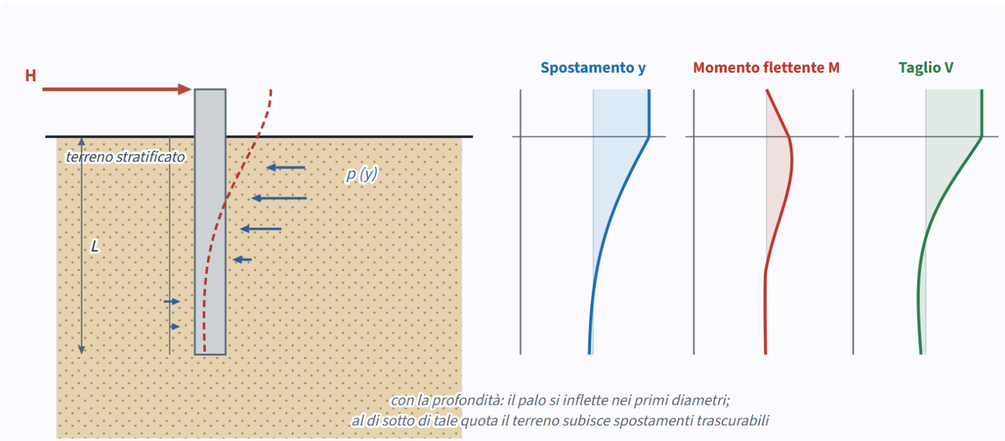
Presentazione didattica di geotecnica · Pali

Palo caricato lateralmente: metodo p–y

Lezione: soluzione del palo sotto carico laterale come trave su molle, curve p–y per sabbia e argilla, carico ciclico, carico assiale e condizioni di testa; un esempio di calcolo per ogni argomento.



- Trave su molle
- Curve p–y per sabbia e argilla
- Carico ciclico
- Condizioni iniziali
- Esempi di calcolo

Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

come impostare un palo caricato lateralmente come **trave su molle**: equazione, convenzioni di segno, condizioni al contorno

Soluzioni elastiche (Matlock–Reese: sabbia, n_h; Hetényi: argilla, k) calcolate a mano

costruire punto per punto le curve p–y API (Reese–Cox–Koop) per la **sabbia** e le curve p–y di Matlock per l'**argilla**, in condizioni statiche e cicliche

Sapere **che cosa fa la soluzione numerica (elementi finiti, Newton)** e come leggere i risultati

Interpretare l'effetto del **carico assiale** (P–δ), della **condizione di testa** e della **lunghezza libera**

Trovare il **carico** corrispondente a uno spostamento ammissibile o alla capacità a momento

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: qual è la regola e perché è così?

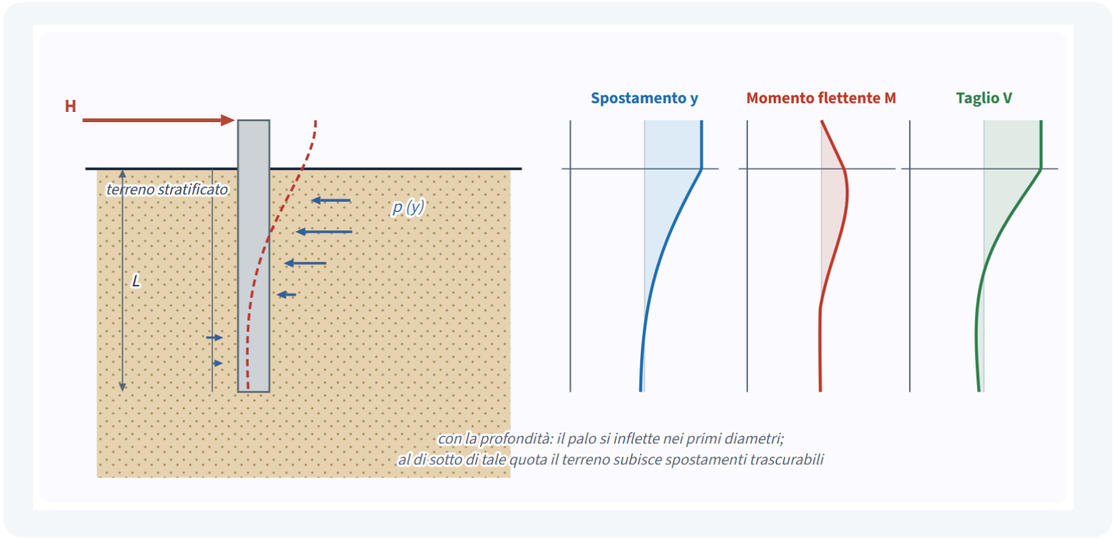
2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Palo di esempio: palo in calcestruzzo di 0.60 m di diametro e 14 m di lunghezza; in terreno sabbia–argilla–sabbia, carico orizzontale di 120 kN a livello del terreno. Il modulo si apre anch'esso con questo modello.

Il carico raggiunge il terreno solo attraverso il movimento laterale

TEORIA



Un palo caricato lateralmente non collassa come una fondazione in piedi: il carico si trasmette al terreno **solo attraverso il movimento laterale del palo**; la reazione del terreno cresce con il movimento e cessa di crescere quando il terreno raggiunge la rottura. Il palo si inflette come una trave nei primi **pochi diametri** di terreno; più in profondità il terreno si muove appena.

Carico ultimo (Broms): il carico al quale si ha la rottura del terreno per un palo corto e la rottura della sezione per un palo lungo. Fornisce la capacità ma non lo spostamento e il momento al carico di esercizio.

Coefficiente di reazione elastica del terreno (Matlock–Reese, Davisson–Gill, Hetényi): terreno schematizzato come molle elastiche; soluzione in forma chiusa.

Il **metodo p–y** (Matlock, Reese et al.): le molle sono **non lineari**; p inizia rigido rispetto a y, si rammollisce e termina alla resistenza ultima del terreno. Si risolve numericamente; terreno stratificato, dal carico di esercizio al carico prossimo alla rottura.

equazione, segni e condizioni al contorno

TEORIA

Il palo è una trave, il terreno lungo di esso una serie di molle; ogni molla agisce alla propria profondità e indipendentemente dalle altre (Winkler). z è diretto verso il basso dalla superficie, y è lo spostamento nella direzione del carico:

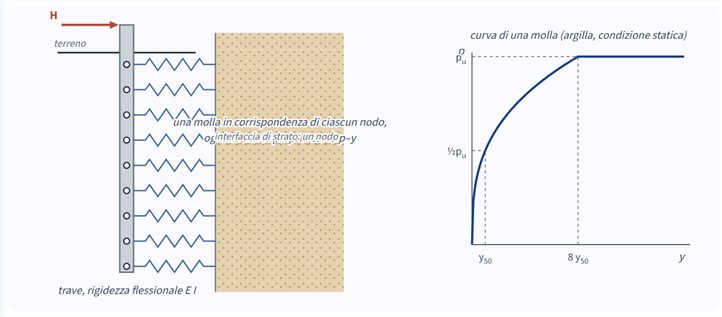
$$EI\,\frac{d^4y}{dz^4} + P\,\frac{d^2y}{dz^2} + p(y,z) = 0$$

$$\theta = \frac{dy}{dz} \quad M = EI\frac{d^2y}{dz^2} \quad V = EI\frac{d^3y}{dz^3} + P\theta \quad \frac{dV}{dz} = -p$$

p è positiva quando si oppone allo spostamento. Per la rigidezza della molla k vale p = k y; **k = k_h D** (kN/m², forza per unità di lunghezza e per unità di spostamento).

