3 − 0.8(1.4)/0.6), $p_u = 125.0$ kN/m

求めるもの

この荷重に対して杭は**長い**か。深さ1.40 mにおいて地盤は限界値の**何パーセント**で働いているか。静的照査を解釈せよ。



解答 (1/2)

解答

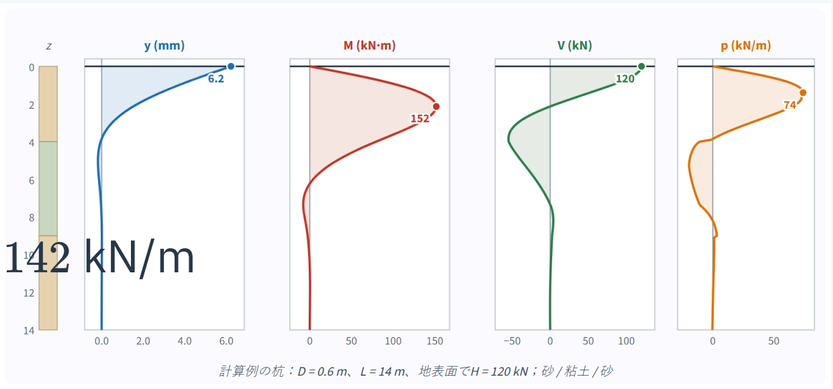
1 先端条件：杭頭変位を地表面変位の10分の1と2 mmで比較する

$$y_{tip} = 0.0019 \text{ mm} \ll 0.1(6.23) = 0.62 \text{ mm} \;\Rightarrow\; \text{長い杭}$$

2 深さ1.40 mで地盤はその限界のどの程度にあるか。

$$A = \max\left(0.9;\; 3 - \frac{0.8(1.4)}{0.6}\right) = 1.133\,; \quad A\,p_u = 1.133(125.0) = 142 \text{ kN/m}$$

$$\frac{p}{Ap_u} = \frac{74.0}{142} = \mathbf{0.52}$$



計算例の杭：D = 0.6 m、L = 14 m、地表面でH = 120 kN；砂 / 粘土 / 砂

解答 (2/2)

解答

3 静的照査

$\sum p\,\Delta z = 120.000\ \text{kN} = H$　　M_{tip} (静力学から) $= 0.000\ \text{kN·m}$　　7 反復計算

杭は**長い**。1.40 mで地盤は限界の**52%**で働いている（曲線の終端ではない）。両方の照査も満たす：これらは反復計算と収支の照査であり、**モデルの精度の照査ではない**。

GeoTervaで解答を確認する ↗

許容値に対応する荷重

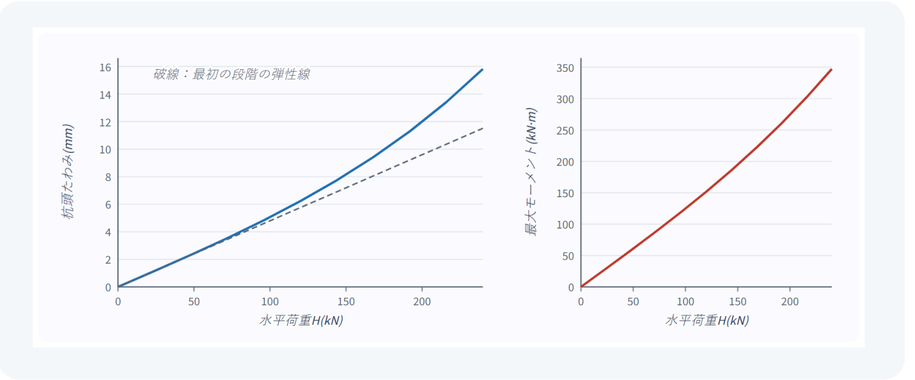
理論

地盤は非線形であるため、変位は荷重に比例しない。**許容変位における荷重**は、使用荷重での結果から読み取ることはできない。モジュールは荷重とモーメントを最初から比例的に増加させ（HとMgに対する係数λ、軸力は一定）、各段階で方程式を再び解き、杭頭変位が許容値（または最大モーメントが断面耐力）に達するλを求める：**H_y**または**H_M**。

地盤が許容値を支持できない場合（許容値に達する前に釣合いが得られない場合）、モジュールは「**未到達**」と表示し、曲線は最後に解いた荷重で終わる。繰返し載荷の粘土や軸方向載荷では曲線が折れ曲がる：これが**地盤の極限荷重である**。

