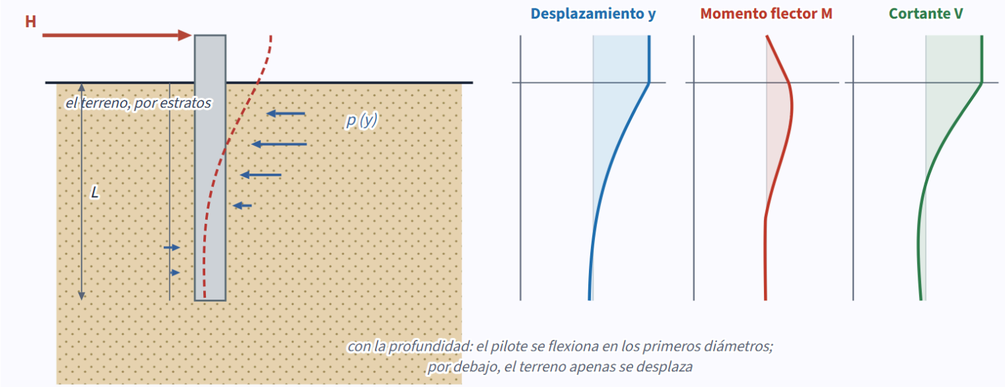
Presentación de clase de geotecnia · Pilotes

Pilote con carga lateral: método p–y

Clase: cálculo de un pilote sometido a carga lateral como viga sobre muelles, curvas p–y de arena y arcilla, carga cíclica, carga axial y condiciones en cabeza; ejemplo resuelto en cada tema.

- Viga sobre muelles
- Curvas p–y de arena y arcilla
- Carga cíclica
- Condiciones en cabeza
- Ejemplos resueltos



Se basa en la página de teoría de GeoTerva · geoterva.com

Introducción

¿Qué aprenderemos en esta clase?

- Plantear el pilote cargado lateralmente como una **viga sobre resortes**: ecuación, convenio de signos, condiciones de extremo
- Calcular a mano las **soluciones elásticas** (Matlock–Reese: arena, n_h; Hetényi: arcilla, k)
- La construcción punto a punto de las curvas p–y de API (Reese–Cox–Koop) para **arena** y de Matlock para **arcilla**, estáticas y cíclicas
- Saber **qué hace** la solución numérica (elementos finitos, Newton) y cómo interpretar los resultados
- Interpretar el efecto de la **carga axial** (P–δ), de la **condición de cabeza** y de la **longitud libre**
- Hallar la **carga** correspondiente al desplazamiento admisible o al momento resistente

DESARROLLO DE LA CLASE

Cada tema se desarrolla en **tres pasos**:

1 · **Teoría**: ¿cuál es la regla y por qué es así?

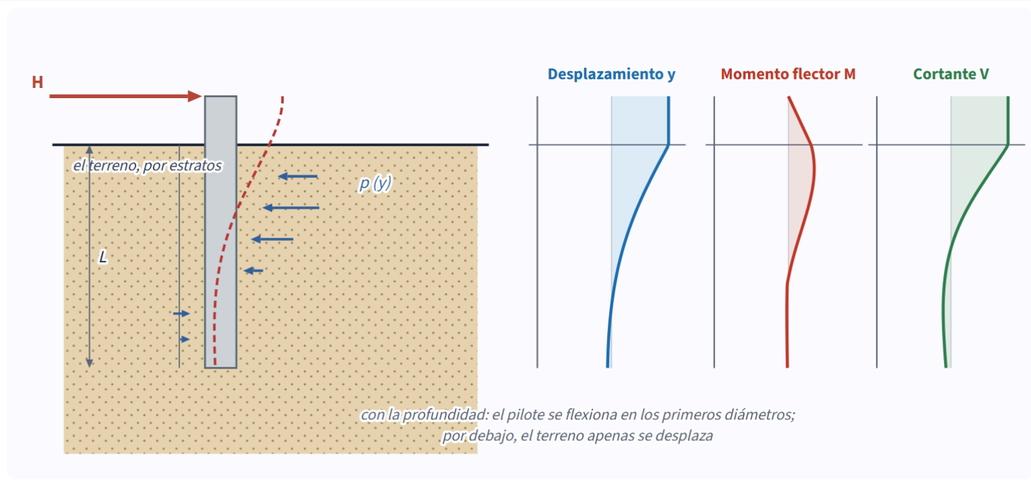
2 · **Enunciado**: datos y se pide

3 · **Solución**: paso a paso, con números

Pilote del ejemplo: pilote de hormigón de 0.60 m de diámetro y 14 m de longitud; en un terreno arena–arcilla–arena, con una carga lateral de 120 kN a nivel del terreno. El módulo también se abre con este modelo.

La carga solo llega al suelo a través del movimiento lateral

TEORÍA



Un pilote cargado lateralmente no rompe como una cimentación que se mantiene en pie: la carga pasa al terreno **solo mediante el movimiento lateral del pilote**; la reacción del terreno crece con el movimiento y deja de crecer cuando el terreno fluye. El pilote se flexiona como una viga en los primeros **diámetros** de profundidad; más abajo el terreno apenas se mueve.

Carga última (Broms): carga a la que rompe el terreno en el pilote corto y la sección en el pilote largo. Proporciona la capacidad, pero no el desplazamiento ni el momento bajo la carga de servicio.

Coeficiente de reacción elástico del terreno (Matlock–Reese, Davisson–Gill, Heténi): el suelo como muelles elásticos; solución cerrada.

Método p–y (Matlock, Reese y otros): los muelles son **no lineales**; p parte rígida respecto de y, se ablanda y termina en la resistencia última del terreno. Se resuelve numéricamente; terreno estratificado, desde la carga de servicio hasta una carga próxima a la rotura.

Ecuación, signos y condiciones de contorno

TEORÍA

El pilote es una viga y el terreno a lo largo de él, una hilera de muelles; cada muelle actúa a su propia profundidad e independientemente de los demás (Winkler). z se mide hacia abajo desde la superficie, e y es el desplazamiento en la dirección de la carga:

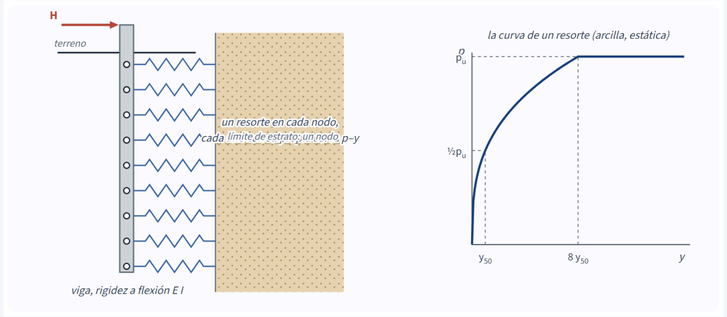
$$EI\,\frac{d^4y}{dz^4} + P\,\frac{d^2y}{dz^2} + p(y,z) = 0$$

$$\theta = \frac{dy}{dz} \qquad M = EI\frac{d^2y}{dz^2} \qquad V = EI\frac{d^3y}{dz^3} + P\theta \qquad \frac{dV}{dz} = -p$$

p es positiva cuando se opone al desplazamiento. Para una rigidez de muelle k, p = k y; **k = k_h D** (kN/m², fuerza por unidad de longitud y por unidad de desplazamiento).

Punta libre: M = 0, V = 0. **Cabeza**: si es libre, se dan H y M_g; si el giro está impedido, la pendiente es nula y el momento que lo impide forma parte de la solución.