Punta libera: M = 0, V = 0. **Testa**: se libera, sono assegnati H e M_g; se impedita di ruotare, la rotazione è nulla e il momento resistente fa parte della soluzione.

All'equazione serve soltanto la legge del terreno p(y, z): costante k·y nel caso elastico, curve p–y nel caso non lineare.



Sabbia: $k = n_h z$

TEORIA

Nella sabbia il coefficiente di reazione del terreno si assume direttamente proporzionale alla profondità: **$k = n_h z$**. Il palo ha un'unica **lunghezza caratteristica**; per il carico Q e il momento M_g applicati in superficie, lo spostamento e il momento sono:

$$T = \left(\frac{EI}{n_h} \right)^{1/5}$$

$$y = A_y \frac{QT^3}{EI} + B_y \frac{M_g T^2}{EI} \qquad M = A_m QT + B_m M_g$$

I coefficienti A e B dipendono da Z = z/T (a lato). Il palo è considerato **lungo**: L/T è elevato, la punta non si sposta.

Il modulo riproduce questi coefficienti con il proprio motore di calcolo: A_y = 2.4292.

COEFFICIENTI (PALO LUNGO)

Z	A_y	A_θ	A_m	B_y	B_θ	B_m
0	2,429	−1,619	0.000	1,619	−1,747	1,000
0.5	1,640	−1,500	0.458	0.871	−1,250	0.974
1	0.961	−1,194	0.725	0.364	−0.789	0.851
1.4	0.543	−0.891	0.770	0.112	−0.480	0.686
2	0.142	−0.462	0.627	−0.070	−0.153	0.404
3	−0.075	−0.039	0.224	−0.089	0.057	0.059

A_m è massimo per Z ≈ 1.4 (0.77).

Traccia

ESEMPIO

Dati

Palo	**HP 250 × 85, L = 25 m, E I = 25 461 kN·m²**
Terreno	**sabbia, n_h = 12 000 kN/m³**
Carico	**Q alla superficie del terreno; M_g = 0, testa libera**
Coefficienti	$A_y = 2.4292$ **(testa),** $A_m = 0.772$ **(massimo)**

RICHIESTO

Determinare il carico Q e **il momento massimo** in modo che lo spostamento della testa sia **8 mm**. Il palo è lungo?

Soluzione

SOLUZIONE

1 Lunghezza caratteristica e lunghezza del palo

$$T = \left(\frac{25\,461}{12\,000}\right)^{1/5} = \mathbf{1.1624}\ \text{m} \qquad \frac{L}{T} = \frac{25}{1.1624} = 21.5 \ \Rightarrow\ \text{palo lungo}$$

2 Carico: $y = A_y\, Q\, T^3 / E\, I \Rightarrow Q = y\, E\, I / (A_y\, T^3)$

$$Q = \frac{0.008(25\,461)}{2.4292\,(1.1624)^3} = \mathbf{53.4}\ \text{kN}$$

3 Momento massimo: $M = A_m\, T\, Q$

$$M_{max} = 0.772\,(1.1624)(53.4) = \mathbf{47.9}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Per questo carico il modulo fornisce uno spostamento in sommità di **8.00 mm** e un momento massimo di **47.9 kN·m**: identici al calcolo manuale.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Argilla: k costante (Hetényi)

TEORIA

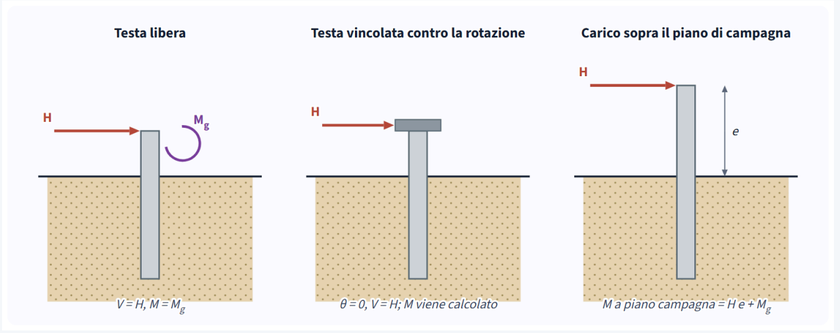
Nell'argilla il coefficiente di reazione del terreno si assume **costante** con la profondità. k è la rigidezza del terreno per unità di lunghezza del palo; **β = (k / 4EI)$^{1/4}$**. Per un palo lungo valgono le soluzioni in forma chiusa di Hetényi, sotto un carico H alla superficie del terreno:

$$\text{estremo libero:} \quad y_0 = \frac{2H\beta}{k} \qquad M_{max} = 0.3224\,\frac{H}{\beta} \quad \left(z = \tfrac{\pi}{4\beta}\right)$$

$$\text{estremità vincolata:} \quad y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} \qquad M_{head} = -\frac{H}{2\beta}$$

Il palo vincolato contro la rotazione in testa si sposta **della metà** rispetto al palo a testa libera; tuttavia il momento di incastro in testa è **maggiore** del momento massimo del palo a testa libera.

Il comportamento reale della piastra di fondazione si colloca tra questi due estremi; quanto vi si avvicini dipende dalla rigidezza della piastra e della sovrastruttura.



Traccia

ESEMPIO

Dati

Palo	**D = 0.60 m, E I = 190,852 kN·m² (palo di esempio)**
Terreno	**argilla, k_h = 15 000 kN/m³ ⇒ k = k_h D = 9,000 kN/m²**
Carico	**H = 120 kN, alla superficie del terreno**
Palo	**lungo**

RICHIESTO

Determinare lo spostamento della testa del palo e i momenti per i casi di **testa libera** e **testa incastrata** mediante le soluzioni in forma chiusa di Heténi.

Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 β

$$\beta = \left(\frac{k}{4EI}\right)^{1/4} = \left(\frac{9{,}000}{4(190{,}852)}\right)^{1/4} = \mathbf{0.3295}\ \mathrm{m}^{-1}$$

2 Testa libera

$$y_0 = \frac{2H\beta}{k} = \frac{2(120)(0.3295)}{9{,}000} = \mathbf{8.79}\ \mathrm{mm}$$

$$M_{max} = 0.3224\frac{H}{\beta} = 0.3224\frac{120}{0.3295} = \mathbf{117.4}\ \mathrm{kN{\cdot}m} \quad \left(z = \tfrac{\pi}{4\beta} = 2.38\ \mathrm{m}\right)$$

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Estremità incastrata

$$y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} = \frac{120}{4(190{,}852)(0.3295)^3} = \mathbf{4.39}\ \text{mm}$$

$$M_{head} = -\frac{H}{2\beta} = -\frac{120}{2(0.3295)} = -\mathbf{182.1}\ \text{kN·m}$$

Riduce lo spostamento con testa impedita **della metà** (8.79 → 4.39 mm), ma il momento alla testa (182.1 kN·m) è **1.55 volte** il momento massimo del palo libero (117.4 kN·m). L'opzione elastica del modulo fornisce gli stessi valori: libero 8.79 mm e 117.4 kN·m, impedito 4.39 mm e 182.1 kN·m.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

API RP 2A: Reese, Cox e Koop

TEORIA

Il terreno prossimo alla superficie viene spinto davanti al palo sotto forma di un **cuneo**; più in profondità il terreno **fluisce orizzontalmente attorno** al palo. La resistenza ultima alla profondità z (σ′: tensione efficace a quella profondità) è la minore delle due:

$$p_{us} = (C_1 z + C_2 D)\,\sigma' \qquad p_{ud} = C_3 D\,\sigma'$$

$$p = A\,p_u \tanh\left(\frac{k\,z\,y}{A\,p_u}\right) \qquad A = \max\left(0.9;\ 3 - 0.8\tfrac{z}{D}\right)\ \text{(statico)},\ A = 0.9\ \text{(ciclico)}$$

C_1, C_2, C_3 dipendono solo da **φ′**; k, il modulo iniziale, si assume in base a φ′ e all'acqua (a lato).