これは杭の支持力ではない：モジュール内で杭は弾性である；曲げで降伏する杭は地盤より先に破壊しうる。入力するモーメント耐力をこれの照査とする。

モジュールは安全率を与えず、基準からも採用しない。許容変位およびモーメント容量は技術者の責任である。



問題

例題

与条件

杭	場所打ち杭、円形断面、D = 0.60 m, L = 14 m、コンクリート：E I = 190 852 kN·m²
地盤	砂0–4 m（$\phi' = 32°$）・粘土4–9 m（$c_u = 40$ kPa）・砂9–17 m（$\phi' = 32°$）
単位体積重量、水	$\gamma = 18$、$\gamma_{sat} = 19$ kN/m³；地下水位2.0 m
非線形解	H = 30, 60, …, 270 kNに対する頭部変位：1.44 · 2.93 · 4.51 · 6.23 · 8.15 · 10.33 · 12.86 · 15.82 · 19.29 mm
許容	$y_{all} = 10$ mm；曲げモーメント容量$M_{cap} = 200$ kN·m

求めるもの

$y_{all} = 10$ mmにおける荷重H_y、M_{cap}に対応するH_M；線形比例を用いた場合、誤差はどの程度になるか。

例題9 · 許容変位における荷重

解答

解答

1 線形比例（供用荷重時の6.23 mmから）と厳密解

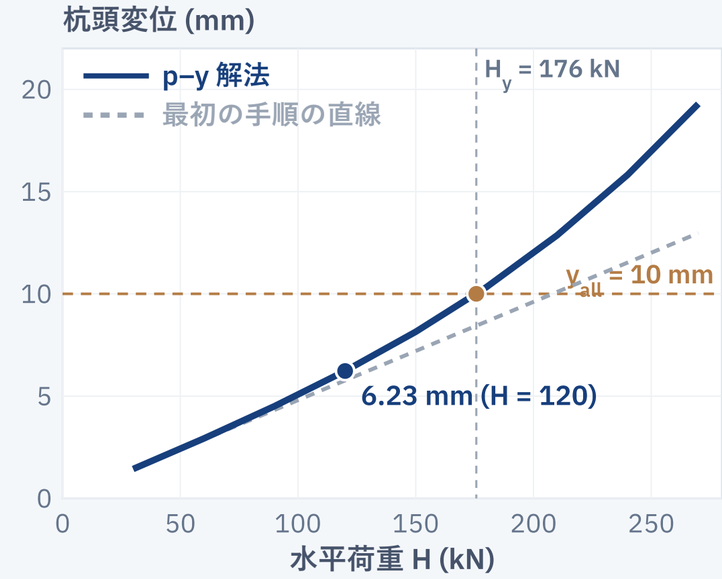
$$H_{y,linear} = 120\,\frac{10}{6.23} = 192.7\ \text{kN}$$

$$H_y = \mathbf{175.7}\ \text{kN}\ (\lambda = 1.464)$$

2 モーメント容量に対応する荷重

$$H_M = \mathbf{153.6}\ \text{kN}\ \ (\lambda = 1.280;\ y_{head} = 8.39\ \text{mm})$$

線形比例とすると荷重は**10%過大**になる（193 ≠ 176 kN）：地盤が軟らかくなるほど変位は荷重より速く増大する。**支配的**なのはモーメントである：H_M = 154 kNで、その荷重では頭部変位はわずか8.4 mmである。許容変位に対応する荷重（H_y = 176 kN）ではモーメントは234 kN·mとなる。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

例題

与条件

杭	場所打ち杭、円形断面、D = 0.60 m, L = 14 m、コンクリート：E I = 190 852 kN·m²
地盤	砂0–4 m（$\phi' = 32°$）・粘土4–9 m（$c_u = 40$ kPa）・砂9–17 m（$\phi' = 32°$）
単位体積重量、水	$\gamma = 18$、$\gamma_{sat} = 19$ kN/m³；地下水位2.0 m
比較対象	先端条件 ・ 自由長 ・ 繰返し荷重 ・ 軸荷重 (800 kN) ・ ひび割れ断面 (E I × 0.6) ・ 弾性地盤 ($n_h = 8$ MN/m³, $k_h = 15$ MN/m³)

求めるもの

いずれの場合も、杭頭変位と最大モーメントを使用荷重に対して比較する。

解答

解答

条件	$y_{先端}$ (mm)	M_{max} (kN·m)	y / y_0	M / M_0
入力どおり：自由、静的、地表面位置	6.23	152	1.00	1.00
頂部が回転に対して固定（M_{top}）	2.24	-175	0.36	1.15
荷重は地盤面の1.5 m上方	20.23	306	3.25	2.01
繰返し載荷（API）	7.28	172	1.17	1.13
軸方向荷重P = 800 kN	6.32	155	1.02	1.02
ひび割れ断面、E I × 0.6	7.93	140	1.27	0.92
弾性体の地盤（n_h, k_h）	10.49	173	1.68	1.14