Lo único que necesita la ecuación es la ley del terreno p(y, z): k·y constante en el caso elástico y curvas p–y en el no lineal.



Arena: $k = n_h\, z$

TEORÍA

En arena se toma el coeficiente de reacción del terreno directamente proporcional a la profundidad: **$k = n_h\, z$**. El pilote tiene una única **longitud característica**; para una carga Q y un momento M_g en la superficie del terreno, el desplazamiento y el momento son:

$$T = \left(\frac{EI}{n_h} \right)^{1/5}$$

$$y = A_y \frac{QT^3}{EI} + B_y \frac{M_g T^2}{EI} \qquad M = A_m QT + B_m M_g$$

Los coeficientes A y B dependen de Z = z/T (al lado). El pilote se considera **largo**: L/T es grande y la punta no se mueve.

El módulo reproduce estos coeficientes con su propio motor de cálculo: A_y = 2.4292.

COEFICIENTES (PILOTE LARGO)

Z	A_y	A_θ	A_m	B_y	B_θ	B_m
0	2,429	−1,619	0.000	1,619	−1,747	1,000
0.5	1,640	−1,500	0.458	0.871	−1,250	0.974
1	0.961	−1,194	0.725	0.364	−0.789	0.851
1.4	0.543	−0.891	0.770	0.112	−0.480	0.686
2	0.142	−0.462	0.627	−0.070	−0.153	0.404
3	−0.075	−0.039	0.224	−0.089	0.057	0.059

A_m es máximo en Z ≈ 1.4 (0.77).

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Pilote	**HP 250 × 85, L = 25 m, E I = 25 461 kN·m²**
Suelo	**arena, n_h = 12 000 kN/m³**
Carga	**Q en la superficie del terreno; M_g = 0, cabeza libre**
Coeficientes	$A_y = 2.4292$ **(cabeza),** $A_m = 0.772$ **(máximo)**

SE PIDE

Determinar la carga Q y el **momento máximo** para que el desplazamiento de la cabeza sea de **8 mm**. ¿Es largo el pilote?

Solución

SOLUCIÓN

1 Longitud característica y longitud del pilote

$$T = \left(\frac{25\,461}{12\,000}\right)^{1/5} = \mathbf{1.1624}\ \text{m} \qquad \frac{L}{T} = \frac{25}{1.1624} = 21.5 \ \Rightarrow\ \text{pilote largo}$$

2 Carga: $y = A_y\, Q\, T^3 / E\, I \Rightarrow Q = y\, E\, I / (A_y\, T^3)$

$$Q = \frac{0.008(25\,461)}{2.4292\,(1.1624)^3} = \mathbf{53.4}\ \text{kN}$$

3 Momento máximo: $M = A_m\, T\, Q$

$$M_{max} = 0.772\,(1.1624)(53.4) = \mathbf{47.9}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Para esta carga, el módulo da un desplazamiento en cabeza de **8.00 mm** y un momento máximo de **47.9 kN·m**: igual que con el cálculo a mano.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Arcilla: k constante (Heténi)

TEORÍA

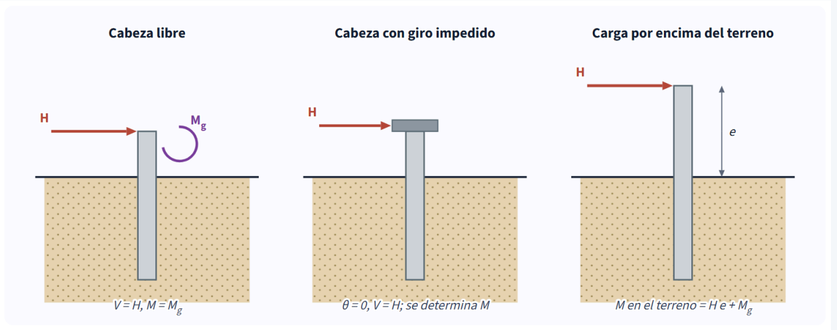
En arcilla se toma el coeficiente de reacción del terreno **constante** con la profundidad. k es la rigidez del terreno por unidad de longitud del pilote; **β = (k / 4EI)$^{1/4}$**. Soluciones cerradas de Heténi para un pilote largo, bajo una carga H en la superficie del terreno:

$$\text{cabeza libre:} \quad y_0 = \frac{2H\beta}{k} \qquad M_{max} = 0.3224\,\frac{H}{\beta} \quad \left(z = \tfrac{\pi}{4\beta}\right)$$

$$\text{cabeza empotrada:} \quad y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} \qquad M_{head} = -\frac{H}{2\beta}$$

El pilote con el giro impedido en cabeza se desplaza **la mitad** que el de cabeza libre, pero el momento de empotramiento en cabeza es **mayor** que el momento máximo del pilote libre.

El cabezal real se sitúa entre estos dos extremos; cuánto se aproxima a cada uno depende de la rigidez del cabezal y de la superestructura.



Enunciado

EJEMPLO

Datos

Pilote	**D = 0.60 m, E I = 190,852 kN·m² (pilote del ejemplo)**
Suelo	**arcilla, k_h = 15,000 kN/m³ ⇒ k = k_h D = 9,000 kN/m²**
Carga	**H = 120 kN, en la superficie del terreno**
Pilote	**largo**

SE PIDE

Hallar, con las soluciones cerradas de Hetényi, el desplazamiento en cabeza y los momentos para cabeza **libre** y **empotrada**.

Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 β

$$\beta = \left(\frac{k}{4EI}\right)^{1/4} = \left(\frac{9{,}000}{4(190{,}852)}\right)^{1/4} = \mathbf{0.3295}\ \mathrm{m}^{-1}$$

2 Cabeza libre

$$y_0 = \frac{2H\beta}{k} = \frac{2(120)(0.3295)}{9{,}000} = \mathbf{8.79}\ \mathrm{mm}$$

$$M_{max} = 0.3224\frac{H}{\beta} = 0.3224\frac{120}{0.3295} = \mathbf{117.4}\ \mathrm{kN{\cdot}m} \quad (z = \tfrac{\pi}{4\beta} = 2.38\ \mathrm{m})$$

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

3 Cabeza empotrada

$$y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} = \frac{120}{4(190{,}852)(0.3295)^3} = \mathbf{4.39}\ \text{mm}$$

$$M_{head} = -\frac{H}{2\beta} = -\frac{120}{2(0.3295)} = -\mathbf{182.1}\ \text{kN·m}$$

La cabeza restringida reduce el desplazamiento **a la mitad** (8.79 → 4.39 mm), pero el momento en cabeza (182.1 kN·m) es **1.55 veces** el momento máximo del pilote libre (117.4 kN·m). La opción elástica del módulo da los mismos números: libre 8.79 mm y 117.4 kN·m, restringido 4.39 mm y 182.1 kN·m.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

API RP 2A: Reese, Cox y Koop

TEORÍA

El suelo próximo a la superficie es empujado delante del pilote en forma de **cuña**; a mayor profundidad el suelo **fluye horizontalmente alrededor** del pilote. La resistencia última a la profundidad z (σ′: la tensión efectiva a esa profundidad) es la menor de las dos:

$$p_{us} = (C_1 z + C_2 D)\,\sigma' \qquad p_{ud} = C_3 D\,\sigma'$$

$$p = A\,p_u \tanh\left(\frac{k\,z\,y}{A\,p_u}\right) \qquad A = \max\left(0.9;\ 3 - 0.8\tfrac{z}{D}\right)\ \text{(estático)},\ A = 0.9\ \text{(cíclica)}$$

C_1, C_2, C_3 dependen únicamente de **φ′**; k, el módulo inicial, se toma según φ′ y el agua (al lado).