Per y piccoli la curva è la retta **k z y** (caso n_h = k della soluzione elastica); per y grandi termina con **A p_u**. A vale 3.0 in superficie e 0.9 alla profondità di 2.6D: la resistenza statica è maggiore in prossimità della superficie e assente sotto carico ciclico.

COEFFICIENTI VARIABILI CON φ′

φ′	C_1	C_2	C_3	k (sopra la falda)	k (sotto la falda)
28°	1.60	2.41	22.5	5.4	5.4
30°	1.91	2.67	28.7	10.5	7.9
32°	2.28	2.95	36.8	20.7	11.9
34°	2.72	3.25	47.3	32.7	17.6
36°	3.24	3.59	61.2	46.3	24.8
38°	3.87	3.97	79.6	61.7	33.6
40°	4.62	4.38	104.1	78.9	44.0

k: MN/m³. Per 32°: C_1 = 2.28; C_2 = 2.95; C_3 = 36.8.

Traccia

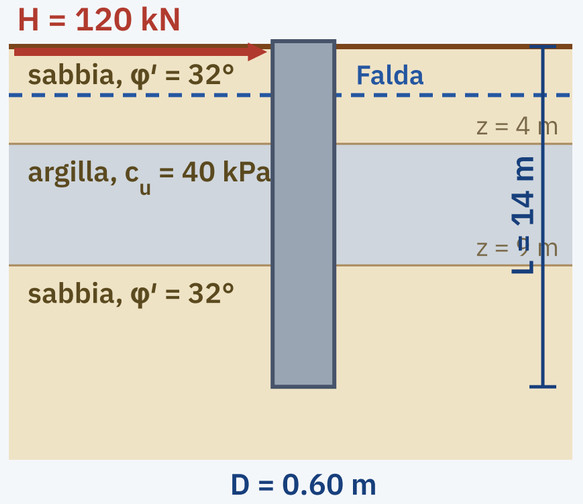
ESEMPIO

Dati

Palo	**trivellato, sezione circolare, D = 0.60 m, L = 14 m, calcestruzzo: E I = 190 852 kN·m²**
Terreno	**sabbia 0–4 m (φ′ = 32°) · argilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · sabbia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso dell'unità di volume, acqua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; falda freatica a 2.0 m**
Profondità	**z = 2.0 m (sabbia 1, livello della falda freatica); k = 20.7 MN/m³ (sopra la falda)**
Coefficienti	$K_0 = 0.4,\ K_a = \tan^2(45^\circ - \varphi'/2)$

RICHIESTO

Con σ′, C_1, C_2, C_3, $\mathbf{p_u}$, A e y = 5 mm e 10 mm, determinare i valori di **p**.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Tensione efficace e angoli (falda freatica = 2 m: umido dalla superficie fino a z = 2)

$$\sigma' = 18(2) = \mathbf{36.0}\ \mathrm{kPa} \qquad \alpha = \frac{\varphi'}{2} = 16^\circ,\ \beta = 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} = 61^\circ,\ K_a = \tan^2 29^\circ = 0.3073$$

2 Coefficienti (φ′ = 32°)

$$C_1 = \frac{K_0 \tan\varphi' \sin\beta}{\tan(\beta-\varphi')\cos\alpha} + \frac{\tan^2\beta\tan\alpha}{\tan(\beta-\varphi')} + K_0\tan\beta(\tan\varphi'\sin\beta - \tan\alpha) = \mathbf{2.281}$$

$$C_2 = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\varphi')} - K_a = \mathbf{2.947}$$

$$C_3 = K_a(\tan^8\beta - 1) + K_0\tan\varphi'\tan^4\beta = \mathbf{36.81}$$

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Resistenza limite: il minore tra il cuneo e il flusso attorno al perimetro

$$p_{us} = (2.281(2) + 2.947(0.6))(36.0) = 227.9 \text{ kN/m}$$

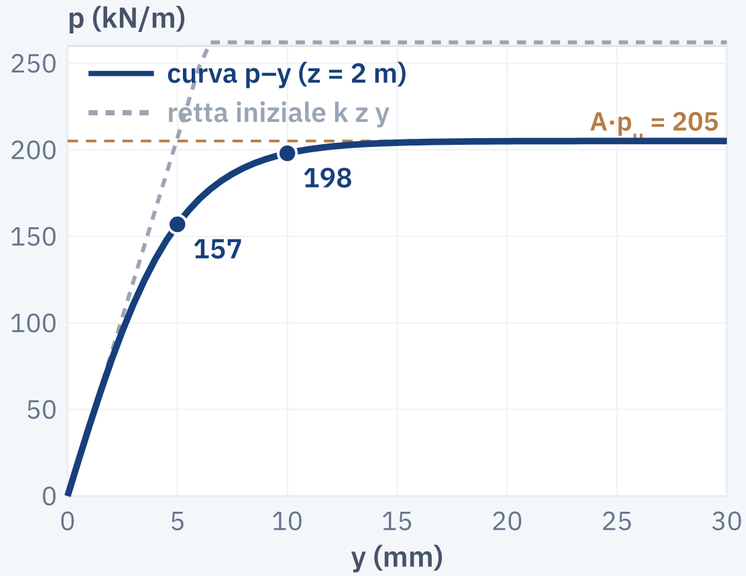
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(36.0) = 795 \text{ kN/m} \Rightarrow p_u = \mathbf{227.9} \text{ kN/m}$$

4 A e la curva: A = max(0.9; 3 – 0.8 z/D) = max(0.9; 0.33) = 0.9; k z y / (A p_u)

$$y = 5 \text{ mm}: \; p = 0.9(227.9)\tanh\frac{20\,700(2)(0.005)}{0.9(227.9)}$$

$$= \mathbf{157.0} \text{ kN/m}$$

$$y = 10 \text{ mm}: \; p = \mathbf{198.0} \text{ kN/m}$$



La curva A tende a p_u = 205 kN/m; a 10 mm ne è prossima al 97%. A questa profondità la curva statica e quella ciclica sono **uguali** (A vale 0.9 in entrambe).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

ESEMPIO

Dati

Palo	**trivellato, sezione circolare, D = 0.60 m, L = 14 m, calcestruzzo: E I = 190 852 kN·m²**
Terreno	**sabbia 0–4 m (φ′ = 32°) · argilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · sabbia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso dell'unità di volume, acqua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; falda freatica a 2.0 m**
Profondità	**z = 0.6 m (1D), σ′ = 18(0.6) = 10.8 kPa; k = 20.7 MN/m³**
Sabbia 1	**C_1 = 2.281, C_2 = 2.947, C_3 = 36.81 (Esempio 3)**

RICHIESTO

Determinare i valori **p–y** statici e ciclici per y = 10 mm.