杭頭条件は変位を0.36倍に低減し、モーメントを増加させる；**自由長**が最も大きく影響する（変位×3.2、モーメント×2.0）。**繰返し載荷**は変位を17%、**ひび割れ断面**は27%増加させるが、モーメントは低減する（杭がより柔軟になる）。弾性地盤は別個の事柄である：p–y曲線の照査ではない。

GeoTervaで解答を確認する ↗

数値の背後にある仮定

理論

単杭：隣接する杭がなく単独で立つ杭を、そのp–y曲線で扱う。水平載荷された群杭は、同じ杭荷重に対して単杭より大きな変位を示す；群杭は、各列のp倍率を用いる群杭モジュールの対象である。

杭：全長にわたり単一断面、線形弾性；EIは一定。ひび割れしたコンクリート断面はEIの低減係数と、断面が降伏するモーメントM_{cap}で表す。

地盤：独立したばねであり、ばね間のせん断はない。曲線は特定の地盤で実施された実験から得られたもので、砂はϕ'、粘土はc_uとε_{50}に基づく。砂および軟〜中硬粘土を表現する。硬質粘土、風化岩、セメンテーションした地盤、液状化する砂はそれぞれ固有の曲線で記述する。

載荷：静的またはAPI低減を伴う繰返し載荷で、最初に与える。**軸方向荷重**は全長にわたり一定とする。

数値解法：有限要素法と非線形反復は、与えられた方程式に対して示した手順まで厳密である。近似は方程式側にあり（地盤はばねで代表される）。2つの独立したプログラム（有限差分法、別言語）により、14本の杭で0.01%以内で一致した。

p–y法は実務において水平載荷杭の設計の基礎である。数値はプロジェクトの許容値および、あれば**載荷試験**と比較しなければならない。

まとめ

ポイントのまとめ

杭は**非線形ばね上のはり**である：$EI\,y'''' + P\,y'' + p(y, z) = 0$；地盤の法則はp–y曲線である

弾性：砂では$n_h z \to T = (EI/n_h)^{1/5}$；粘土では$k \to \beta = (k/4EI)^{1/4}$、$y_0 = 2H\beta/k$、$M_{max} = 0.3224\,H/\beta$

砂：$p = A\,p_u \tanh(kzy/Ap_u)$、$p_u = \min[(C_1 z + C_2 D)\,\sigma'; C_3 D\,\sigma']$ ・ **粘土**：$p = \frac{1}{2} p_u (y/y_{50})^{1/3}$、$p_u = \min[(3 + \sigma'/c_u + Jz/D)c_u D; 9c_u D]$

繰返し載荷は地表面近くの抵抗を低下させる：砂では$A = 0.9$、粘土では$3y_{50}$以遠で$0.72p_u$

先端条件、**自由長**、**軸力**、**ひび割れ断面**は結果を顕著に変える；特に自由長の影響が最も大きい

変位は荷重に比例しない：**許容変位における荷重**を再計算して求める（H_y、H_M）

参考文献

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning, Boston.

Matlock, H. and Reese, L.C. (1960). Generalized solutions for laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 86(SM5), 63–91.

Matlock, H. (1970). Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay. Proceedings of the 2nd Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 1204, 577–594.

Reese, L.C., Cox, W.R. and Koop, F.D. (1974). Analysis of laterally loaded piles in sand. Proceedings of the 6th Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 2080, 473–485.

American Petroleum Institute (2000). Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms — Working Stress Design, API RP 2A-WSD, 21st ed.

Hetényi, M. (1946). Beams on Elastic Foundation. University of Michigan Press, Ann Arbor.

Reese, L.C., Isenhower, W.M. and Wang, S.-T. (2006). Analysis and Design of Shallow and Deep Foundations. John Wiley & Sons, Hoboken.

Broms, B.B. (1965). Design of laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 91(SM3), 79–99.

Reese, L.C. and Welch, R.C. (1975). Lateral loading of deep foundations in stiff clay. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 101(GT7), 633–649.

Davisson, M.T. and Gill, H.L. (1963). Laterally loaded piles in a layered soil system. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 89(SM3), 63–94.

注記

本スライドの図はGeoTervaの理論ページから引用した；数値例はすべてモジュール自身の計算エンジンで生成しており、モジュールは同じ値を与える。

GeoTerva

オンライン地盤工学計算

理論から実務へ

この発表資料の例題杭をGeoTervaで手順ごとに計算する。数値は同一である。

モジュールを開く →

理論ページ →

スマートフォンで開く

お試しモジュールは登録不要です。

講義で使用したい場合：info@geoterva.com