Para y pequeño, la curva es la recta **k z y** (el caso n_h = k de la solución elástica); para y grande, termina en **A p_u**. A vale 3.0 en la superficie y 0.9 a una profundidad de 2.6D: la resistencia estática es mayor cerca de la superficie, y no existe bajo carga cíclica.

COEFICIENTES QUE VARÍAN CON φ′

φ′	C_1	C_2	C_3	k (sobre el nivel freático)	k (bajo el nivel freático)
28°	1.60	2.41	22.5	5.4	5.4
30°	1.91	2.67	28.7	10.5	7.9
32°	2.28	2.95	36.8	20.7	11.9
34°	2.72	3.25	47.3	32.7	17.6
36°	3.24	3.59	61.2	46.3	24.8
38°	3.87	3.97	79.6	61.7	33.6
40°	4.62	4.38	104.1	78.9	44.0

k: MN/m³. Para 32°, C_1 = 2.28; C_2 = 2.95; C_3 = 36.8.

Enunciado

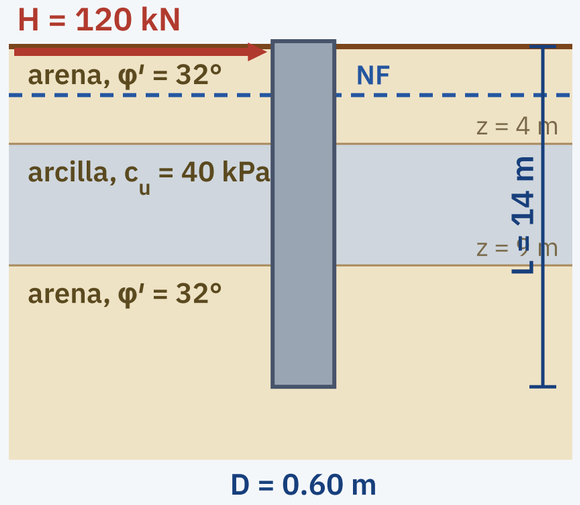
EJEMPLO

Datos

Pilote	**pilote perforado, sección circular, D = 0.60 m, L = 14 m, hormigón: E I = 190 852 kN·m²**
Suelo	**arena 0–4 m (φ′ = 32°) · arcilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · arena 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, agua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nivel freático a 2.0 m**
Profundidad	**z = 2.0 m (arena 1, nivel freático); k = 20.7 MN/m³ (sobre el nivel freático)**
Coeficientes	$K_0 = 0.4,\ K_a = \tan^2(45^\circ - \varphi'/2)$

SE PIDE

Determinar σ′, C_1, C_2, C_3, $\mathbf{p_u}$, A y los valores de **p** para y = 5 mm y 10 mm.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 Tensión efectiva y ángulos (nivel freático = 2 m: húmedo desde la superficie hasta z = 2)

$$\sigma' = 18(2) = \mathbf{36.0}\ \text{kPa} \qquad \alpha = \frac{\varphi'}{2} = 16^\circ,\ \beta = 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} = 61^\circ,\ K_a = \tan^2 29^\circ = 0.3073$$

2 Coeficientes (φ′ = 32°)

$$C_1 = \frac{K_0 \tan\varphi' \sin\beta}{\tan(\beta-\varphi')\cos\alpha} + \frac{\tan^2\beta\tan\alpha}{\tan(\beta-\varphi')} + K_0\tan\beta(\tan\varphi'\sin\beta - \tan\alpha) = \mathbf{2.281}$$

$$C_2 = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\varphi')} - K_a = \mathbf{2.947}$$

$$C_3 = K_a(\tan^8\beta - 1) + K_0\tan\varphi'\tan^4\beta = \mathbf{36.81}$$

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

3 Resistencia última: la menor entre la de la cuña y la del flujo alrededor del pilote

$$p_{us} = (2.281(2) + 2.947(0.6))(36.0) = 227.9\ \text{kN/m}$$

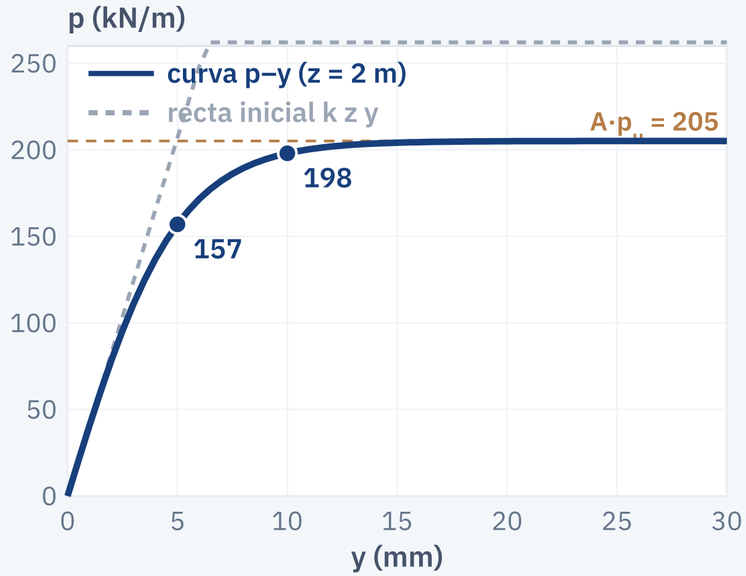
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(36.0) = 795\ \text{kN/m} \ \Rightarrow\ p_u = \mathbf{227.9}\ \text{kN/m}$$

4 A y la curva: A = max(0.9; 3 − 0.8 z/D) = max(0.9; 0.33) = 0.9; k z y / (A p_u)

$$y = 5\ \text{mm}: \ p = 0.9(227.9)\tanh\frac{20\,700(2)(0.005)}{0.9(227.9)}$$

$$= \mathbf{157.0}\ \text{kN/m}$$

$$y = 10\ \text{mm}: \ p = \mathbf{198.0}\ \text{kN/m}$$



La curva A se aproxima a p_u = 205 kN/m; a 10 mm alcanza el 97% de ese valor. A esta profundidad, la curva estática y la cíclica son **iguales** (A = 0.9 en ambas).

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Pilote	**pilote perforado, sección circular, D = 0.60 m, L = 14 m, hormigón: E I = 190 852 kN·m²**
Suelo	**arena 0–4 m (φ′ = 32°) · arcilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · arena 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, agua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nivel freático a 2.0 m**
Profundidad	**z = 0.6 m (1D), σ′ = 18(0.6) = 10.8 kPa; k = 20.7 MN/m³**
Arena 1	**C_1 = 2.281, C_2 = 2.947, C_3 = 36.81 (Ejemplo 3)**

SE PIDE

Determinar los valores estático y cíclico de **p–y** para y = 10 mm.