Soluzione

SOLUZIONE

1 Resistenza limite e A

$$p_{us} = (2.281(0.6) + 2.947(0.6))(10.8) = 33.9\ \text{kN/m}$$

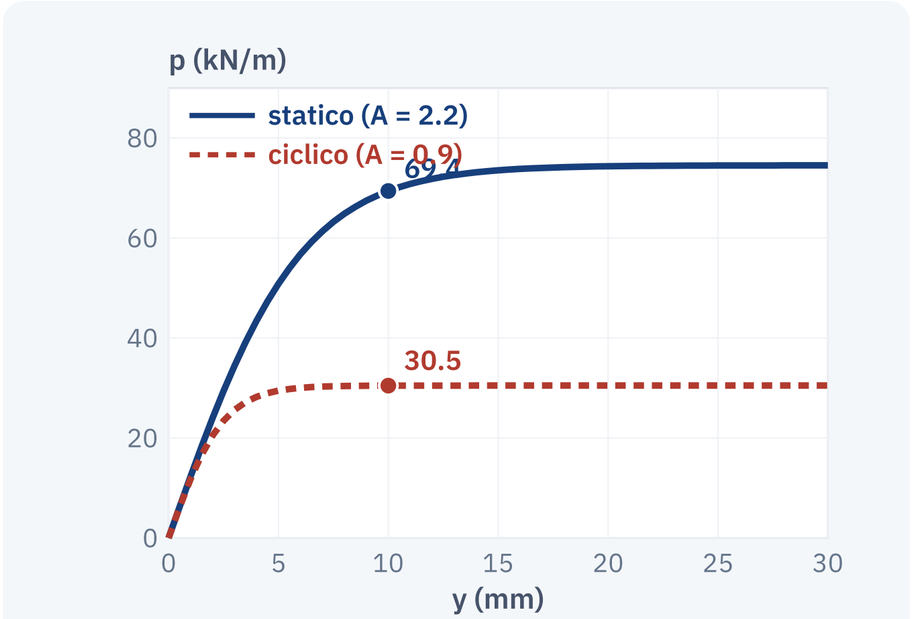
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(10.8) = 238.6\ \text{kN/m} \ \Rightarrow\ p_u = \mathbf{33.9}\ \text{kN/m}$$

$$A_{static} = \max(0.9;\ 3 - 0.8(1)) = 2.2 \qquad A_{cyclic} = 0.9$$

2 y = 10 mm: k z y = 20 700(0.6)(0.010) = 124.2

$$p_{static} = 2.2(33.9)\tanh\frac{124.2}{2.2(33.9)} = \mathbf{69.4}\ \text{kN/m}$$

$$p_{cyclic} = 0.9(33.9)\tanh\frac{124.2}{0.9(33.9)} = \mathbf{30.5}\ \text{kN/m}$$



Nella sabbia prossima alla superficie il carico ciclico riduce la resistenza del **56%** (69.4 → 30.5 kN/m): si perde il fattore A. Per questo, sotto carico ciclico lo spostamento in testa aumenta.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Matlock: argilla tenera, condizioni statiche e cicliche

TEORIA

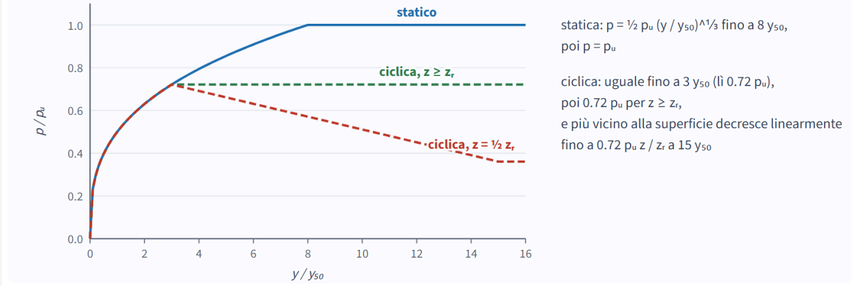
Nell'argilla il modulo adotta la curva per argilla molle di **Matlock** (1970) nella forma data da API RP 2A. La resistenza ultima è ancora il minore tra il valore superficiale (cuneo) e quello profondo (flusso):

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{\sigma'}{c_u} + J\frac{z}{D}\right) c_u D;\ 9 c_u D\right]$$

$$p = \tfrac{1}{2} p_u \left(\frac{y}{y_{50}}\right)^{1/3} \quad (y \le 8 y_{50}) \qquad p = p_u \ (y > 8 y_{50}) \qquad y_{50} = 2.5\,\varepsilon_{50} D$$

ε_{50} e J rispetto a c_u: sotto 48 kPa molle (0.020; 0.5), tra 48 e 96 medie (0.010; 0.25), oltre 96 rigide (0.005; 0.25).

Ciclico: dopo $3y_{50}$ la curva si mantiene a 0.72 p_u ($z \ge z_R$); a profondità minori **decresce linearmente** fino a 0.72 p_u z/z_R a $15y_{50}$. z_R = max[6D / ((σ′/z)(D/c_u) + J); 2.5D].



Traccia

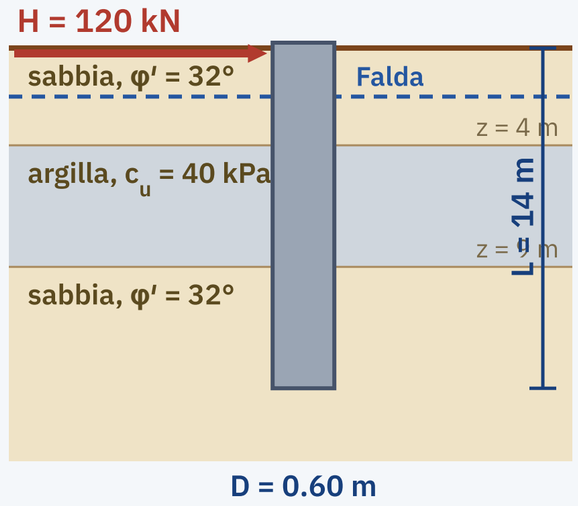
ESEMPIO

Dati

Palo	**trivellato, sezione circolare, D = 0.60 m, L = 14 m, calcestruzzo: E I = 190 852 kN·m²**
Terreno	**sabbia 0–4 m (φ′ = 32°) · argilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · sabbia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso dell'unità di volume, acqua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; falda freatica a 2.0 m**
Profondità	**z = 6.5 m (argilla, 4–9 m); ε_{50} = 0.020, J = 0.5**
Strato	**c_u = 40 kPa**

RICHIESTO

Per y = 15 mm e 150 mm determinare σ′, **p_u**, y_{50} e i valori **statici** p–y; determinare z_R e il valore di plateau della curva **ciclica**.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 σ′: sabbia 0–2 m umida (γ = 18), sabbia 2–4 m e argilla 4–6.5 m immersi (γ_{sat} = 19)

$$\sigma' = 18(2) + (19 - 9.81)(2) + (19 - 9.81)(2.5) = \mathbf{77.4}\ \text{kPa}$$

2 Resistenza ultima e y_{50}

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{77.4}{40} + 0.5\frac{6.5}{0.6}\right)(40)(0.6);\ 9(40)(0.6)\right]$$

$$= \min[248.4;\ 216.0] = \mathbf{216.0}\ \text{kN/m}$$

$$y_{50} = 2.5(0.020)(0.6) = \mathbf{30.0}\ \text{mm}$$

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Curva statica: $p = \frac{1}{2}\, p_u\, (y/y_{50})^{1/3}$

