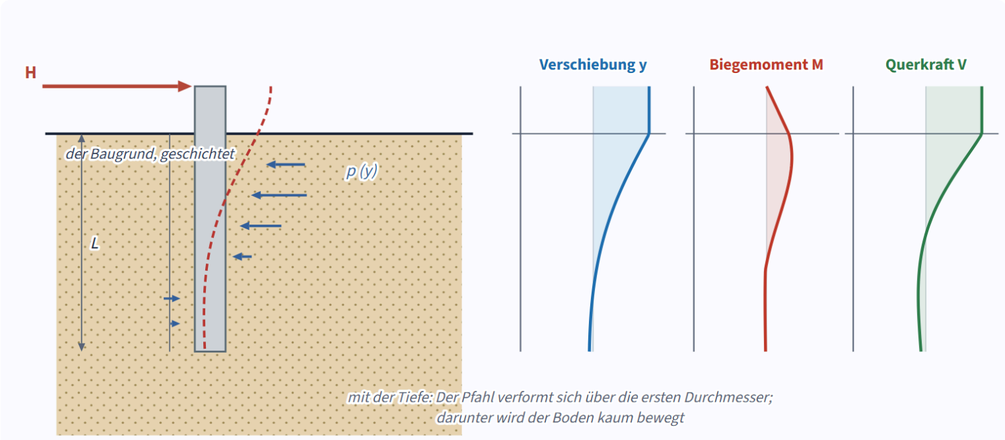
Geotechnische Vorlesung · Pfähle

Seitlich belasteter Pfahl: p–y-Verfahren

Vorlesung: Berechnung des seitlich belasteten Pfahls als Balken auf Federn, p–y-Kurven für Sand und Ton, zyklische Belastung, Axiallast und Kopfrandbedingungen; zu jedem Thema ein Rechenbeispiel.

- Balken auf Federn
- p–y-Kurven für Sand und Ton
- Zyklische Belastung
- Anfangsbedingungen
- Rechenbeispiele



Was lernen wir in dieser Vorlesung?

Wie man einen seitlich belasteten Pfahl als **Balken auf Federn** ansetzt: Gleichung, Vorzeichenkonventionen, Randbedingungen

Elastische Lösungen (Matlock–Reese: Sand, n_h; Hetényi: Ton, k) von Hand zu berechnen

Sand: p–y-Kurven nach API (Reese–Cox–Koop) und **Ton**: p–y-Kurven nach Matlock, statisch und zyklisch, Punkt für Punkt zu konstruieren

Zu wissen, **was die numerische Lösung (finite Elemente, Newton) tut**, und wie die Ergebnisse zu lesen sind

Die Wirkung der **Axiallast** (P–δ), der **Kopfbedingung** und der **freien Länge** zu interpretieren

Die **Last** zu ermitteln, die einer zulässigen Verschiebung oder der Momentenkapazität entspricht

VORLESUNGSABLAUF

Jedes Thema wird in **drei Schritten** behandelt:

1 · **Theorie**: Wie lautet die Regel, warum ist sie so?

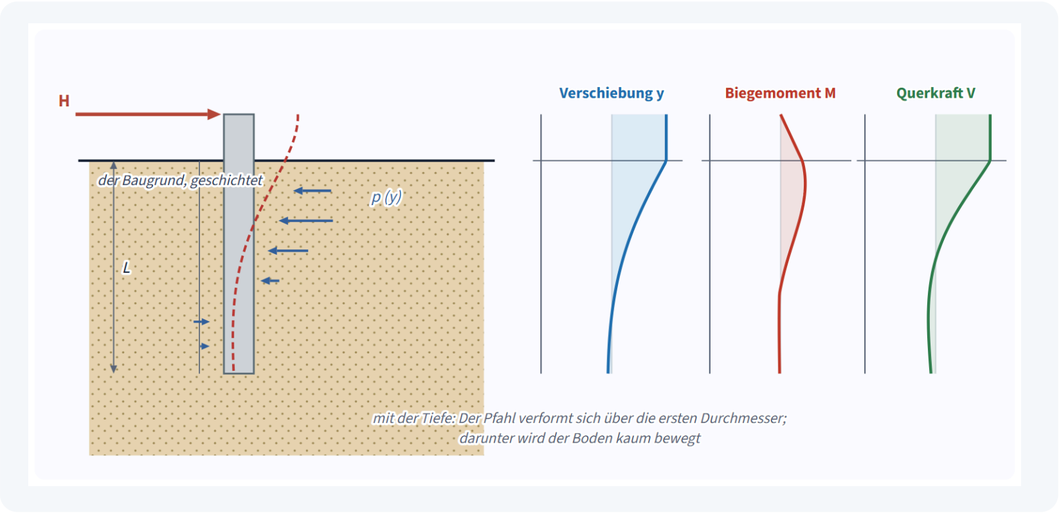
2 · **Aufgabe**: Gegeben und Gesucht

3 · **Lösung**: Schritt für Schritt, mit Zahlen

Beispielpfahl: Betonpfahl mit 0.60 m Durchmesser und 14 m Länge; im Baugrund Sand–Ton–Sand eine Horizontallast von 120 kN in Geländeoberkante. Das Modul wird ebenfalls mit diesem Modell geöffnet.

Die Last erreicht den Boden nur über seitliche Bewegung

THEORIE



Ein horizontal belasteter Pfahl versagt nicht wie ein stehendes Fundament: Die Last wird **allein durch die seitliche Bewegung des Pfahls** in den Boden übertragen; die Bodenreaktion wächst mit der Bewegung und wächst nicht weiter, wenn der Boden nachgibt. Der Pfahl biegt sich wie ein Balken über die ersten **wenigen Durchmesser** des Bodens; in größerer Tiefe bewegt sich der Boden kaum.

Grenzlast (Broms): die Last, bei der bei einem kurzen Pfahl der Boden und bei einem langen Pfahl der Querschnitt versagt. Sie liefert die Tragfähigkeit, jedoch nicht die Verschiebung und das Moment bei der Gebrauchslast.

Elastischer Bettungsmodul (Matlock–Reese, Davisson–Gill, Hetényi): Boden als elastische Federn; geschlossene Lösung.

p–y-Verfahren (Matlock, Reese et al.): Die Federn sind **nichtlinear**; p beginnt steif gegenüber y, erweicht und endet beim Grenzwiderstand des Bodens. Es wird numerisch gelöst; geschichteter Boden, von der Gebrauchslast bis zur lastnahen Bruchlast.

Gleichung, Vorzeichen und Randbedingungen

THEORIE

Ein Pfahl ist ein Balken, der Baugrund entlang ihm eine Reihe von Federn; jede Feder wirkt in ihrer eigenen Tiefe und unabhängig von den übrigen (Winkler). z nach unten von der Geländeoberfläche, y die Verschiebung in Richtung der Last:

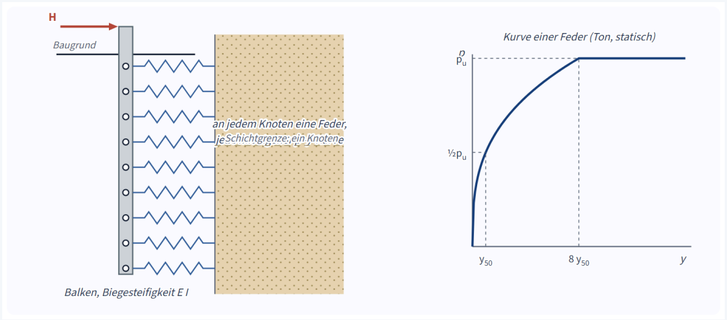
$$EI\,\frac{d^4y}{dz^4} + P\,\frac{d^2y}{dz^2} + p(y,z) = 0$$

$$\theta = \frac{dy}{dz} \qquad M = EI\frac{d^2y}{dz^2} \qquad V = EI\frac{d^3y}{dz^3} + P\theta \qquad \frac{dV}{dz} = -p$$

p ist positiv, wenn es der Verschiebung entgegenwirkt. Für die Federsteifigkeit k gilt p = k y; **k = k_h D** (kN/m², Kraft je Längeneinheit und Einheitsverschiebung).