Solución

SOLUCIÓN

1 Resistencia última y A

$$p_{us} = (2.281(0.6) + 2.947(0.6))(10.8) = 33.9 \text{ kN/m}$$

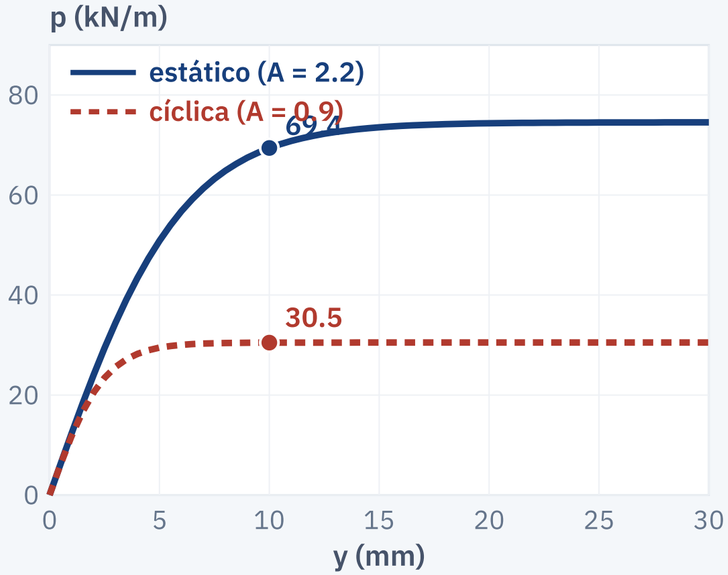
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(10.8) = 238.6 \text{ kN/m} \Rightarrow p_u = \mathbf{33.9} \text{ kN/m}$$

$$A_{static} = \max(0.9;\ 3 - 0.8(1)) = 2.2 \qquad A_{cyclic} = 0.9$$

2 y = 10 mm: k z y = 20 700(0.6)(0.010) = 124.2

$$p_{static} = 2.2(33.9)\tanh\frac{124.2}{2.2(33.9)} = \mathbf{69.4} \text{ kN/m}$$

$$p_{cyclic} = 0.9(33.9)\tanh\frac{124.2}{0.9(33.9)} = \mathbf{30.5} \text{ kN/m}$$



En la arena próxima a la superficie, la carga cíclica reduce la resistencia un **56%** (69.4 → 30.5 kN/m): pierde el multiplicador A. Por eso el desplazamiento en cabeza aumenta bajo carga cíclica.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Matlock: arcilla blanda, carga estática y cíclica

TEORÍA

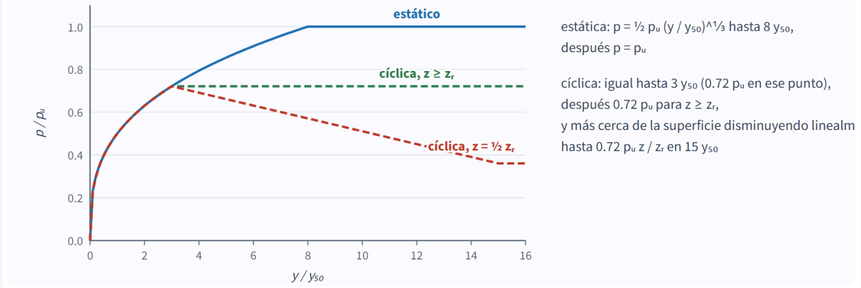
En arcilla, el módulo adopta la curva de arcilla blanda de **Matlock** (1970) en la forma dada por API RP 2A. La resistencia última es, de nuevo, el menor de los valores cerca de la superficie (cuña) y en profundidad (flujo):

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{\sigma'}{c_u} + J\frac{z}{D}\right) c_u D;\ 9 c_u D\right]$$

$$p = \tfrac{1}{2} p_u \left(\frac{y}{y_{50}}\right)^{1/3} \quad (y \le 8y_{50}) \qquad p = p_u \ (y > 8y_{50}) \qquad y_{50} = 2.5\,\varepsilon_{50} D$$

ε_{50} y J en función de c_u: por debajo de 48 kPa, blanda (0.020; 0.5); 48–96, media (0.010; 0.25); por encima de 96, firme (0.005; 0.25).

Cíclico: después de $3y_{50}$ la curva se mantiene en 0.72 p_u ($z \ge z_R$); a menor profundidad, en $15y_{50}$ **desciende linealmente** hasta 0.72 p_u z/z_R. z_R = max[6D / ((σ′/z)(D/c_u) + J); 2.5D].



estática: p = ½ p_u (y / y_{50})^⅓ hasta 8 y_{50}, después p = p_u

cíclica: igual hasta 3 y_{50} (0.72 p_u en ese punto), después 0.72 p_u para z ≥ z_r, y más cerca de la superficie disminuyendo linealm hasta 0.72 p_u z / z_r en 15 y_{50}

Enunciado

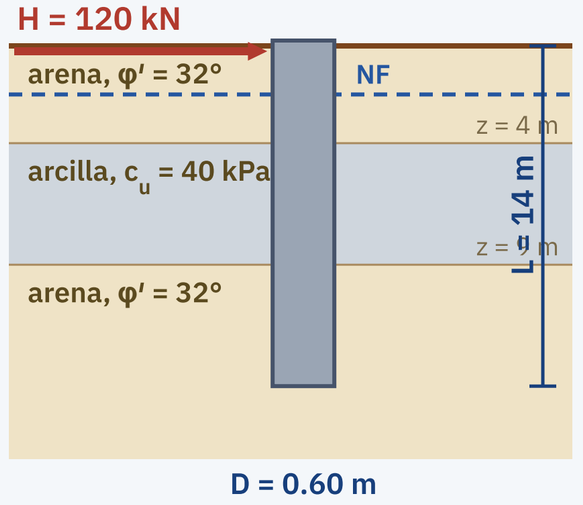
EJEMPLO

Datos

Pilote	**pilote perforado, sección circular, D = 0.60 m, L = 14 m, hormigón: E I = 190 852 kN·m²**
Suelo	**arena 0–4 m (φ′ = 32°) · arcilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · arena 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, agua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nivel freático a 2.0 m**
Profundidad	**z = 6.5 m (arcilla, 4–9 m); ε_{50} = 0.020, J = 0.5**
Estrato	**c_u = 40 kPa**

SE PIDE

Determinar σ′, **p_u**, y_{50} y los valores p–y **estáticos** para y = 15 mm y 150 mm; determinar z_R y el valor de la meseta de la curva **cíclica**.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 σ′: arena 0–2 m húmeda (γ = 18), arena 2–4 m y arcilla 4–6.5 m sumergidas (γ_{sat} = 19)

$$\sigma' = 18(2) + (19 - 9.81)(2) + (19 - 9.81)(2.5) = \mathbf{77.4}\ \text{kPa}$$