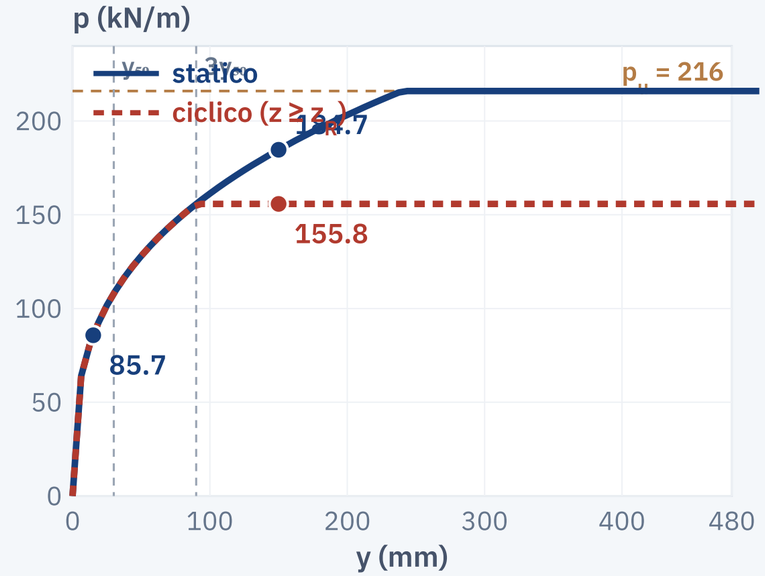
$$y = 15\ \text{mm}\ (0.5y_{50}):\ \ p = 0.5(216.0)(0.5)^{1/3} = \mathbf{85.7}\ \text{kN/m}$$

$$y = 150\ \text{mm}\ (5y_{50}):\ \ p = 0.5(216.0)(5)^{1/3} = \mathbf{184.7}\ \text{kN/m}$$

4 Curva ciclica: $z_R = \max[6(0.6)/((\sigma'/z)(D/c_u) + J);\ 2.5D] = \max[5.31;\ 1.5] = 5.31$ m; $z = 6.5 > z_R$

$$p_{perimeter}(y \geq 3y_{50}) = 0.72\, p_u = 0.7211(216.0) = \mathbf{155.8}\ \text{kN/m}$$

A y = 150 mm la resistenza statica è 184.7 e quella ciclica 155.8 kN/m: il carico ciclico riduce la resistenza in questa argilla del **16%**; fino a $3y_{50}$ (90 mm) le due curve coincidono.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Ogni curva corrisponde al terreno alla propria profondità

TEORIA

σ′ è la somma dei pesi dell'unità di volume degli strati sovrastanti (γ sopra la falda freatica, $\gamma_{sat} - \gamma_W$ sotto); **non è la media** dello strato, ma cresce con la profondità all'interno dello strato.

Lo strato z fornisce φ′ e k (sabbia) oppure c_u, ε_{50} e J (argilla). Il modulo iniziale k della sabbia è riferito all'acqua presente alla quota dello strato; in uno strato attraversato dall'acqua viene inserito in base alla profondità media dello strato ed è modificabile manualmente.

Gli elementi **non attraversano mai un confine di strato**: a ogni confine vi è un nodo; la rigidezza del terreno varia bruscamente tra un elemento e l'altro, non all'interno di un elemento.

Il foglio di calcolo fornisce, passo per passo, i valori della curva nel punto medio di ogni strato: σ′, i coefficienti, p_u, A o y_{50} — riproducibili a mano (come negli Esempi 3 e 5 di questa presentazione).

Gli strati devono estendersi fino alla punta del palo; il terreno al di sotto della punta non è definito e la punta è libera. Un'argilla tenera su una sabbia addensata compare nei diagrammi come una **discontinuità** al confine.

Elementi finiti e Newton

TEORIA

L'equazione si risolve con il metodo degli elementi finiti: il palo è suddiviso in **elementi trave cubici**, con y e rotazione θ in ciascun nodo. La reazione del terreno è ricavata dalla curva in **quattro punti di Gauss** per ogni elemento e integrata. L'equazione non lineare K u + f(u) = F si risolve con il metodo di Newton:

$$(K + K_s(u_i))\,\Delta u = F - K u_i - f(u_i) \qquad K_s = \int N^T \frac{dp}{dy} N \, dz$$

dp/dy non scende sotto **un ventesimo** della rigidezza secante: la matrice resta definita positiva anche dove la curva è piatta o discendente. È prevista una ricerca lineare che riduce il passo e, se questa fallisce, un passo secante smorzato.

Lunghezza dell'elemento D/6 (3–15 cm); il risultato **non** dipende dalla mesh fino ai passaggi mostrati (elemento 0.4 → 0.025 m: spostamento della testa 6.228 → 6.228 mm).

Se il carico supera quanto il terreno può sopportare, **non vi è equilibrio**; il modulo lo segnala e non restituisce valori numerici. La soluzione non è ritenuta valida nemmeno se il terreno si è spostato di oltre **cinque larghezze di palo** al di sotto del piano di campagna.

La curva ciclica dell'argilla, o la risposta a un carico assiale, non è un'unica curva crescente; sale fino al **carico limite**. Il modulo raggiunge il carico per passi successivi a partire da zero.

In ogni analisi si scrivono due verifiche: Σ p Δz = H e momento alla punta = 0 (statica).

Effetto P–δ e instabilità per carico di punta

TEORIA

Il carico assiale P agisce lungo la **configurazione deformata** del palo: compare nell'equazione (il termine P d²y/dz²) e nella rigidezza geometrica di ciascun elemento; riduce la rigidezza laterale della trave compressa e aumenta lo spostamento e il momento. Il modulo assume P costante su tutta la lunghezza e uguale alla testa e alla punta (in realtà l'attrito laterale trasferisce il carico al terreno; assumerlo costante è a favore di sicurezza).

$$P_{cr} = \sqrt{k\,EI} \qquad (\text{estremità libera, } k \text{ costante, palo lungo})$$

È **la metà** del valore 2√(kEI) della trave infinita: un'estremità libera può ruotare. Una testa vincolata instabilizza a un carico maggiore.

Quando P si avvicina al carico di instabilità, la curva carico–spostamento cresce senza limite; il modulo segnala **«il carico assiale supera il carico di instabilità»**.

La resistenza della sezione del palo all'azione combinata del carico assiale e del momento è una verifica di progettazione strutturale.

PALO DI ESEMPIO

Per E I = 190,852 kN·m² e k = 9,000 kN/m² nell'argilla elastica:

$$P_{cr} = \sqrt{9{,}000\,(190{,}852)} = 41{,}445\ \text{kN}$$

Traccia

ESEMPIO

Dati

Palo	**trivellato, sezione circolare, D = 0.60 m, L = 14 m, calcestruzzo: E I = 190 852 kN·m²**
Terreno	**sabbia 0–4 m (φ′ = 32°) · argilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · sabbia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso dell'unità di volume, acqua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; falda freatica a 2.0 m**
Carichi	**H = 120 kN; carico assiale P = 800 kN (costante)**
Instabilità per compressione	**k = k_h D = 9,000 kN/m² (argilla elastica), testa libera**
Modulo	**P = 0: testa 6.23 mm, M_{max} 151.8 kN·m**

RICHIESTO

P = 800 kN è **vicino** al carico di buckling? Quanto vale l'effetto P–δ?