Freie Spitze: M = 0, V = 0. **Kopf**: Ist er frei, werden H und M_g vorgegeben; ist er gegen Verdrehung festgehalten, so ist die Neigung null, und das rückhaltende Moment ist Teil der Lösung.

Die Gleichung benötigt nur das Bodenstoffgesetz p(y, z): im elastischen Fall konstant k·y, im nichtlinearen Fall p–y-Kurven.



Sand: $k = n_h z$

THEORIE

In Sand wird der Bettungsmodul direkt proportional zur Tiefe angesetzt: **$k = n_h z$**. Der Pfahl hat eine einzige **charakteristische Länge**; für die Last Q und das Moment M_g an der Geländeoberfläche ergeben sich Verschiebung und Moment:

$$T = \left(\frac{EI}{n_h} \right)^{1/5}$$

$$y = A_y \frac{QT^3}{EI} + B_y \frac{M_g T^2}{EI} \qquad M = A_m QT + B_m M_g$$

Die Beiwerte A und B hängen von Z = z/T ab (nebenstehend). Der Pfahl gilt als **lang**: L/T ist groß, der Pfahlfuß verschiebt sich nicht.

Das Modul erzeugt diese Beiwerte mit seiner eigenen Berechnungsengine neu: A_y = 2.4292.

BEIWERTE (LANGER PFAHL)

Z	A_y	A_θ	A_m	B_y	B_θ	B_m
0	2,429	−1,619	0.000	1,619	−1,747	1,000
0.5	1,640	−1,500	0.458	0.871	−1,250	0.974
1	0.961	−1,194	0.725	0.364	−0.789	0.851
1.4	0.543	−0.891	0.770	0.112	−0.480	0.686
2	0.142	−0.462	0.627	−0.070	−0.153	0.404
3	−0.075	−0.039	0.224	−0.089	0.057	0.059

A_m ist am größten bei Z ≈ 1.4 (0.77).

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Pfahl	**HP 250 × 85, L = 25 m, E I = 25 461 kN·m²**
Baugrund	**Sand, n_h = 12 000 kN/m³**
Last	**Q an der Geländeoberfläche; M_g = 0, freier Kopf**
Beiwerte	$A_y = 2.4292$ **(Kopf),** $A_m = 0.772$ **(Maximum)**

GESUCHT

Es sind die Last Q und **das maximale Moment** zu ermitteln, sodass die Kopfverschiebung **8 mm** beträgt. Ist der Pfahl lang?

Lösung

LÖSUNG

1 Charakteristische Länge und Pfahllänge

$$T = \left(\frac{25\,461}{12\,000}\right)^{1/5} = \mathbf{1.1624}\ \mathrm{m} \qquad \frac{L}{T} = \frac{25}{1.1624} = 21.5 \ \Rightarrow\ \text{langer Pfahl}$$

2 Last: $y = A_y\, Q\, T^3 / E\, I \Rightarrow Q = y\, E\, I / (A_y\, T^3)$

$$Q = \frac{0.008(25\,461)}{2.4292\,(1.1624)^3} = \mathbf{53.4}\ \mathrm{kN}$$

3 Größtes Moment: $M = A_m\, T\, Q$

$$M_{max} = 0.772\,(1.1624)(53.4) = \mathbf{47.9}\ \mathrm{kN{\cdot}m}$$

Bei dieser Last liefert das Modul eine Kopfverschiebung von **8.00 mm** und ein maximales Moment von **47.9 kN·m**: identisch mit der Handrechnung.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Ton: k konstant (Hetényi)

THEORIE

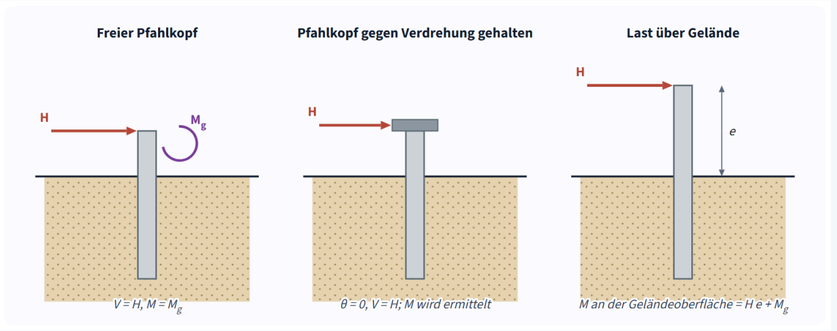
In Ton wird der Bettungsmodul über die Tiefe **konstant** angenommen. k ist die Bodensteifigkeit je Längeneinheit des Pfahls; **β = (k / 4EI)$^{1/4}$**. Für den langen Pfahl gelten die geschlossenen Lösungen nach Hetényi unter einer Last H an der Geländeoberfläche:

$$\text{freies Ende:}\quad y_0 = \frac{2H\beta}{k} \qquad M_{max} = 0.3224\,\frac{H}{\beta}\quad \left(z = \tfrac{\pi}{4\beta}\right)$$

$$\text{eingespantes Ende:}\quad y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} \qquad M_{head} = -\frac{H}{2\beta}$$

Ein am Kopf gegen Verdrehung eingespanntter Pfahl verschiebt sich um **die Hälfte** des freien Pfahls; das Einspannmoment am Kopf ist jedoch **größer** als das maximale Moment des freien Pfahls.

Das tatsächliche Verhalten der Pfahlkopfplatte liegt zwischen diesen beiden Extremen; wie nahe es einem davon kommt, hängt von der Steifigkeit der Pfahlkopfplatte und des Überbaus ab.



Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Pfahl	**D = 0.60 m, E I = 190,852 kN·m² (Beispielpfahl)**
Baugrund	**Ton, k_h = 15,000 kN/m³ ⇒ k = k_h D = 9,000 kN/m²**
Last	**H = 120 kN, an der Geländeoberfläche**
Pfahl	**lang**

GESUCHT

Für den **freien** und den **eingespannten** Pfahlkopf sind die Kopfverschiebung und die Momente mit den geschlossenen Lösungen nach Hetényi zu bestimmen.

Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 β

$$\beta = \left(\frac{k}{4EI}\right)^{1/4} = \left(\frac{9{,}000}{4(190{,}852)}\right)^{1/4} = \mathbf{0.3295}\ \mathrm{m}^{-1}$$

2 Freier Kopf

$$y_0 = \frac{2H\beta}{k} = \frac{2(120)(0.3295)}{9{,}000} = \mathbf{8.79}\ \mathrm{mm}$$

$$M_{max} = 0.3224\frac{H}{\beta} = 0.3224\frac{120}{0.3295} = \mathbf{117.4}\ \mathrm{kN{\cdot}m} \quad \left(z = \tfrac{\pi}{4\beta} = 2.38\ \mathrm{m}\right)$$

Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Eingespannter Kopf

$$y_0 = \frac{H}{4EI\beta^3} = \frac{120}{4(190{,}852)(0.3295)^3} = \mathbf{4.39}\ \text{mm}$$

$$M_{head} = -\frac{H}{2\beta} = -\frac{120}{2(0.3295)} = \mathbf{-182.1}\ \text{kN·m}$$

Die eingespannte Kopfverschiebung wird auf die **Hälfte** reduziert (8.79 → 4.39 mm), das Kopfmoment (182.1 kN·m) beträgt jedoch das **1.55-Fache** des maximalen Moments des freien Pfahls (117.4 kN·m). Die elastische Option des Moduls liefert dieselben Werte: frei 8.79 mm und 117.4 kN·m, eingespannt 4.39 mm und 182.1 kN·m.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

API RP 2A: Reese, Cox und Koop

THEORIE

Der Boden nahe der Oberfläche wird vor dem Pfahl als **Keil** weggedrückt; in größerer Tiefe **fließt der Boden horizontal um** den Pfahl. Der Grenzwiderstand in der Tiefe z (σ′: die wirksame Spannung in dieser Tiefe) ist der kleinere der beiden:

$$p_{us} = (C_1 z + C_2 D)\,\sigma' \qquad p_{ud} = C_3 D\,\sigma'$$

$$p = A\,p_u \tanh\left(\frac{k\,z\,y}{A\,p_u}\right) \qquad A = \max\left(0.9;\ 3 - 0.8\tfrac{z}{D}\right)\ \text{(statisch)},\ A = 0.9\ \text{(zyklisc}$$

C_1, C_2, C_3 hängen nur von **φ′** ab; k, der Anfangsmodul, wird nach φ′ und Wasser angesetzt (seitlich).