2 Resistencia última y y_{50}

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{77.4}{40} + 0.5\frac{6.5}{0.6}\right)(40)(0.6);\ 9(40)(0.6)\right]$$

$$= \min[248.4;\ 216.0] = \mathbf{216.0}\ \text{kN/m}$$

$$y_{50} = 2.5(0.020)(0.6) = \mathbf{30.0}\ \text{mm}$$

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

3 Curva estática: $p = \frac{1}{2}\, p_u\, (y/y_{50})^{1/3}$

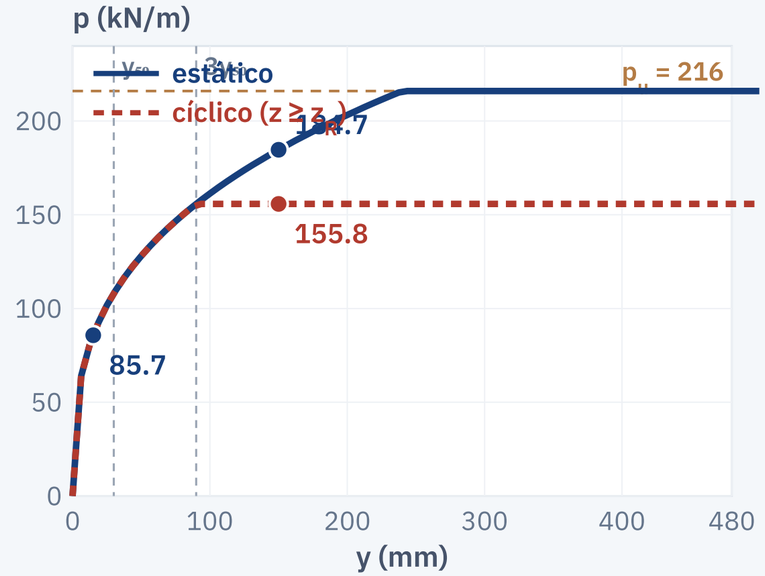
$$y = 15\ \text{mm}\ (0.5y_{50}):\ \ p = 0.5(216.0)(0.5)^{1/3} = \mathbf{85.7}\ \text{kN/m}$$

$$y = 150\ \text{mm}\ (5y_{50}):\ \ p = 0.5(216.0)(5)^{1/3} = \mathbf{184.7}\ \text{kN/m}$$

4 Curva cíclica: $z_R = \max[6(0.6)/((\sigma'/z)(D/c_u) + J);\ 2.5D] = \max[5.31;\ 1.5] = 5.31$ m; $z = 6.5 > z_R$

$$p_{perimeter}(y \geq 3y_{50}) = 0.72\, p_u = 0.7211(216.0) = \mathbf{155.8}\ \text{kN/m}$$

Para y = 150 mm, la resistencia estática es 184.7 y la cíclica 155.8 kN/m: la carga cíclica reduce la resistencia en esta arcilla un **16%**; hasta $3y_{50}$ (90 mm) las dos curvas son idénticas.



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Cada curva corresponde al suelo de su propia profundidad

TEORÍA

σ′ es la suma de los pesos específicos de los estratos superiores (γ por encima del nivel freático, $\gamma_{sat} - \gamma_W$ por debajo); **no es el promedio** del estrato, sino que crece con la profundidad dentro del estrato.

El estrato situado a la profundidad z aporta φ′ y k (arena) o c_u, ε_{50} y J (arcilla). El módulo inicial k de la arena se toma según la posición del estrato respecto al agua; en un estrato atravesado por el nivel freático se rellena según la profundidad media del estrato y puede modificarse manualmente.

Los elementos **no atraviesan ningún límite de estrato**: hay un nodo en cada límite; la rigidez del terreno varía bruscamente entre elementos, no dentro de un elemento.

La página de cálculo da, paso a paso, los valores de la curva en el centro de cada estrato: σ′, coeficientes, p_u, A o y_{50} — reproducibles a mano (como en los Ejemplos 3 y 5 de esta presentación).

Los estratos deben extenderse hasta la punta del pilote; el terreno situado bajo la punta no está definido y la punta es libre. Una arcilla blanda sobre una arena densa aparece en los diagramas como un **quiebro** en el límite entre estratos.

Elementos finitos y Newton

TEORÍA

La ecuación se resuelve por elementos finitos: el pilote se divide en **elementos de viga cúbicos**, con y y el giro θ en cada nudo. La reacción del terreno se toma de la curva en **cuatro puntos de Gauss** de cada elemento y se integra. La ecuación no lineal K u + f(u) = F se resuelve por el método de Newton:

$$(K + K_s(u_i))\,\Delta u = F - K u_i - f(u_i) \qquad K_s = \int N^T \frac{dp}{dy} N \, dz$$

dp/dy no desciende por debajo de **una vigésima parte** de la rigidez secante: la matriz sigue siendo positiva incluso en los tramos planos o descendentes de la curva. Se dispone de una búsqueda lineal con reducción de paso y, si esta falla, de un paso secante amortiguado.

Longitud del elemento D/6 (3–15 cm); el resultado **no depende** de la malla hasta los pasos mostrados (elemento 0.4 → 0.025 m: desplazamiento en cabeza 6.228 → 6.228 mm).

Si la carga supera lo que el terreno puede soportar, **no hay equilibrio**; el módulo lo indica y no da cifras. Tampoco se considera solución si el terreno se ha desplazado más de **cinco anchos de pilote** por debajo de la superficie.

La curva de arcilla cíclica, o la respuesta ante carga axial, no es una única curva creciente; asciende hasta la **carga límite**. El módulo alcanza la carga mediante pasos desde cero.

En cada estudio se escriben dos comprobaciones: Σ p Δz = H y momento en la punta = 0 (estática).

Efecto P–δ y pandeo

TEORÍA

La carga axial P actúa a lo largo de la **deformada** del pilote: aparece en la ecuación (término P d²y/dz²) y en la rigidez geométrica de cada elemento; reduce la rigidez lateral de la viga sometida a compresión y aumenta el desplazamiento y el momento. El módulo toma P constante en toda la longitud e igual en la cabeza y en la punta (en realidad, la fricción por el fuste transmite la carga al terreno; suponerla constante queda del lado de la seguridad).

$$P_{cr} = \sqrt{k\,EI} \qquad (\text{cabeza libre, } k \text{ constante, pilote largo})$$

Es la **mitad** del valor 2√(kEI) de la viga infinita: un extremo libre puede girar. Una cabeza empotrada pandea con una carga mayor.

Cuando P se aproxima a la carga de pandeo, la relación carga–desplazamiento crece sin límite; el módulo indica **«la carga axial supera la carga de pandeo»**.

La resistencia combinada de la sección del pilote a carga axial y a momento es una comprobación de diseño estructural.

PILOTE DE EJEMPLO

Para E I = 190,852 kN·m² y k = 9,000 kN/m² en arcilla elástica:

$$P_{cr} = \sqrt{9{,}000\,(190{,}852)} = 41{,}445\ \text{kN}$$

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Pilote	**pilote perforado, sección circular, D = 0.60 m, L = 14 m, hormigón: E I = 190 852 kN·m²**
Suelo	**arena 0–4 m (φ′ = 32°) · arcilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · arena 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, agua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nivel freático a 2.0 m**
Cargas	**H = 120 kN; carga axial P = 800 kN (constante)**
Pandeo	**k = k_h D = 9,000 kN/m² (arcilla elástica), cabeza libre**
Módulo	**P = 0: cabeza 6.23 mm, M_{max} 151.8 kN·m**

SE PIDE

¿Está P = 800 kN **cerca** de la carga de pandeo? ¿Qué magnitud tiene el efecto P–δ?