Soluzione

SOLUZIONE

1 Carico di instabilità (testa libera, k costante)

$$P_{cr} = \sqrt{kEI} = \sqrt{9{,}000(190{,}852)} = \mathbf{41{,}445}\ \text{kN} \qquad \frac{P}{P_{cr}} = \frac{800}{41{,}445} = \mathbf{0.019}$$

2 nel modulo con P = 800 kN (inclusa la curva P–δ)

$$y_{head}:\ 6.23 \rightarrow 6.32\ \text{mm}\ \ (+2\%) \qquad M_{max}:\ 151.8 \rightarrow 154.5\ \text{kN·m}\ \ (+2\%)$$

800 kN, solo il **2%** del carico di instabilità: il carico assiale non avvicina il palo all'instabilità; l'effetto P–δ aumenta lo spostamento del 2% e il momento del 2%. In questo palo il carico assiale è secondario nell'analisi laterale, ma non può essere trascurato.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Paratia libera, paratia incastrata e sovraccarico sul terreno

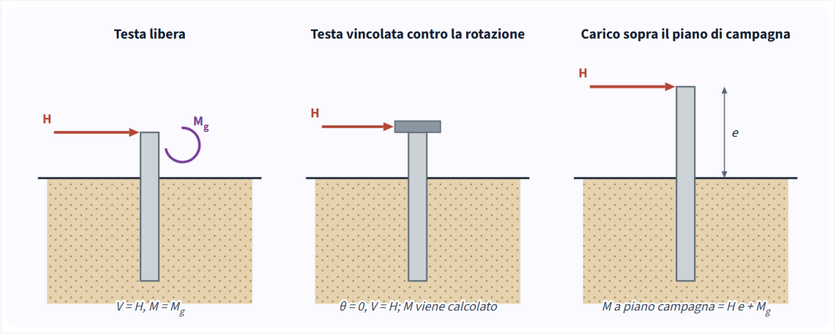
TEORIA

Testa libera: nel punto di applicazione del carico V = H e M = M_g.

Testa fissa: la pendenza è nulla, la testa si sposta lateralmente. Su un terreno lungo, uniforme ed elastico si sposta **la metà** rispetto al caso a testa libera; il momento di incastro M = −H/(2β) è maggiore del momento massimo del palo libero. Un plinto reale si colloca tra i due casi.

Lunghezza libera e: il palo al di sopra del terreno si inflette come una mensola. Il taglio è pari a H fino al terreno e il momento raggiunge **M(0) = M_g + H e** in corrispondenza del piano di campagna; ivi il terreno entra in gioco.

Spostamento in testa = spostamento alla superficie del terreno + rotazione alla superficie × e + spostamento a sbalzo della lunghezza libera (H e^3 / 3EI). A parità di carico, la lunghezza libera rende lo spostamento in testa **molto maggiore** di quello della superficie del terreno; il momento massimo è per lo più nel terreno o poco al di sotto.



Traccia

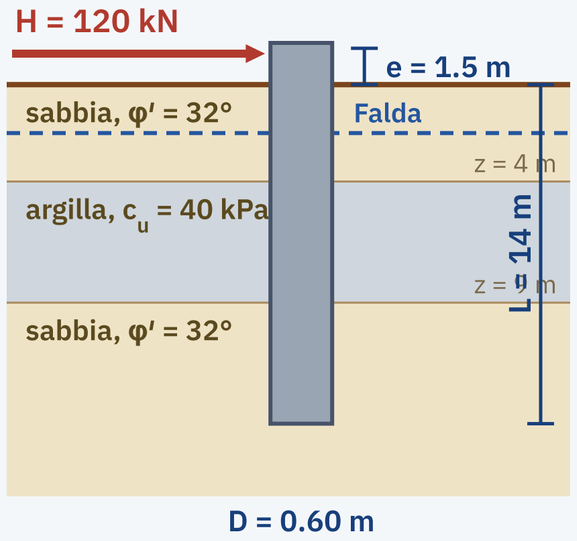
ESEMPIO

Dati

Palo	**trivellato, sezione circolare, D = 0.60 m, L = 14 m, calcestruzzo: E I = 190 852 kN·m²**
Terreno	**sabbia 0–4 m (φ′ = 32°) · argilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · sabbia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso dell'unità di volume, acqua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; falda freatica a 2.0 m**
Lunghezza libera	**carico sopra il piano di campagna a e = 1.5 m; H = 120 kN, testa libera**
Modulo (alla superficie del terreno)	**$y_{terreno}$ = 11.12 mm, pendenza = 0.321° (verso il carico)**

RICHIESTO

Determinare il **momento** e lo **spostamento della testa** alla superficie del terreno; confrontare il risultato con 20.23 mm del modulo.



Soluzione

SOLUZIONE

1 Momento alla superficie del terreno (taglio H sulla lunghezza libera, $M_g = 0$)

$$M(0) = M_g + H\,e = 0 + 120(1.5) = \mathbf{180}\ \text{kN·m}$$

2 Spostamento a mensola della lunghezza libera

$$\frac{H\,e^3}{3EI} = \frac{120(1.5)^3}{3(190{,}852)} = 0.71\ \text{mm}$$

3 Spostamento in testa = $y_{terreno} + |\theta|\,e + H\,e^3/3EI$

$$y_{head} = 11.12 + 5.605(1.5) + 0.71 = \mathbf{20.23}\ \text{mm}$$

A mano **20.23 mm**, nel modulo 20.23 mm: identici. Con il carico a livello del terreno la testa si spostava di 6.23 mm; una lunghezza libera di 1.5 m la rende **3.2 volte** maggiore. Il momento massimo è 306 kN·m, 1.68 m sotto il piano di campagna (superiore ai 180 kN·m al piano di campagna).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Quale numero dice che cosa?

TEORIA

Spostamento in testa y e rotazione (inclinazione dy/dz; negativa per un palo che giace nella direzione del carico). Se esiste una lunghezza libera, si fornisce anche il valore alla superficie del terreno.

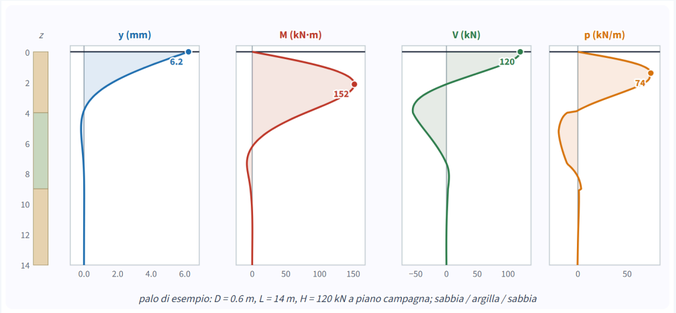
Momento flettente massimo e relativa profondità. Per una testa vincolata è elencato anche il momento alla testa; non sempre è il maggiore.

Profondità di spostamento nullo: il punto in cui il palo interseca il proprio asse; al di sopra il terreno si muove verso il palo, al di sotto se ne allontana.

Taglio e reazione del terreno; la reazione e l'estremo della curva p–y sono tracciati affiancati: si vede quanto il terreno è vicino al suo limite.

Punta: alla punta di un palo sufficientemente lungo non vi è spostamento. Se la punta si sposta più di un decimo dello spostamento della superficie del terreno e più di 2 mm, il palo è **corto** per questo carico: ruota come un corpo rigido e la sua lunghezza determina il risultato.

La vista p–y traccia le curve a cinque profondità nella parte in movimento e su ciascuna segna il **punto raggiunto**: il punto all'inizio piatto della curva è elastico, quello prossimo all'estremo è al limite.