Bei kleinem y ist die Kurve die Gerade **k z y** (der Fall n_h = k der elastischen Lösung); bei großem y endet sie bei **A p_u**. A ist 3.0 an der Oberfläche und 0.9 in einer Tiefe von 2.6D: Der statische Widerstand ist nahe der Oberfläche höher und fehlt unter zyklischer Belastung.

MIT φ′ VERÄNDERLICHE BEIWERTE

φ′	C_1	C_2	C_3	k (über Wasser)	k (unter Wasser)
28°	1.60	2.41	22.5	5.4	5.4
30°	1.91	2.67	28.7	10.5	7.9
32°	2.28	2.95	36.8	20.7	11.9
34°	2.72	3.25	47.3	32.7	17.6
36°	3.24	3.59	61.2	46.3	24.8
38°	3.87	3.97	79.6	61.7	33.6
40°	4.62	4.38	104.1	78.9	44.0

k: MN/m³. Für 32° gilt C_1 = 2.28; C_2 = 2.95; C_3 = 36.8.

Aufgabe

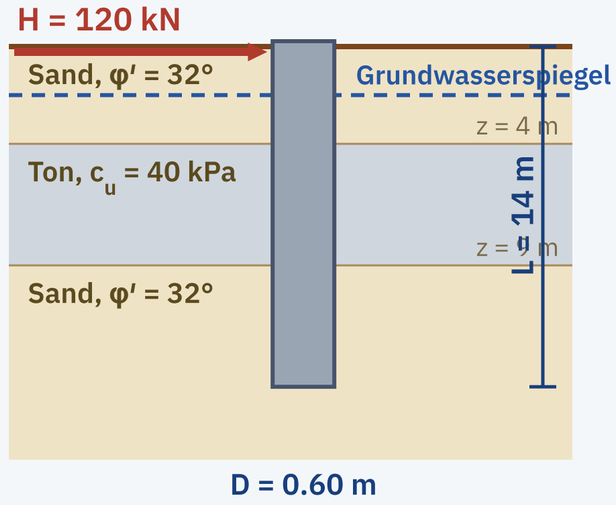
BEISPIEL

Gegeben

Pfahl	**Bohrpfahl, Kreisquerschnitt, D = 0.60 m, L = 14 m, Beton: E I = 190 852 kN·m²**
Baugrund	**Sand 0–4 m (φ′ = 32°) · Ton 4–9 m (c_u = 40 kPa) · Sand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Wichte, Wasser	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; Grundwasserspiegel bei 2.0 m**
Tiefe	**z = 2.0 m (Sand 1, Grundwasserspiegel); k = 20.7 MN/m³ (über Wasser)**
Beiwerte	$K_0 = 0.4,\ K_a = \tan^2(45^\circ - \varphi'/2)$

GESUCHT

Mit σ′, C_1, C_2, C_3, $\mathbf{p_u}$, A sowie y = 5 mm und 10 mm sind die **p**-Werte zu ermitteln.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Wirksame Spannung und Winkel (Grundwasserspiegel = 2 m: feucht von der Geländeoberfläche bis z = 2)

$$\sigma' = 18(2) = \mathbf{36.0}\ \mathrm{kPa} \qquad \alpha = \frac{\varphi'}{2} = 16^\circ,\ \beta = 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} = 61^\circ,\ K_a = \tan^2 29^\circ = 0.3073$$

2 Beiwerte (φ′ = 32°)

$$C_1 = \frac{K_0 \tan\varphi' \sin\beta}{\tan(\beta-\varphi')\cos\alpha} + \frac{\tan^2\beta\tan\alpha}{\tan(\beta-\varphi')} + K_0\tan\beta(\tan\varphi'\sin\beta - \tan\alpha) = \mathbf{2.281}$$

$$C_2 = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\varphi')} - K_a = \mathbf{2.947}$$

$$C_3 = K_a(\tan^8\beta - 1) + K_0\tan\varphi'\tan^4\beta = \mathbf{36.81}$$

Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Grenzwiderstand: das kleinere aus Keil und Umströmung des Umfangs

$$p_{us} = (2.281(2) + 2.947(0.6))(36.0) = 227.9\ \text{kN/m}$$

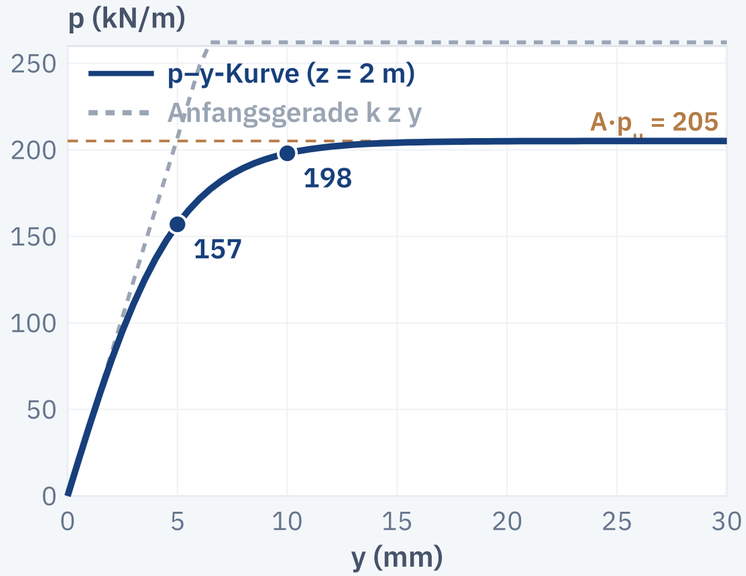
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(36.0) = 795\ \text{kN/m} \ \Rightarrow\ p_u = \mathbf{227.9}\ \text{kN/m}$$

4 A und die Kurve: A = max(0.9; 3 − 0.8 z/D) = max(0.9; 0.33) = 0.9; k z y / (A p_u)

$$y = 5\ \text{mm}: \ p = 0.9(227.9)\tanh\frac{20\,700(2)(0.005)}{0.9(227.9)}$$

$$= \mathbf{157.0}\ \text{kN/m}$$

$$y = 10\ \text{mm}: \ p = \mathbf{198.0}\ \text{kN/m}$$



Kurve A nähert sich p_u = 205 kN/m; bei 10 mm liegt sie zu 97 % daran. In dieser Tiefe sind die statische und die zyklische Kurve **gleich** (A beträgt in beiden 0.9).

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Pfahl	**Bohrpfahl, Kreisquerschnitt, D = 0.60 m, L = 14 m, Beton: E I = 190 852 kN·m²**
Baugrund	**Sand 0–4 m (φ′ = 32°) · Ton 4–9 m (c_u = 40 kPa) · Sand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Wichte, Wasser	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; Grundwasserspiegel bei 2.0 m**
Tiefe	**z = 0.6 m (1D), σ′ = 18(0.6) = 10.8 kPa; k = 20.7 MN/m³**
Sand 1	**C_1 = 2.281, C_2 = 2.947, C_3 = 36.81 (Beispiel 3)**

GESUCHT

Die statischen und zyklischen **p–y**-Werte für y = 10 mm sind zu ermitteln.