Solución

SOLUCIÓN

1 Carga de pandeo (cabeza libre, k constante)

$$P_{cr} = \sqrt{kEI} = \sqrt{9{,}000(190{,}852)} = \mathbf{41{,}445}\ \text{kN} \qquad \frac{P}{P_{cr}} = \frac{800}{41{,}445} = \mathbf{0.019}$$

2 En el módulo con P = 800 kN (incluido P–δ)

$$y_{head}:\ 6.23 \rightarrow 6.32\ \text{mm}\ \ (+2\%) \qquad M_{max}:\ 151.8 \rightarrow 154.5\ \text{kN·m}\ \ (+2\%)$$

800 kN es solo el **2 %** de la carga de pandeo: la carga axial no acerca el pilote al pandeo; el efecto P–δ aumenta el desplazamiento en un 2 % y el momento en un 2 %. En este pilote, la carga axial es secundaria en el análisis lateral, pero no puede despreciarse.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Libre, empotrado y sobrecarga sobre el terreno

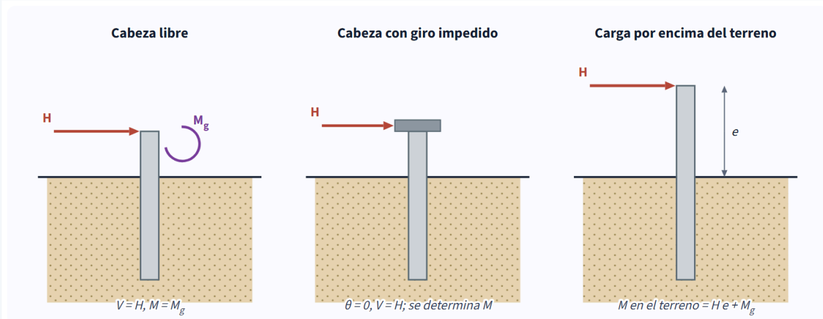
TEORÍA

Cabeza libre: en el punto de carga V = H y M = M_g.

Cabeza empotrada: el giro es nulo y la cabeza se desplaza lateralmente. En un pilote largo en terreno elástico y uniforme se desplaza **la mitad** que en el caso de cabeza libre; el momento de coacción M = −H/(2β) es mayor que el momento máximo del pilote libre. El cabezal real se sitúa entre ambos casos.

Longitud libre e: el pilote situado sobre el terreno se flexiona como una ménsula en voladizo. El esfuerzo cortante vale H hasta el terreno y el momento alcanza **M(0) = M_g + H e** en la superficie del terreno; allí interviene el terreno.

Desplazamiento en cabeza = desplazamiento en la superficie del terreno + giro en la superficie × e + desplazamiento en voladizo de la longitud libre (H e^3 / 3EI). La misma carga, con longitud libre, hace que el desplazamiento en cabeza sea **mucho mayor** que el de la superficie del terreno; el momento máximo suele estar en el terreno o ligeramente por debajo.



Enunciado

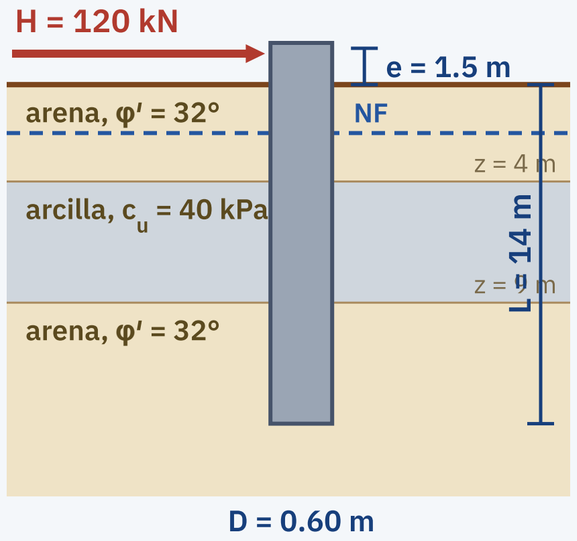
EJEMPLO

Datos

Pilote	**pilote perforado, sección circular, D = 0.60 m, L = 14 m, hormigón: E I = 190 852 kN·m²**
Suelo	**arena 0–4 m (φ′ = 32°) · arcilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · arena 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, agua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nivel freático a 2.0 m**
Longitud libre	**carga a e = 1.5 m sobre el terreno; H = 120 kN, cabeza libre**
Módulo (en la superficie del terreno)	**y_{suelo} = 11.12 mm, pendiente = 0.321° (hacia la carga)**

SE PIDE

Determinar el **momento** y el **desplazamiento en cabeza** en la superficie del terreno; comparar el resultado con los 20.23 mm del módulo.



Solución

SOLUCIÓN

1 Momento en la superficie del terreno (cortante H en la longitud libre, $M_g = 0$)

$$M(0) = M_g + H\,e = 0 + 120(1.5) = \mathbf{180}\ \mathrm{kN\cdot m}$$

2 Desplazamiento en voladizo del tramo libre

$$\frac{H\,e^3}{3EI} = \frac{120(1.5)^3}{3(190{,}852)} = 0.71\ \mathrm{mm}$$

3 Desplazamiento de la cabeza = $y_{suelo} + |\theta|\,e + H\,e^3/3EI$

$$y_{head} = 11.12 + 5.605(1.5) + 0.71 = \mathbf{20.23}\ \mathrm{mm}$$

A mano **20.23 mm**, en el módulo 20.23 mm: coinciden. Con la carga a nivel del terreno la cabeza se desplazaba 6.23 mm; con 1.5 m de longitud libre resulta **3.2 veces** ese valor. El momento máximo es 306 kN·m, a 1.68 m por debajo de la superficie del terreno (superior a los 180 kN·m en la superficie del terreno).

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

¿Qué indica cada número?

TEORÍA

Desplazamiento en cabeza (y) y giro (pendiente dy/dz; negativo en un pilote que se inclina en el sentido de la carga). Si hay longitud libre, también se da el valor en la superficie del terreno.

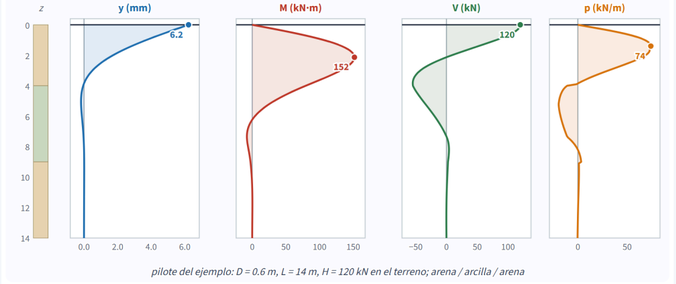
Momento flector máximo y su profundidad. Con cabeza empotrada también se indica el momento en cabeza; no siempre es el mayor.

Profundidad de desplazamiento nulo: punto en el que el pilote corta su propio eje; por encima de él se mueve hacia el terreno y por debajo se aleja del terreno.

Fuerza cortante y reacción del terreno; se dibujan juntos la reacción y el extremo de la curva p–y: se aprecia lo cerca que está el terreno de su límite.

Punta: en la punta de un pilote suficientemente largo no hay desplazamiento. Si la punta se mueve más de una décima parte del desplazamiento en la superficie del terreno y más de 2 mm, el pilote es **corto** para esta carga: gira como un cuerpo rígido y su longitud determina el resultado.