Traccia

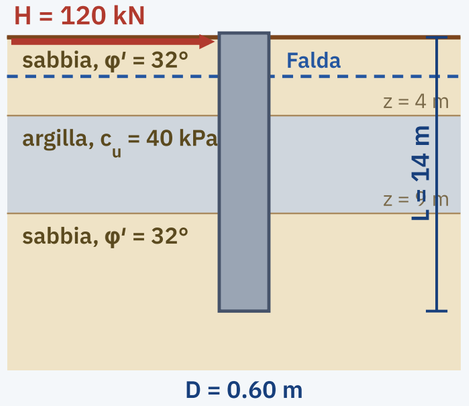
ESEMPIO

Dati

Palo	**trivellato, sezione circolare, D = 0.60 m, L = 14 m, calcestruzzo: E I = 190 852 kN·m²**
Terreno	**sabbia 0–4 m (φ′ = 32°) · argilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · sabbia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso dell'unità di volume, acqua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; falda freatica a 2.0 m**
Risultati del modulo	**testa y = 6.23 mm, inclinazione 0.150°; M_{max} = 151.8 kN·m (z = 2.13 m); spostamento nullo a z = 3.85 m; punta 0.0019 mm**
Massima reazione del terreno	**p = 74.0 kN/m, z = 1.40 m; A = max(0.9; 3 − 0.8(1.4)/0.6), p_u = 125.0 kN/m**

RICHIESTO

Il palo è **lungo** per questo carico? A quale **percentuale** del suo limite lavora il terreno alla profondità di 1.40 m? Commentare le verifiche statiche.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

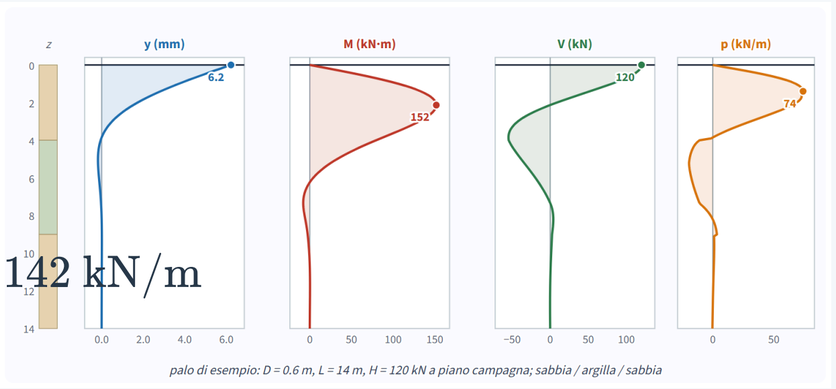
1 Condizione al contorno: lo spostamento della testa del palo è confrontato con 2 mm, un decimo dello spostamento alla superficie del terreno

$$y_{tip} = 0.0019 \text{ mm} \ll 0.1(6.23) = 0.62 \text{ mm} \;\Rightarrow\; \text{palo lungo}$$

2 A 1.40 m, in quale misura il terreno rientra nel suo limite?

$$A = \max\left(0.9;\; 3 - \frac{0.8(1.4)}{0.6}\right) = 1.133 \;; \quad A\,p_u = 1.133(125.0) = 142 \text{ kN/m}$$

$$\frac{p}{Ap_u} = \frac{74.0}{142} = \mathbf{0.52}$$



palo di esempio: D = 0.6 m, L = 14 m, H = 120 kN a piano campagna; sabbia / argilla / sabbia

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Verifiche statiche

$$\sum p\,\Delta z = 120.000\ \text{kN} = H \qquad M_{tip}\ (\text{dalla statica}) = 0.000\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad 7\ \text{iterazione}$$

Il palo è **lungo**; a 1.40 m il terreno lavora al **52%** del proprio limite (non al termine della curva). Anche entrambe le verifiche risultano soddisfatte: sono controlli dell'iterazione e della contabilità, **non dell'accuratezza del modello**.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Carico corrispondente al valore ammissibile

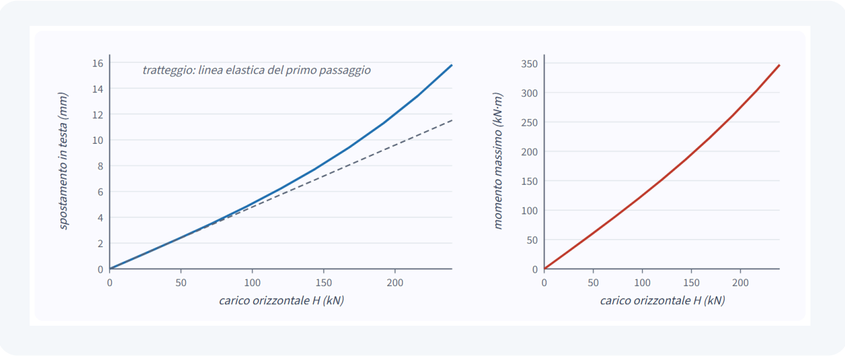
TEORIA

Poiché il terreno è non lineare, lo spostamento non è proporzionale al carico; il **carico corrispondente allo spostamento ammissibile** non può essere letto dal risultato ottenuto in corrispondenza del carico di esercizio. Il modulo incrementa proporzionalmente fin dall'inizio il carico e il momento (un fattore λ su H e M_g, con il carico assiale costante), risolve di nuovo l'equazione a ogni passaggio e determina il λ per cui lo spostamento in testa raggiunge il valore ammissibile (o il momento massimo raggiunge la capacità della sezione): $\mathbf{H_y}$ oppure $\mathbf{H_M}$.

Se il terreno non è in grado di sopportare il valore ammissibile (se l'equilibrio non si raggiunge prima di tale valore), il modulo segnala **«non raggiunto»** e la curva termina all'ultimo carico risolto. Per l'argilla ciclica o per il carico assiale la curva si flette: questo è il **carico limite del terreno**.

Non è questa la capacità del palo: nel modulo il palo è elastico; un palo che snerva in flessione può raggiungere la rottura prima del terreno. La capacità a momento inserita costituisce la verifica di ciò.

Il modulo non fornisce un fattore di sicurezza e non lo ricava da una norma: lo spostamento ammissibile e la capacità a momento sono responsabilità del progettista.



Traccia

ESEMPIO

Dati

Palo	**trivellato, sezione circolare, D = 0.60 m, L = 14 m, calcestruzzo: E I = 190 852 kN·m²**
Terreno	**sabbia 0–4 m (φ′ = 32°) · argilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · sabbia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso dell'unità di volume, acqua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; falda freatica a 2.0 m**
Soluzione non lineare	**Per H = 30, 60, …, 270 kN lo spostamento della testa: 1.44 · 2.93 · 4.51 · 6.23 · 8.15 · 10.33 · 12.86 · 15.82 · 19.29 mm**
Ammissibile	**y_{all} = 10 mm; capacità a momento M_{cap} = 200 kN·m**

RICHIESTO

H_y, il carico corrispondente a y_{all} = 10 mm; H_M, il carico corrispondente a M_{cap}; quale sarebbe l'errore se si usasse la proporzionalità lineare?