Lösung

LÖSUNG

1 Grenzwiderstand und A

$$p_{us} = (2.281(0.6) + 2.947(0.6))(10.8) = 33.9\ \text{kN/m}$$

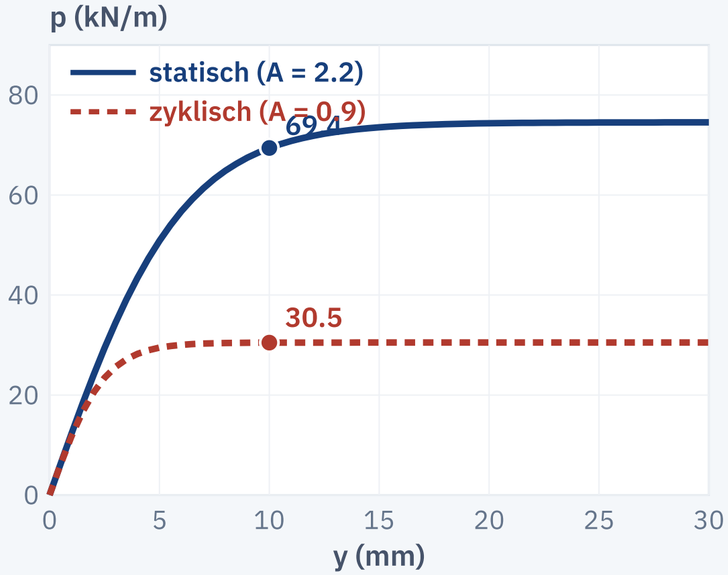
$$p_{ud} = 36.81(0.6)(10.8) = 238.6\ \text{kN/m} \Rightarrow p_u = \mathbf{33.9}\ \text{kN/m}$$

$$A_{static} = \max(0.9;\ 3 - 0.8(1)) = 2.2 \qquad A_{cyclic} = 0.9$$

2 y = 10 mm: k z y = 20 700(0.6)(0.010) = 124.2

$$p_{static} = 2.2(33.9)\tanh\frac{124.2}{2.2(33.9)} = \mathbf{69.4}\ \text{kN/m}$$

$$p_{cyclic} = 0.9(33.9)\tanh\frac{124.2}{0.9(33.9)} = \mathbf{30.5}\ \text{kN/m}$$



In oberflächennahem Sand verringert die zyklische Belastung den Widerstand um **56 %** (69.4 → 30.5 kN/m): Der Beiwert A entfällt. Deshalb wächst bei zyklischer Belastung die Kopfverschiebung.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Matlock: weicher Ton, statisch und zyklisch

THEORIE

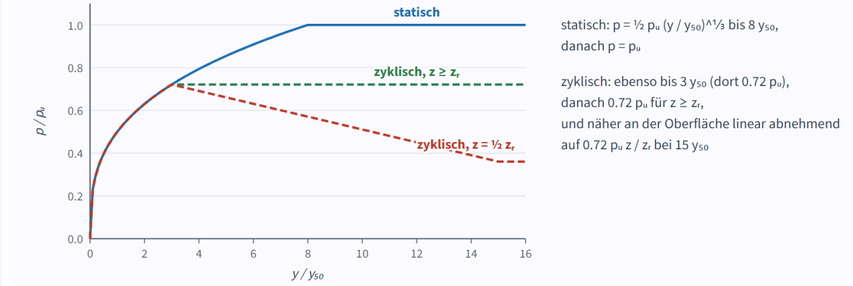
In Ton verwendet das Modul die Weichton-Kurve nach **Matlock** (1970) in der von API RP 2A angegebenen Form. Der Grenzwiderstand ist wiederum der kleinere der beiden Werte für den oberflächennahen Bereich (Keil) und den tiefen Bereich (Fließen):

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{\sigma'}{c_u} + J\frac{z}{D}\right) c_u D;\ 9 c_u D\right]$$

$$p = \tfrac{1}{2} p_u \left(\frac{y}{y_{50}}\right)^{1/3} \quad (y \le 8 y_{50}) \qquad p = p_u \ (y > 8 y_{50}) \qquad y_{50} = 2.5\,\varepsilon_{50} D$$

ε_{50} und J in Abhängigkeit von c_u: unter 48 kPa weich (0.020; 0.5), 48–96 mittel (0.010; 0.25), über 96 steif (0.005; 0.25).

Zyklisch: nach $3y_{50}$ bleibt die Kurve bei 0.72 p_u ($z \ge z_R$); in geringerer Tiefe **fällt sie linear** auf 0.72 p_u z/z_R bei $15y_{50}$ ab. $z_R = \max[6D / ((\sigma'/z)(D/c_u) + J); 2.5D]$.



statisch: p = ½ pᵤ (y / y₅₀)^⅓ bis 8 y₅₀, danach p = pᵤ

zyklisch: ebenso bis 3 y₅₀ (dort 0.72 pᵤ), danach 0.72 pᵤ für z ≥ zᵣ, und näher an der Oberfläche linear abnehmend auf 0.72 pᵤ z / zᵣ bei 15 y₅₀

Aufgabe

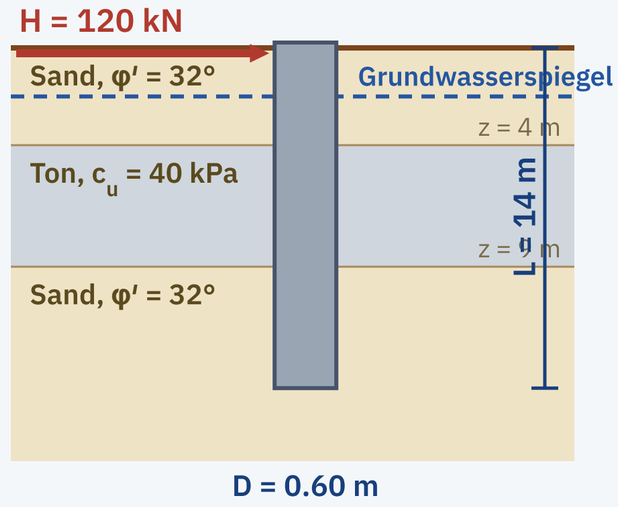
BEISPIEL

Gegeben

Pfahl	**Bohrpfahl, Kreisquerschnitt, D = 0.60 m, L = 14 m, Beton: E I = 190 852 kN·m²**
Baugrund	**Sand 0–4 m (φ′ = 32°) · Ton 4–9 m (c_u = 40 kPa) · Sand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Wichte, Wasser	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; Grundwasserspiegel bei 2.0 m**
Tiefe	**z = 6.5 m (Ton, 4–9 m); ε_{50} = 0.020, J = 0.5**
Schicht	**c_u = 40 kPa**

GESUCHT

Für y = 15 mm und 150 mm sind σ′, **p_u**, y_{50} und die **statischen** p–y-Werte zu ermitteln; ferner z_R und der Plateauwert der **zyklischen** Kurve.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 σ′: Sand 0–2 m feucht (γ = 18), Sand 2–4 m und Ton 4–6.5 m unter Auftrieb (γ_{sat} = 19)

$$\sigma' = 18(2) + (19 - 9.81)(2) + (19 - 9.81)(2.5) = \mathbf{77.4}\ \mathrm{kPa}$$

2 Grenzwiderstand und y_{50}

$$p_u = \min\left[\left(3 + \frac{77.4}{40} + 0.5\frac{6.5}{0.6}\right)(40)(0.6);\ 9(40)(0.6)\right]$$

$$= \min[248.4;\ 216.0] = \mathbf{216.0}\ \mathrm{kN/m}$$

$$y_{50} = 2.5(0.020)(0.6) = \mathbf{30.0}\ \mathrm{mm}$$

Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Statische Kurve: $p = ½\ p_u\ (y/y_{50})^{1/3}$

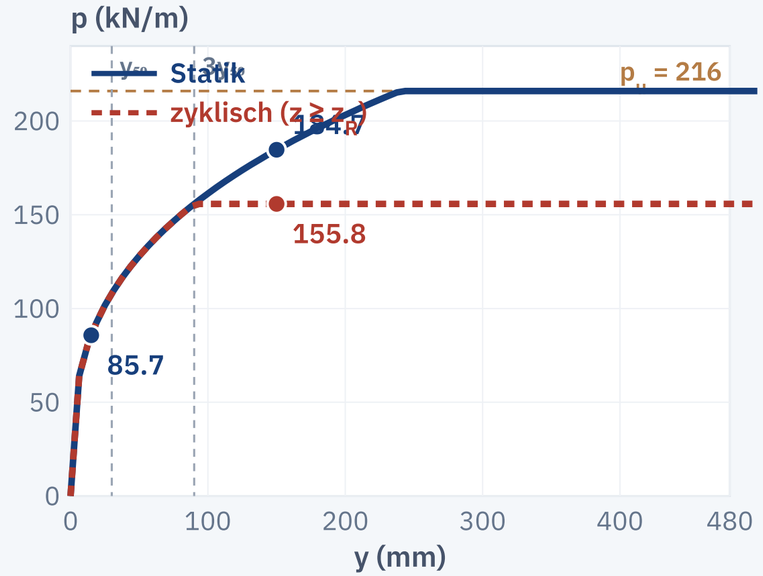
$$y = 15\ \text{mm}\ (0.5y_{50}):\ \ p = 0.5(216.0)(0.5)^{1/3} = \mathbf{85.7}\ \text{kN/m}$$

$$y = 150\ \text{mm}\ (5y_{50}):\ \ p = 0.5(216.0)(5)^{1/3} = \mathbf{184.7}\ \text{kN/m}$$

