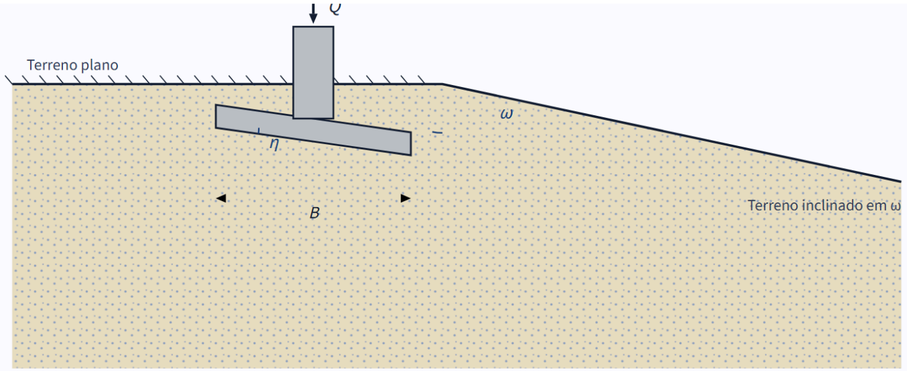
Apresentação de aula de geotecnia · Fundações

# Equação de capacidade de carga de Hansen

Aula: do coeficiente $N_\gamma$ próprio de Hansen às correções de forma e de profundidade, dos coeficientes de inclinação dependentes da carga real à inclinação da base e do terreno; exemplo resolvido em cada tópico.




- Hansen $N_\gamma$
- Forma · profundidade
- Inclinação dependente da carga real
- Inclinação da base e do terreno
- Forma aditiva não drenada
- Exemplos resolvidos

Baseia-se na página de teoria do GeoTerva · geoterva.com

Introdução

# O que veremos nesta aula?

- Reconhecer os três termos da **equação de Hansen** e os seis fatores de correção de cada termo (forma, profundidade, inclinação da carga, inclinação da base, inclinação do terreno)
- Calcular o **coeficiente $N_\gamma$ próprio** de Hansen e compará-lo com o de Vesic
- Aplicar os fatores de **forma** e de **profundidade**, incluindo a transição em $D_f/B = 1$
- Calcular os **coeficientes de inclinação** com as cargas reais h e v e verificar os limites de cisalhamento
- Usar os fatores de **inclinação da base η** e de **inclinação do terreno ω**
- Tratar a forma não drenada ($\varphi = 0$) **em tensões totais** e as condições de água subterrânea
- Determinar e **verificar** as tensões admissíveis bruta e líquida

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: qual é a regra e por que é assim?

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Fundação do exemplo, modelo inicial do módulo: sapata quadrada de 2 m × 2 m em solo com c = 10 kPa, $\varphi' = 25°$, $D_f = 1$ m, $\gamma = 18$ kN/m³, sem lençol freático.

# Três termos, seis correções para cada um

TEORIA

Hansen (1970) deduziu a equação de capacidade de carga com seu próprio mecanismo de ruptura, independentemente de Vesic. Cada termo é multiplicado por **seis fatores de correção**:

$$
\begin{aligned}
q_u = {} & c\, N_c\, s_c d_c i_c b_c g_c \\
& + q\, N_q\, s_q d_q i_q b_q g_q \\
& + \tfrac{1}{2}\gamma B\, N_\gamma\, s_\gamma d_\gamma i_\gamma b_\gamma g_\gamma
\end{aligned}
$$

**$N_c$ e $N_q$** são os mesmos de todos os métodos desta seção (formas fechadas de Prandtl e Reissner). **$N_\gamma$ é específico de Hansen** e é menor que o de Vesic para o mesmo φ′.

Os fatores de **forma** (s), de **profundidade** (d), de **inclinação** (i), de **inclinação da base** (b) e de **inclinação do terreno** (g) formam o conjunto próprio de Hansen; a carga inclinada, a base inclinada e o terreno em declive são tratados na mesma equação.

Com base plana, terreno plano e carga vertical, **i = b = g = 1**: a equação se reduz à equação geral com fatores de forma e de profundidade.