La vista p–y representa las curvas a cinco profundidades en la parte móvil y traza en cada una el **punto alcanzado**: el punto situado en el tramo inicial recto de la curva es elástico; el punto próximo a su extremo está en el límite.



pilote del ejemplo: D = 0.6 m, L = 14 m, H = 120 kN en el terreno; arena / arcilla / arena

Enunciado

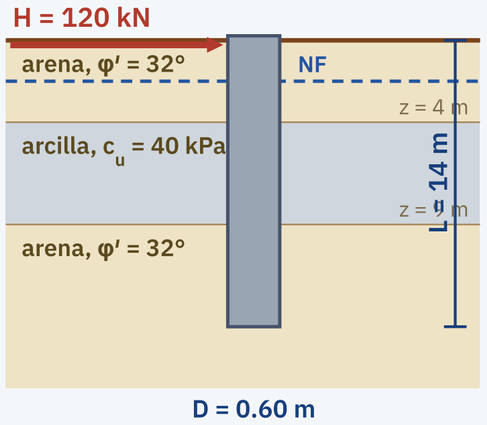
EJEMPLO

Datos

Pilote	**pilote perforado, sección circular, D = 0.60 m, L = 14 m, hormigón: E I = 190 852 kN·m²**
Suelo	**arena 0–4 m (φ′ = 32°) · arcilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · arena 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, agua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nivel freático a 2.0 m**
Resultados del módulo	**cabeza y = 6.23 mm, giro 0.150°; M_{max} = 151.8 kN·m (z = 2.13 m); desplazamiento nulo en z = 3.85 m; punta 0.0019 mm**
Reacción máxima del terreno	**p = 74.0 kN/m, z = 1.40 m; A = max(0.9; 3 − 0.8(1.4)/0.6), p_u = 125.0 kN/m**

SE PIDE

¿Es **largo** el pilote para esta carga? ¿A qué **porcentaje** de su límite trabaja el terreno a 1.40 m de profundidad? Interpretar las comprobaciones estáticas.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

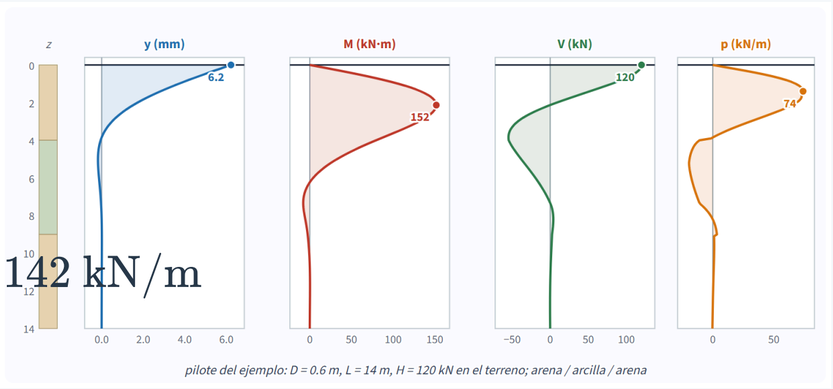
1 Condición de extremo: el movimiento de la punta se compara con la décima parte del desplazamiento en la superficie del terreno y con 2 mm

$$y_{tip} = 0.0019\ \text{mm} \ll 0.1(6.23) = 0.62\ \text{mm} \ \Rightarrow\ \text{pilote largo}$$

2 A 1.40 m, ¿qué proporción de su límite alcanza el suelo?

$$A = \max\left(0.9;\ 3 - \frac{0.8(1.4)}{0.6}\right) = 1.133\ ; \quad A\,p_u = 1.133(125.0) = 142\ \text{kN/m}$$

$$\frac{p}{Ap_u} = \frac{74.0}{142} = \mathbf{0.52}$$



pilote del ejemplo: D = 0.6 m, L = 14 m, H = 120 kN en el terreno; arena / arcilla / arena

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

3 Comprobaciones estáticas

$$\sum p\,\Delta z = 120.000\ \text{kN} = H \qquad M_{tip}\ (\text{del caso estático}) = 0.000\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad 7\ \text{iteración}$$

El pilote es **largo**; a 1.40 m el suelo trabaja al **52 %** de su límite (no al final de la curva). Las dos comprobaciones también se cumplen: son comprobaciones de la iteración y de la contabilización, **no de la exactitud del modelo**.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Carga correspondiente al valor admisible

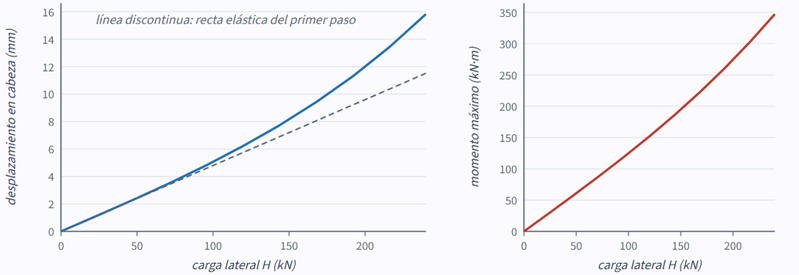
TEORÍA

Dado que el terreno no es lineal, el desplazamiento no es proporcional a la carga; la **carga correspondiente al desplazamiento admisible** no puede leerse del resultado obtenido con la carga de servicio. El módulo aumenta la carga y el momento de forma proporcional desde el principio (un factor λ aplicado a H y M_g, con la carga axial constante), vuelve a resolver la ecuación en cada paso y halla el valor de λ para el que el desplazamiento en cabeza alcanza el admisible (o el momento máximo alcanza la capacidad de la sección): **H_y** o **H_M**.

Si el terreno no puede soportar el valor admisible (si no hay equilibrio antes de alcanzarlo), el módulo indica **«no alcanzado»** y la curva termina en la última carga resuelta. En arcilla con carga cíclica o con carga axial la curva se inflexiona: esta es la **carga límite del terreno**.

Esta no es la capacidad del pilote: en el módulo el pilote es elástico; un pilote que plastifica a flexión puede romper antes que el terreno. La capacidad de momento introducida es la comprobación de esto.

El módulo no da factor de seguridad ni lo toma de una norma: el desplazamiento admisible y la capacidad a momento corresponden al ingeniero.



Enunciado

EJEMPLO

Datos

Pilote	**pilote perforado, sección circular, D = 0.60 m, L = 14 m, hormigón: E I = 190 852 kN·m²**
Suelo	**arena 0–4 m (φ′ = 32°) · arcilla 4–9 m (c_u = 40 kPa) · arena 9–17 m (φ′ = 32°)**
Peso específico, agua	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; nivel freático a 2.0 m**
Solución no lineal	**Desplazamiento en cabeza para H = 30, 60, …, 270 kN: 1.44 · 2.93 · 4.51 · 6.23 · 8.15 · 10.33 · 12.86 · 15.82 · 19.29 mm**
Admisible	**y_{all} = 10 mm; momento resistente M_{cap} = 200 kN·m**

SE PIDE

H_y es la carga para y_{all} = 10 mm y H_M la correspondiente a M_{cap}; ¿cuál sería el error si se utilizara una proporcionalidad lineal?

Solución

SOLUCIÓN

1 Proporción lineal (a partir de 6.23 mm bajo la carga de servicio) y solución exacta

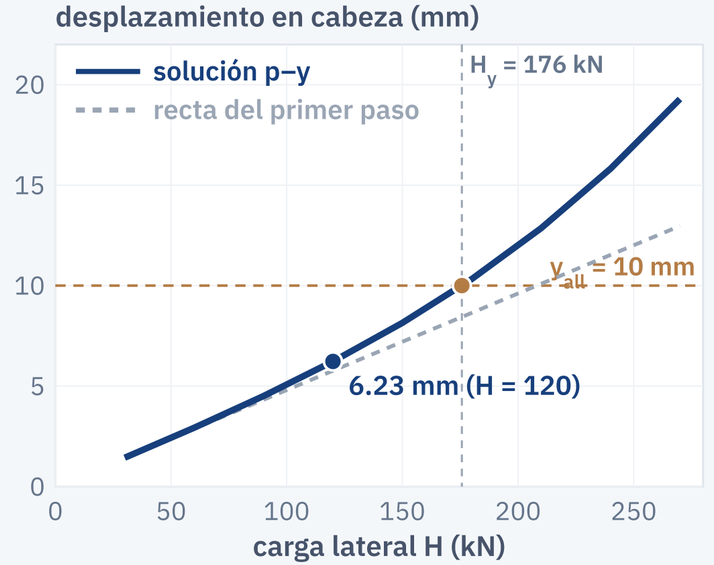
$$H_{y,linear} = 120\,\frac{10}{6.23} = 192.7\ \text{kN}$$

$$H_y = \mathbf{175.7}\ \text{kN}\ (\lambda = 1.464)$$

2 Carga correspondiente al momento resistente

$$H_M = \mathbf{153.6}\ \text{kN}\ \ (\lambda = 1.280;\ y_{head} = 8.39\ \text{mm})$$

La proporcionalidad lineal daría una carga **un 10% mayor** (193 ≠ 176 kN): a medida que el terreno se ablanda, el desplazamiento crece más rápido que la carga. Lo **determinante** es el momento: H_M = 154 kN, con la que la cabeza se desplaza solo 8.4 mm; con la carga correspondiente al desplazamiento admisible (H_y = 176 kN) el momento sería de 234 kN·m.