4 Zyklische Kurve: $z_R = \max[6(0.6)/((\sigma'/z)(D/c_u) + J);\ 2.5D] = \max[5.31;\ 1.5] = 5.31$ m; $z = 6.5 > z_R$

$$p_{perimeter}(y \geq 3y_{50}) = 0.72\,p_u = 0.7211(216.0) = \mathbf{155.8}\ \text{kN/m}$$

Bei y = 150 mm beträgt der statische Widerstand 184.7 und der zyklische 155.8 kN/m: Die zyklische Belastung verringert den Widerstand in diesem Ton um **16%**; bis $3y_{50}$ (90 mm) sind beide Kurven identisch.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Jede Kurve gehört zum Baugrund in ihrer eigenen Tiefe

THEORIE

σ′ ist die Summe der Wichten der darüberliegenden Schichten (γ über dem Grundwasserspiegel, $\gamma_{sat} - \gamma_W$ darunter); es ist **nicht der Mittelwert** der Schicht, sondern nimmt innerhalb der Schicht mit der Tiefe zu.

Schicht z liefert φ′ und k (Sand) oder c_u, ε_{50} und J (Ton). Der Anfangsmodul k des Sandes wird bezogen auf das Wasser an der Lage der Schicht angesetzt; in einer vom Wasser durchstoßenen Schicht wird er nach der mittleren Tiefe der Schicht eingetragen und kann manuell geändert werden.

Die Elemente **überschreiten keine Schichtgrenze**: An jeder Grenze liegt ein Knoten; die Steifigkeit des Bodens springt zwischen den Elementen, nicht innerhalb eines Elements.

Das Berechnungsblatt gibt für jede Schicht die Werte der Kurve in der Schichtmitte schrittweise an: σ′, Beiwerte, p_u, A oder y_{50} – von Hand nachvollziehbar (wie in Beispiel 3 und 5 dieser Vorlesung).

Die Schichten müssen bis zur Pfahlspitze reichen; der Boden unterhalb der Spitze ist nicht definiert und die Spitze ist frei. Ein weicher Ton über einem steifen Sand erscheint in den Diagrammen als **Knick** an der Schichtgrenze.

Finite Elemente und Newton

THEORIE

Die Gleichung wird mit finiten Elementen gelöst: Der Pfahl wird in **kubische Balkenelemente** unterteilt, mit y und Neigung θ an jedem Knoten. Die Bodenreaktion wird in jedem Element an **vier Gauß-Punkten** aus der Kurve entnommen und integriert. Die nichtlineare Gleichung K u + f(u) = F wird mit dem Newton-Verfahren gelöst:

$$(K + K_s(u_i))\,\Delta u = F - K u_i - f(u_i) \qquad K_s = \int N^T \frac{dp}{dy} N \, dz$$

dp/dy fällt nicht unter **ein Zwanzigstel** der Sekantensteifigkeit: Die Matrix bleibt auch dort positiv, wo die Kurve flach verläuft oder abfällt. Es gibt eine schrittreduzierende Liniensuche und, falls diese scheitert, einen gedämpften Sekantenschritt.

Elementlänge D/6 (3–15 cm); das Ergebnis ist **nicht** vom Netz bis zu den gezeigten Stufen abhängig (Element 0.4 → 0.025 m: Kopfverschiebung 6.228 → 6.228 mm).

Übersteigt die Last das, was der Boden aufnehmen kann, so **besteht kein Gleichgewicht**; das Modul teilt dies mit und gibt keine Zahlen an. Die Lösung zählt auch dann nicht, wenn sich der Boden unter der Geländeoberfläche um mehr als **fünf Pfahlbreiten** verschoben hat.

Die zyklische Tonkurve bzw. die Antwort auf eine axiale Belastung ist keine einzelne ansteigende Kurve; sie steigt bis zur **Grenzlast** an. Das Modul erreicht die Last in Schritten von null aus.

In jeder Untersuchung werden zwei Nachweise angeschrieben: Σ p Δz = H und Moment am Fuß = 0 (Statik).

P–δ-Effekt und Knicken

THEORIE

Die Axiallast P wirkt entlang der **verformten Form** des Pfahls: Sie erscheint in der Gleichung (Term P d²y/dz²) und in der geometrischen Steifigkeit jedes Elements; sie verringert die Quersteifigkeit des druckbeanspruchten Balkens und erhöht die Verschiebung und das Moment. Das Modul nimmt P über die gesamte Länge als konstant und am Pfahlkopf und am Pfahlfuß als gleich an (in Wirklichkeit überträgt die Mantelreibung die Last auf den Boden; die Annahme eines konstanten Verlaufs liegt auf der sicheren Seite).

$$P_{cr} = \sqrt{k\,EI} \qquad (\text{freies Ende},\ k\ \text{konstant},\ \text{langer Pfahl})$$

Er beträgt die **Hälfte** des Werts 2√(kEI) für einen unendlich langen Balken: Ein freies Ende kann sich verdrehen. Ein eingespannter Kopf knickt bei höherer Last aus.

Wenn sich P der Knicklast nähert, steigt die Last–Verschiebungs-Kurve unbegrenzt an; das Modul meldet **„Axiallast überschreitet die Knicklast“**.

Der gemeinsame Widerstand des Pfahlquerschnitts gegen Axiallast und Moment ist ein Nachweis der strukturellen Bemessung.

BEISPIELPFAHL

Für E I = 190,852 kN·m² und k = 9,000 kN/m² im elastischen Ton:

$$P_{cr} = \sqrt{9{,}000\,(190{,}852)} = 41{,}445\ \text{kN}$$

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Pfahl	**Bohrpfahl, Kreisquerschnitt, D = 0.60 m, L = 14 m, Beton: E I = 190 852 kN·m²**
Baugrund	**Sand 0–4 m (φ′ = 32°) · Ton 4–9 m (c_u = 40 kPa) · Sand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Wichte, Wasser	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; Grundwasserspiegel bei 2.0 m**
Lasten	**H = 120 kN; Axiallast P = 800 kN (konstant)**
Knicken	**k = k_h D = 9,000 kN/m² (elastischer Ton), freier Kopf**
Modul	**P = 0: Kopf 6.23 mm, M_{max} 151.8 kN·m**

GESUCHT

Liegt P = 800 kN **nahe** an der Knicklast? Wie groß ist der P–δ-Effekt?

Lösung

LÖSUNG

1 Knicklast (freier Kopf, k konstant)

$$P_{cr} = \sqrt{kEI} = \sqrt{9{,}000(190{,}852)} = \mathbf{41{,}445}\ \text{kN} \qquad \frac{P}{P_{cr}} = \frac{800}{41{,}445} = \mathbf{0.019}$$

2 Im Modul mit P = 800 kN (einschließlich P–δ)

$$y_{head}:\ 6.23 \rightarrow 6.32\ \text{mm}\ \ (+2\%) \qquad M_{max}:\ 151.8 \rightarrow 154.5\ \text{kN·m}\ \ (+2\%)$$

800 kN, nur **2 %** der Knicklast: Die Axiallast bringt den Pfahl nicht in die Nähe des Knickens; der P–δ-Effekt erhöht die Verschiebung um 2 % und das Moment um 2 %. Bei diesem Pfahl ist die Axiallast in der Querschnittsanalyse von untergeordneter Bedeutung, sie darf jedoch nicht vernachlässigt werden.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Freie Auflagerung, volle Einspannung und Auflast auf dem Boden

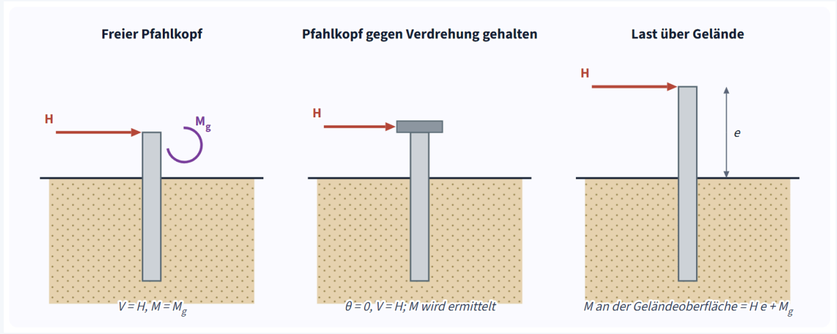
THEORIE

Freier Kopf: im Lastpunkt V = H und M = M_g.