Soluzione

SOLUZIONE

1 Proporzione lineare (dal valore di 6.23 mm sotto il carico di esercizio) e soluzione esatta

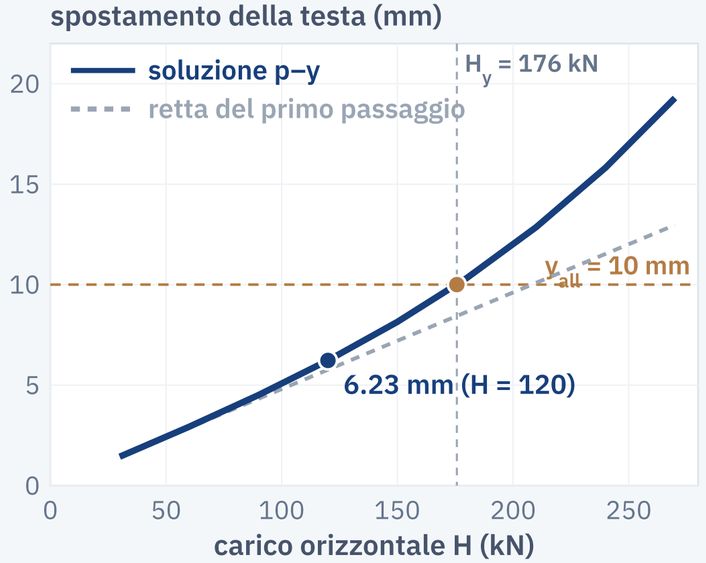
$$H_{y,linear} = 120\,\frac{10}{6.23} = 192.7\ \text{kN}$$

$$H_y = \mathbf{175.7}\ \text{kN}\ (\lambda = 1.464)$$

2 Carico corrispondente alla capacità a momento

$$H_M = \mathbf{153.6}\ \text{kN}\ \ (\lambda = 1.280;\ y_{head} = 8.39\ \text{mm})$$

Una proporzionalità lineare fornirebbe un carico **superiore del 10%** (193 ≠ 176 kN): con l'ammorbidirsi del terreno lo spostamento cresce più rapidamente del carico. La grandezza **determinante** è il momento: H_M = 154 kN, a cui l'estremità superiore si sposta di soli 8.4 mm; al carico corrispondente allo spostamento ammissibile (H_y = 176 kN) il momento sarebbe 234 kN·m.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

ESEMPIO

Dati

Palo	**trivellato, sezione circolare, D = 0.60 m, L = 14 m, calcestruzzo: E I = 190 852 kN·m²**
Terreno	**sabbia 0–4 m (φ′ = 32°) · argilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · sabbia 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso dell'unità di volume, acqua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; falda freatica a 2.0 m**
Da confrontare	**condizione di testa · lunghezza libera · carico ciclico · carico assiale (800 kN) · sezione fessurata (E I × 0.6) · terreno elastico (n_h = 8 MN/m³, k_h = 15 MN/m³)**

RICHIESTO

In ciascun caso confrontare lo spostamento in testa e il momento massimo rispetto al carico di esercizio.

Soluzione

SOLUZIONE

Condizione	y_{testa} (mm)	M_{max} (kN·m)	y / y_0	M / M_0
Come inserito: libera, statica, al livello del terreno	6.23	152	1.00	1.00
Incastrato in sommità contro la rotazione ($M_{sommità}$)	2.24	-175	0.36	1.15
Carico a 1.5 m sopra il piano di campagna	20.23	306	3.25	2.01
Carico ciclico (API)	7.28	172	1.17	1.13
Carico assiale P = 800 kN	6.32	155	1.02	1.02
Sezione fessurata, E I × 0.6	7.93	140	1.27	0.92
Terreno elastico (n_h, k_h)	10.49	173	1.68	1.14

La condizione di testa riduce lo spostamento di un fattore 0.36 e aumenta il momento; **la lunghezza libera** è il parametro più influente (×3.2 lo spostamento, ×2.0 il momento). **Il carico ciclico** aumenta lo spostamento del 17%, **la sezione fessurata** del 27%, ma riduce il momento (il palo è più flessibile). Il terreno elastico è una questione separata: non è una verifica delle curve p–y.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Le ipotesi alla base dei numeri

TEORIA

Palo singolo: palo isolato, privo di pali vicini, descritto dalle sue curve p–y. Un gruppo caricato lateralmente si sposta più di un palo singolo a parità di carico sul palo; il gruppo è oggetto del modulo gruppo di pali con i fattori moltiplicativi p delle file.

Palo: sezione unica per tutta la lunghezza, elastico lineare; E I costante. La sezione in calcestruzzo fessurata è rappresentata dal moltiplicatore di E I e dal momento M_{cap} al quale la sezione snerva.

Terreno: molle indipendenti, senza scorrimento tra esse; le curve derivano da prove eseguite su terreni specifici: la sabbia dipende da φ', l'argilla da c_u e ε_{50}. Descrive sabbia e argilla tenera–media; argilla consistente, roccia alterata, terreno cementato e sabbia liquefacibile sono descritti da curve proprie.

Carico: statico oppure ciclico con riduzione API; applicato per primo. Il **carico assiale** è costante su tutta la lunghezza.

Soluzione numerica: gli elementi finiti e l'iterazione non lineare sono esatti per l'equazione data, fino ai passaggi mostrati; l'approssimazione risiede nell'equazione (il terreno è rappresentato da molle). Si è ottenuta una concordanza entro lo 0.01% su 14 pali con due programmi indipendenti (differenze finite, in un altro linguaggio).

Il metodo p–y costituisce la base della progettazione dei pali caricati lateralmente nella pratica; i valori devono essere confrontati con i valori ammissibili di progetto e, se disponibile, con la **prova di carico**.

Sintesi

Punti chiave

Il palo è una **trave su molle non lineari**: $EI\,y'''' + P\,y'' + p(y, z) = 0$; la legge del terreno è la curva p–y

Elastico: sabbia $n_h z \rightarrow T = (EI/n_h)^{1/5}$; argilla $k \rightarrow \beta = (k/4EI)^{1/4}$, $y_0 = 2H\beta/k$, $M_{max} = 0.3224\ H/\beta$

Sabbia: $p = A\,p_u \tanh(kzy/Ap_u)$, $p_u = \min[(C_1 z + C_2 D)\sigma'; C_3 D\sigma']$ · **Argilla**: $p = \frac{1}{2} p_u (y/y_{50})^{1/3}$, $p_u = \min[(3 + \sigma'/c_u + Jz/D)c_u D; 9c_u D]$

Il carico **ciclico** riduce la resistenza in prossimità della superficie: $A = 0.9$ nella sabbia, $0.72p_u$ nell'argilla oltre $3y_{50}$

La **condizione di testa**, la **lunghezza libera**, il **carico assiale** e la **sezione fessurata** modificano sensibilmente il risultato; la lunghezza libera soprattutto

Lo spostamento non è proporzionale al carico: il **carico corrispondente allo spostamento ammissibile** si ottiene risolvendo nuovamente (H_y, H_M)

Bibliografia

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning, Boston.

Matlock, H. and Reese, L.C. (1960). Generalized solutions for laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 86(SM5), 63–91.

Matlock, H. (1970). Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay. Proceedings of the 2nd Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 1204, 577–594.

Reese, L.C., Cox, W.R. and Koop, F.D. (1974). Analysis of laterally loaded piles in sand. Proceedings of the 6th Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 2080, 473–485.

American Petroleum Institute (2000). Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms — Working Stress Design, API RP 2A-WSD, 21st ed.

Hetényi, M. (1946). Beams on Elastic Foundation. University of Michigan Press, Ann Arbor.

Reese, L.C., Isenhower, W.M. and Wang, S.-T. (2006). Analysis and Design of Shallow and Deep Foundations. John Wiley & Sons, Hoboken.

Broms, B.B. (1965). Design of laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 91(SM3), 79–99.

Reese, L.C. and Welch, R.C. (1975). Lateral loading of deep foundations in stiff clay. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 101(GT7), 633–649.

Davisson, M.T. and Gill, H.L. (1963). Laterally loaded piles in a layered soil system. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 89(SM3), 63–94.

NOTA

Le figure di questa presentazione sono tratte dalla pagina Teoria di GeoTerva; tutti gli esempi numerici sono stati prodotti dal motore di calcolo del modulo, che restituisce gli stessi valori.

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

Calcolare il palo dell'esempio di questa presentazione passo per passo in GeoTerva: i numeri sono gli stessi.

Aprire il modulo →

Pagina di teoria →

Aprire dallo smartphone

I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com