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Pilote	**pilote perforado, sección circular, D = 0.60 m, L = 14 m, hormigón: E I = 190 852 kN·m²**
Suelo	**arena 0–4 m ($\varphi' = 32°$) · arcilla 4–9 m ($c_u = 40$ kPa) · arena 9–17 m ($\varphi' = 32°$)**
Peso específico, agua	**$\gamma = 18$, $\gamma_{sat} = 19$ kN/m³; nivel freático a 2.0 m**
A comparar	**condición de cabeza · longitud libre · carga cíclica · carga axial (800 kN) · sección fisurada (E I × 0.6) · suelo elástico ($n_h = 8$ MN/m³, $k_h = 15$ MN/m³)**

SE PIDE

Comparar en cada caso el desplazamiento de la cabeza y el momento máximo con respecto a la carga de trabajo.

Solución

SOLUCIÓN

Situación	y_{cab} (mm)	M_{max} (kN·m)	y / y_0	M / M_0
Tal como se introdujo: libre, estático, a nivel del terreno	6.23	152	1.00	1.00
Giro impedido en la cabeza (M_{cab})	2.24	-175	0.36	1.15
La carga está 1.5 m sobre el terreno	20.23	306	3.25	2.01
Carga cíclica (API)	7.28	172	1.17	1.13
Carga axial P = 800 kN	6.32	155	1.02	1.02
Sección fisurada, E I × 0.6	7.93	140	1.27	0.92
Suelo elástico (n_h, k_h)	10.49	173	1.68	1.14

La condición de cabeza reduce el desplazamiento multiplicándolo por 0.36 y aumenta el momento; **la longitud libre** es la que más influye (×3.2 en el desplazamiento, ×2.0 en el momento). **La carga cíclica** aumenta el desplazamiento un 17% y **la sección fisurada** un 27%, pero reducen el momento (el pilote es más flexible). El terreno elástico es un caso distinto: no es una comprobación de las curvas p–y.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Las hipótesis detrás de los números

TEORÍA

Pilote aislado: un pilote que está solo, sin vecinos, con sus curvas p–y. Un grupo cargado lateralmente se desplaza más que un pilote aislado bajo la misma carga por pilote; el grupo, con los multiplicadores p de las filas, es el objeto del módulo de grupo de pilotes.

Pilote: sección única en toda la longitud, elástica lineal; E I constante. Una sección de hormigón fisurada se representa mediante el multiplicador de E I y el momento M_{cap} al que la sección plastifica.

Terreno: resortes independientes, sin cortante entre ellos; las curvas proceden de ensayos realizados en terrenos concretos: la arena depende de φ', la arcilla de c_u y ε_{50}. Describe la arena y la arcilla blanda a media; la arcilla rígida, la roca meteorizada, el terreno cementado y la arena licuable se describen con sus propias curvas.

Carga: estática o cíclica con reducción API; se aplica en la cabeza. La **carga axial** es constante en toda la longitud.

Solución numérica: los elementos finitos y la iteración no lineal son exactos para la ecuación dada hasta las cifras mostradas; la aproximación está en la ecuación (el terreno se representa mediante resortes). Con dos programas independientes (diferencias finitas, en otro lenguaje) ha coincidido dentro del 0.01% en 14 pilotes.

El método p–y es en la práctica la base del diseño de pilotes cargados lateralmente; los valores deben compararse con los valores admisibles del proyecto y, si existe, con el **ensayo de carga**.

Resumen

Puntos clave

El pilote es una **viga sobre resortes no lineales**: $EI\,y'''' + P\,y'' + p(y, z) = 0$; la ley del terreno es la curva p–y

Elástico: arena $n_h z \rightarrow T = (EI/n_h)^{1/5}$; arcilla $k \rightarrow \beta = (k/4EI)^{1/4}$, $y_0 = 2H\beta/k$, $M_{max} = 0.3224\ H/\beta$

Arena: $p = A\,p_u \tanh(kzy/Ap_u)$, $p_u = \min[(C_1 z + C_2 D)\sigma'; C_3 D\sigma']$ · **Arcilla**: $p = \frac{1}{2} p_u (y/y_{50})^{1/3}$, $p_u = \min[(3 + \sigma'/c_u + Jz/D)c_u D; 9c_u D]$

La carga **cíclica** reduce la resistencia cerca de la superficie: $A = 0.9$ en arena, $0.72p_u$ en arcilla más allá de $3y_{50}$

La **condición en cabeza**, la **longitud libre**, la **carga axial** y la **sección fisurada** modifican el resultado de forma notable; la longitud libre, sobre todo

El desplazamiento no es proporcional a la carga: la **carga correspondiente al desplazamiento admisible** se obtiene resolviendo de nuevo (H_y, H_M)

Referencias bibliográficas

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning, Boston.

Matlock, H. and Reese, L.C. (1960). Generalized solutions for laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 86(SM5), 63–91.

Matlock, H. (1970). Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay. Proceedings of the 2nd Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 1204, 577–594.

Reese, L.C., Cox, W.R. and Koop, F.D. (1974). Analysis of laterally loaded piles in sand. Proceedings of the 6th Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 2080, 473–485.

American Petroleum Institute (2000). Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms — Working Stress Design, API RP 2A-WSD, 21st ed.

Hetényi, M. (1946). Beams on Elastic Foundation. University of Michigan Press, Ann Arbor.

Reese, L.C., Isenhower, W.M. and Wang, S.-T. (2006). Analysis and Design of Shallow and Deep Foundations. John Wiley & Sons, Hoboken.

Broms, B.B. (1965). Design of laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 91(SM3), 79–99.

Reese, L.C. and Welch, R.C. (1975). Lateral loading of deep foundations in stiff clay. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 101(GT7), 633–649.

Davisson, M.T. and Gill, H.L. (1963). Laterally loaded piles in a layered soil system. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 89(SM3), 63–94.

NOTA

Las figuras de esta presentación proceden de la página de teoría de GeoTerva; todos los ejemplos numéricos se han obtenido con el propio motor de cálculo del módulo y el módulo da los mismos valores.

GeoTerva

Cálculos geotécnicos en línea

De la teoría a la práctica

Calcular paso a paso en GeoTerva el pilote de ejemplo de esta presentación: los números son los mismos.

Abrir el módulo →

Página de teoría →

Abrir en el teléfono
Los módulos de prueba no requieren registro.

Si desea utilizarlas en sus clases: info@geoterva.com