Eingespannter Pfahlkopf: Die Neigung ist null, der Pfahlkopf verschiebt sich seitlich. In langem, gleichmäßigem, elastischem Baugrund verschiebt er sich um **die Hälfte** des Werts des frei drehbaren Pfahlkopfs; das einspannende Moment M = −H/(2β) ist größer als das maximale Moment des frei drehbaren Pfahls. Eine reale Pfahlkopfplatte liegt zwischen beiden Fällen.

Freie Länge e: Der Pfahl oberhalb des Bodens biegt sich wie ein Kragarm. Die Querkraft ist bis zum Boden H, und das Moment erreicht an der Geländeoberfläche **M(0) = M_g + H e**; dort übernimmt der Boden.

Kopfverschiebung = Verschiebung an der Geländeoberfläche + Verdrehung an der Oberfläche × e + Kragarmverschiebung der freien Länge (H e^3 / 3EI). Bei gleicher Last wird die Kopfverschiebung mit freier Länge **sehr viel größer** als die der Geländeoberfläche; das maximale Moment liegt meist im Boden oder etwas darunter.



Aufgabe

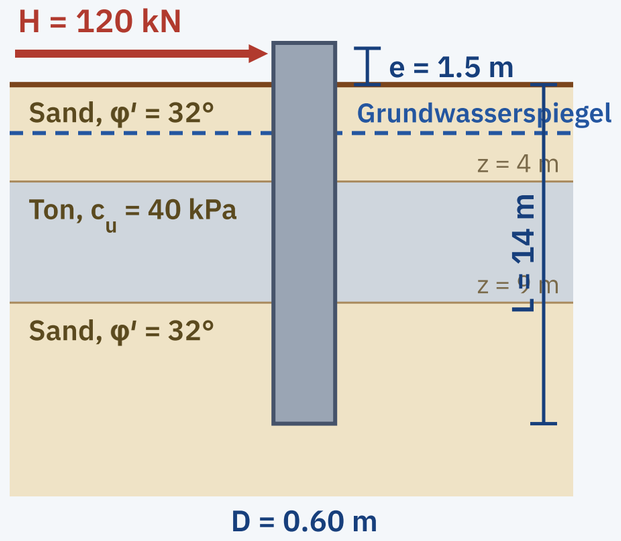
BEISPIEL

Gegeben

Pfahl	**Bohrpfahl, Kreisquerschnitt, D = 0.60 m, L = 14 m, Beton: E I = 190 852 kN·m²**
Baugrund	**Sand 0–4 m (φ′ = 32°) · Ton 4–9 m (c_u = 40 kPa) · Sand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Wichte, Wasser	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; Grundwasserspiegel bei 2.0 m**
Freie Länge	**Last über der Geländeoberfläche bei e = 1.5 m; H = 120 kN, freier Kopf**
Elastizitätsmodul (an der Geländeoberfläche)	**y_{ground} = 11.12 mm, Neigung = 0.321° (zur Last hin)**

GESUCHT

Bestimmen Sie das **Moment** und die **Kopfverschiebung** an der Geländeoberfläche; vergleichen Sie das Ergebnis mit 20.23 mm aus dem Modul.



Lösung

LÖSUNG

1 Moment an der Geländeoberfläche (Querkraft H über die freie Länge, $M_g = 0$)

$$M(0) = M_g + H\,e = 0 + 120(1.5) = \mathbf{180}\ \mathrm{kN{\cdot}m}$$

2 Verschiebung des Kragarms der freien Länge

$$\frac{H\,e^3}{3EI} = \frac{120(1.5)^3}{3(190{,}852)} = 0.71\ \mathrm{mm}$$

3 Verschiebung am Kopf = $y_{Boden} + |\theta|\,e + H\,e^3/3EI$

$$y_{head} = 11.12 + 5.605(1.5) + 0.71 = \mathbf{20.23}\ \mathrm{mm}$$

Von Hand **20.23 mm**, im Modul 20.23 mm: identisch. Bei einer Last in Geländeoberkante verschob sich der Kopf um 6.23 mm; eine freie Länge von 1.5 m ergibt das **3.2-Fache**. Das maximale Moment beträgt 306 kN·m, 1.68 m unter der Geländeoberfläche (über den 180 kN·m an der Geländeoberfläche).

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Welche Zahl sagt was aus?

THEORIE

Kopfverschiebung y und Verdrehung (Neigung dy/dz; negativ bei einem in Lastrichtung liegenden Pfahl). Bei vorhandener freier Länge wird der Wert auch an der Geländeoberfläche angegeben.

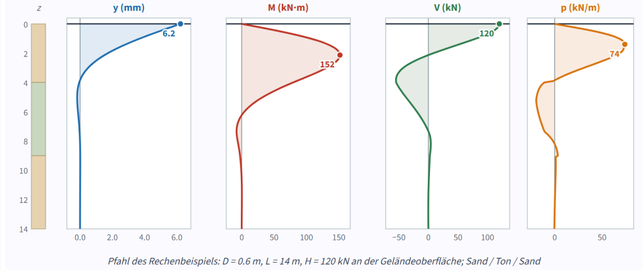
Maximales Biegemoment und seine Tiefe. Bei eingespanntem Pfahlkopf wird auch das Kopfmoment aufgeführt; es ist nicht immer das größte.

Tiefe der Nulldurchbiegung: die Stelle, an der der Pfahl seine eigene Achse schneidet; darüber bewegt sich der Boden zum Pfahl hin, darunter von ihm weg.

Querkraft und Bodenreaktion; die Reaktion und das Ende der p–y-Kurve werden nebeneinander aufgetragen: Es ist zu erkennen, wie nah der Boden an seiner Grenze liegt.

Spitze: an der Spitze eines ausreichend langen Pfahls tritt keine Verschiebung auf. Bewegt sich die Spitze um mehr als ein Zehntel der Verschiebung an der Geländeoberfläche und um mehr als 2 mm, so ist der Pfahl für diese Last **kurz**: er dreht sich wie ein starrer Körper, und seine Länge bestimmt das Ergebnis.

Die p–y-Ansicht zeichnet die Kurven in fünf Tiefen im bewegten Teil und markiert auf jeder den **erreichten Punkt**: Der Punkt am flachen Anfang der Kurve ist elastisch, der Punkt nahe ihrem Ende liegt an der Grenze.



Aufgabe

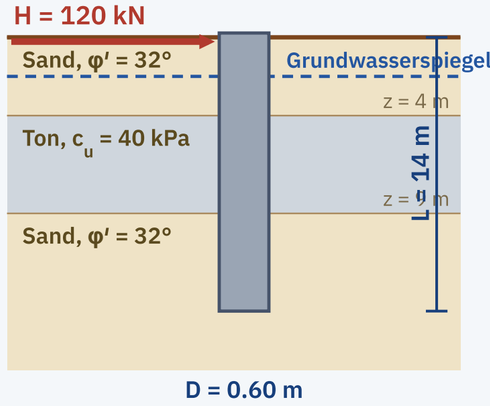
BEISPIEL

Gegeben

Pfahl	**Bohrpfahl, Kreisquerschnitt, D = 0.60 m, L = 14 m, Beton: E I = 190 852 kN·m²**
Baugrund	**Sand 0–4 m (φ′ = 32°) · Ton 4–9 m (c_u = 40 kPa) · Sand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Wichte, Wasser	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; Grundwasserspiegel bei 2.0 m**
Modulergebnisse	**Kopf y = 6.23 mm, Neigung 0.150°; M_{max} = 151.8 kN·m (z = 2.13 m); Verschiebung null bei z = 3.85 m; Fuß 0.0019 mm**
Maximale Bodenreaktion	**p = 74.0 kN/m, z = 1.40 m; A = max(0.9; 3 − 0.8(1.4)/0.6), p_u = 125.0 kN/m**

GESUCHT

Ist der Pfahl für diese Last **lang**? Bei welchem **Prozentsatz** seiner Grenze arbeitet der Boden in einer Tiefe von 1.40 m? Interpretieren Sie die statischen Nachweise.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

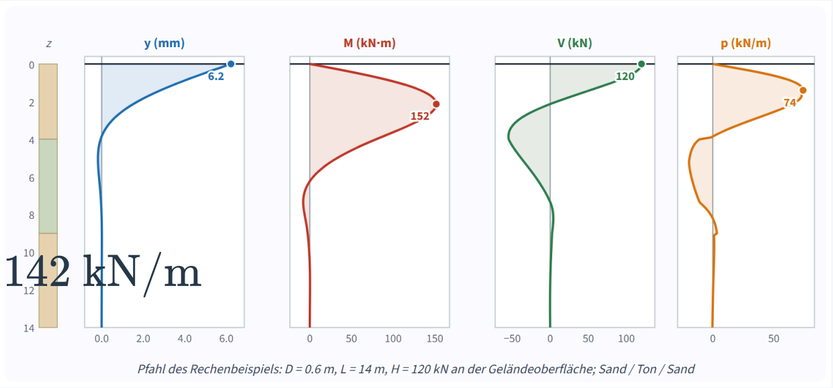
1 Randbedingung: Die Pfahlkopfverschiebung wird mit 2 mm verglichen, einem Zehntel der Verschiebung an der Geländeoberfläche

$$y_{tip} = 0.0019\ \text{mm} \ll 0.1(6.23) = 0.62\ \text{mm} \ \Rightarrow\ \text{langer Pfahl}$$

2 In 1.40 m Tiefe: Welcher Anteil des Bodens liegt innerhalb seiner Grenze?

$$A = \max\left(0.9;\ 3 - \frac{0.8(1.4)}{0.6}\right) = 1.133\ ; \quad A\,p_u = 1.133(125.0) = 142\ \text{kN/m}$$

$$\frac{p}{Ap_u} = \frac{74.0}{142} = \mathbf{0.52}$$



Pfahl des Rechenbeispiels: D = 0.6 m, L = 14 m, H = 120 kN an der Geländeoberfläche; Sand / Ton / Sand

Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Statische Nachweise

$$\sum p\,\Delta z = 120.000\ \mathrm{kN} = H \qquad M_{tip}\ (\text{aus dem statischen Fall}) = 0.000\ \mathrm{kN{\cdot}m$$

7 Iteration

Der Pfahl ist **lang**; bei 1.40 m arbeitet der Boden bei **52%** seiner Grenze (nicht am Ende der Kurve). Beide Nachweise sind ebenfalls erfüllt: dies sind Nachweise der Iteration und der Bilanzierung, **nicht der Genauigkeit des Modells**.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Last, die dem zulässigen Wert entspricht

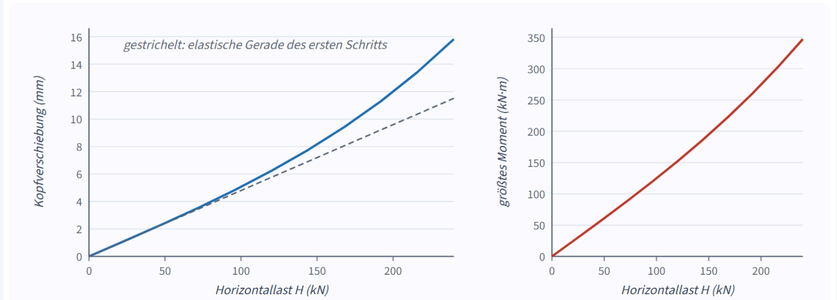
THEORIE

Da der Boden nichtlinear ist, ist die Verschiebung nicht proportional zur Last; die **Last bei der zulässigen Verschiebung** lässt sich nicht aus dem Ergebnis bei der Gebrauchslast ablesen. Das Modul erhöht Last und Moment von Anfang an proportional (ein Faktor λ auf H und M_g, bei konstanter Axiallast), löst die Gleichung bei jedem Schritt neu und ermittelt das λ, bei dem die Kopfverschiebung den zulässigen Wert (oder das größte Moment die Querschnittstragfähigkeit) erreicht: $\mathbf{H_y}$ oder $\mathbf{H_M}$.

Kann der Boden den zulässigen Wert nicht aufnehmen (ist vor dessen Erreichen kein Gleichgewicht vorhanden), meldet das Modul **„nicht erreicht“**, und die Kurve endet bei der zuletzt gelösten Last. Bei zyklischem Ton oder axialer Last krümmt sich die Kurve: Dies ist die **Grenzlast des Bodens**.

Dies ist nicht die Tragfähigkeit des Pfahls: Im Modul ist der Pfahl elastisch; ein auf Biegung fließender Pfahl kann vor dem Boden versagen. Die eingegebene Momententragfähigkeit ist der Nachweis hierfür.

Das Modul gibt keinen Sicherheitsfaktor vor und übernimmt keinen aus einem Regelwerk: Die zulässige Verschiebung und die Momententragfähigkeit liegen in der Verantwortung des Ingenieurs.



Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Pfahl	**Bohrpfahl, Kreisquerschnitt, D = 0.60 m, L = 14 m, Beton: E I = 190 852 kN·m²**
Baugrund	**Sand 0–4 m (φ′ = 32°) · Ton 4–9 m (c_u = 40 kPa) · Sand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Wichte, Wasser	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; Grundwasserspiegel bei 2.0 m**
Nichtlineare Lösung	**Für H = 30, 60, …, 270 kN die Kopfverschiebung: 1.44 · 2.93 · 4.51 · 6.23 · 8.15 · 10.33 · 12.86 · 15.82 · 19.29 mm**
Zulässig	**y_{all} = 10 mm; Momentenkapazität M_{cap} = 200 kN·m**

GESUCHT

H_y, die Last bei y_{all} = 10 mm; H_M, die Last entsprechend M_{cap}; wie groß wäre der Fehler, wenn lineare Proportionalität angenommen würde?

Lösung

LÖSUNG

1 Lineare Proportionalität (aus 6.23 mm bei der Arbeitslast) und die exakte Lösung

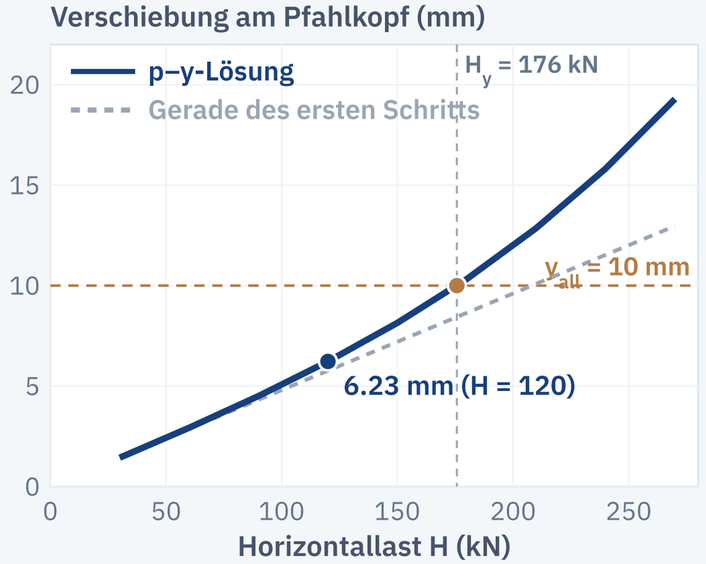
$$H_{y,linear} = 120\,\frac{10}{6.23} = 192.7\ \text{kN}$$

$$H_y = \mathbf{175.7}\ \text{kN}\ (\lambda = 1.464)$$

2 Last, die dem Momentenwiderstand entspricht

$$H_M = \mathbf{153.6}\ \text{kN}\ \ (\lambda = 1.280;\ y_{head} = 8.39\ \text{mm})$$

Eine lineare Proportionalität würde die Last **10 % zu hoch** ergeben (193 ≠ 176 kN): Je weicher der Boden, desto schneller wächst die Verschiebung gegenüber der Last. **Maßgebend** ist das Moment: H_M = 154 kN, bei dem die Kopfverschiebung nur 8.4 mm beträgt; bei der Last zur zulässigen Verschiebung (H_y = 176 kN) würde das Moment 234 kN·m betragen.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Pfahl	**Bohrpfahl, Kreisquerschnitt, D = 0.60 m, L = 14 m, Beton: E I = 190 852 kN·m²**
Baugrund	**Sand 0–4 m (φ′ = 32°) · Ton 4–9 m (c_u = 40 kPa) · Sand 9–17 m (φ′ = 32°)**
Wichte, Wasser	**γ = 18, γ_{sat} = 19 kN/m³; Grundwasserspiegel bei 2.0 m**
Zu vergleichen	**Kopfrandbedingung · freie Länge · zyklische Last · Axiallast (800 kN) · gerissener Querschnitt (E I × 0.6) · elastischer Boden (n_h = 8 MN/m³, k_h = 15 MN/m³)**

GESUCHT

In jedem Fall sind die Kopfverschiebung und das maximale Moment auf die Arbeitslast zu beziehen und zu vergleichen.

Lösung

LÖSUNG

Zustand	y_{Kopf} (mm)	M_{max} (kN·m)	y / y_0	M / M_0
Wie eingegeben: frei, statisch, auf Geländeniveau	6.23	152	1.00	1.00
Am Kopf gegen Verdrehung gehalten (M_{Kopf})	2.24	-175	0.36	1.15
Die Last liegt 1.5 m über dem Gelände	20.23	306	3.25	2.01
Zyklische Belastung (API)	7.28	172	1.17	1.13
Axiallast P = 800 kN	6.32	155	1.02	1.02
Gerissener Querschnitt, E I × 0.6	7.93	140	1.27	0.92
Elastischer Baugrund (n_h, k_h)	10.49	173	1.68	1.14

Die Kopfausbildung reduziert die Verschiebung um den Faktor 0.36 und erhöht das Moment; **die freie Länge** hat den größten Einfluss (×3.2 Verschiebung, ×2.0 Moment). **Zyklische Belastung** erhöht die Verschiebung um 17 %, **ein gerissener Querschnitt** um 27 %, reduziert aber das Moment (der Pfahl ist biegeweicher). Der elastische Boden ist gesondert zu betrachten: Es handelt sich nicht um eine Kontrolle der p–y-Kurven.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Die Annahmen hinter den Zahlen

THEORIE

Einzelpfahl: ein allein stehender Pfahl ohne Nachbarn, mit seinen p–y-Kurven. Eine seitlich belastete Gruppe verschiebt sich bei gleicher Pfahllast mehr als ein Einzelpfahl; die Gruppe ist Gegenstand des Moduls Pfahlgruppe mit p-Multiplikatoren für die Reihen.

Pfahl: ein einziger Querschnitt über die gesamte Länge, linear elastisch; E I konstant. Ein gerissener Betonquerschnitt wird durch den E I-Faktor und durch das Moment M_{cap} erfasst, bei dem der Querschnitt fließt.

Baugrund: unabhängige Federn, keine Schubübertragung zwischen ihnen; die Kurven stammen aus Versuchen an bestimmten Böden: Sand richtet sich nach φ', Ton nach c_u und ε_{50}. Es werden Sand und weicher bis mittelfester Ton beschrieben; steifer Ton, verwitterter Fels, zementierter Boden und verflüssigungsfähiger Sand werden durch eigene Kurven beschrieben.

Belastung: statisch oder zyklisch mit API-Abminderung; wird zuerst aufgebracht. **Axiallast** ist über die gesamte Länge konstant.

Numerische Lösung: Finite Elemente und nichtlineare Iteration sind für die gegebene Gleichung bis zu den dargestellten Schritten exakt; die Näherung liegt in der Gleichung (der Boden wird durch Federn abgebildet). Mit zwei unabhängigen Programmen (finite Differenzen, andere Programmiersprache) stimmte sie für 14 Pfähle auf 0.01 % überein.

Das p–y-Verfahren ist in der Praxis die Grundlage der Bemessung lateral belasteter Pfähle; die Werte sind mit den zulässigen Werten des Projekts und, falls vorhanden, mit der **Pfahlprobebelastung** zu vergleichen.

Zusammenfassung

Die wichtigsten Punkte

Der Pfahl ist ein **Balken auf nichtlinearen Federn**: $EI\,y'''' + P\,y'' + p(y, z) = 0$; das Baugrundgesetz ist die p–y-Kurve

Elastisch: Sand $n_h z \rightarrow T = (EI/n_h)^{1/5}$; Ton $k \rightarrow \beta = (k/4EI)^{1/4}$, $y_0 = 2H\beta/k$, $M_{max} = 0.3224\ H/\beta$

Sand: $p = A\,p_u \tanh(kzy/Ap_u)$, $p_u = \min[(C_1 z + C_2 D)\sigma'; C_3 D\sigma']$ · **Ton**: $p = \frac{1}{2} p_u (y/y_{50})^{1/3}$, $p_u = \min[(3 + \sigma'/c_u + Jz/D)c_u D; 9c_u D]$

Zyklische Belastung setzt den Widerstand nahe der Oberfläche herab: $A = 0.9$ im Sand, $0.72p_u$ im Ton jenseits von $3y_{50}$

Kopfausbildung, **freie Länge**, **Axiallast** und **gerissener Querschnitt** verändern das Ergebnis deutlich; die freie Länge am stärksten

Die Verschiebung ist nicht proportional zur Last: Die **Last bei der zulässigen Verschiebung** wird durch erneutes Lösen ermittelt (H_y, H_M)

Literatur

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning, Boston.

Matlock, H. and Reese, L.C. (1960). Generalized solutions for laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 86(SM5), 63–91.

Matlock, H. (1970). Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay. Proceedings of the 2nd Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 1204, 577–594.

Reese, L.C., Cox, W.R. and Koop, F.D. (1974). Analysis of laterally loaded piles in sand. Proceedings of the 6th Offshore Technology Conference, Houston, Paper OTC 2080, 473–485.

American Petroleum Institute (2000). Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms — Working Stress Design, API RP 2A-WSD, 21st ed.

Hetényi, M. (1946). Beams on Elastic Foundation. University of Michigan Press, Ann Arbor.

Reese, L.C., Isenhower, W.M. and Wang, S.-T. (2006). Analysis and Design of Shallow and Deep Foundations. John Wiley & Sons, Hoboken.

Broms, B.B. (1965). Design of laterally loaded piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 91(SM3), 79–99.

Reese, L.C. and Welch, R.C. (1975). Lateral loading of deep foundations in stiff clay. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 101(GT7), 633–649.

Davisson, M.T. and Gill, H.L. (1963). Laterally loaded piles in a layered soil system. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 89(SM3), 63–94.

HINWEIS

Die Abbildungen in dieser Präsentation sind der Theorieseite von GeoTerva entnommen; alle Zahlenbeispiele wurden mit der Rechenkern des Moduls selbst erzeugt, und das Modul liefert dieselben Werte.

GeoTerva

Geotechnische Berechnungen online

Von der Theorie zur Praxis

Den Beispielpfahl aus dieser Präsentation in GeoTerva Schritt für Schritt berechnen: Die Zahlen sind dieselben.

Modul öffnen →

Theorieseite →

Auf dem Smartphone öffnen

Die Beispielmodule erfordern keine Registrierung.

Falls Sie sie in Ihren Vorlesungen verwenden möchten: info@geoterva.com