### NOTAÇÕES

c, φ′: coesão, ângulo de atrito

q = γ $D_f$: sobrecarga no nível da base

B, L: lados menor e maior; B/L define a forma

h, v: tensões H/A e V/A do caso de carga

η: inclinação da base em relação à horizontal

ω: inclinação da superfície do terreno ao lado da fundação

# O $N_\gamma$ de Hansen é menor que o de Vesic

TEORIA

$N_c$ e $N_q$ são iguais em todos os métodos:

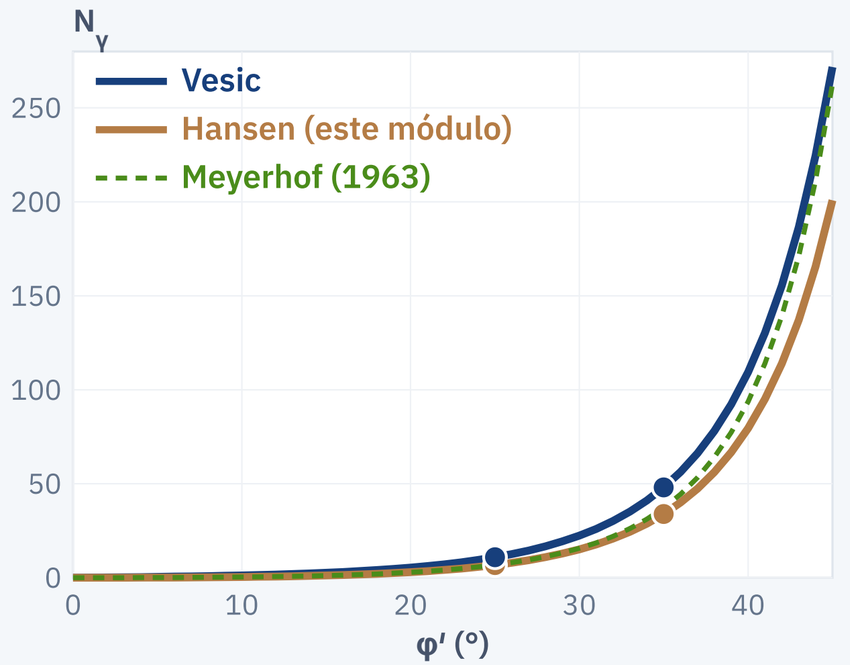
$$N_q = e^{\pi \tan\varphi} \tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \qquad N_c = (N_q - 1)\cot\varphi$$

Não existe uma expressão fechada e universalmente aceita para $N_\gamma$. Idealizando a superfície de ruptura de forma um pouco diferente, Hansen obteve a sua própria expressão:

$$N_\gamma^{\text{Hansen}} = 1.5\,(N_q - 1)\tan\varphi \qquad N_\gamma^{\text{Vesic}} = 2\,(N_q + 1)\tan\varphi$$

Ambas são deduções respeitáveis; nenhuma é, em sentido absoluto, “mais correta”. O que importa é **usar em conjunto os coeficientes de um mesmo método**: o $N_\gamma$ de Hansen com os fatores de forma e de inclinação de Hansen.

À medida que φ′ aumenta, a diferença diminui proporcionalmente, mas não se anula; para φ′ = 25°, o valor de Hansen é 62% do de Vesic.



# Enunciado

EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Solo | $\varphi' = 25°$ **(modelo com o qual o módulo é aberto);** $\varphi' = 35°$ **para comparação** |
| Métodos | **Hansen:** $N_\gamma = 1.5(N_q - 1)\tan\varphi$ **· Vesic:** $N_\gamma = 2(N_q + 1)\tan\varphi$ |

**PEDE-SE**

Determinar os valores de **$N_q$, $N_c$** e de **$N_\gamma$** pelos dois métodos; calcular em quantos por cento o valor de Hansen é menor que o de Vesic.

# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

**1** $N_q$ e $N_c$ ($\varphi' = 25°$, $\tan 25° = 0.4663$)

$$N_q = e^{\pi \tan 25^\circ} \tan^2(57.5^\circ) = e^{1.4649}(2.4639) = \mathbf{10.66} \qquad N_c = \frac{10.66 - 1}{0.4663} = \mathbf{20.72}$$

**2** $N_\gamma$: Hansen e Vesic

$$N_\gamma^{\text{Hansen}} = 1.5(10.66 - 1)(0.4663) = \mathbf{6.76}$$
$$N_\gamma^{\text{Vesic}} = 2(10.66 + 1)(0.4663) = \mathbf{10.88}$$

O $N_\gamma$ de Hansen corresponde a **62%** do de Vesic: no mesmo solo, a parcela do peso próprio resulta cerca de **38% menor**.

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

| φ′ (°) | $N_q$ | $N_c$ | $N_\gamma$ de Hansen | $N_\gamma$ de Vesic | Hansen / Vesic |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 2.47 | 8.34 | 0.39 | 1.22 | %32 |
| 15 | 3.94 | 10.98 | 1.18 | 2.65 | %45 |
| 20 | 6.40 | 14.83 | 2.95 | 5.39 | %55 |
| 25 | 10.66 | 20.72 | 6.76 | 10.88 | %62 |
| 30 | 18.40 | 30.14 | 15.07 | 22.40 | %67 |
| 32 | 23.18 | 35.49 | 20.79 | 30.21 | %69 |
| 35 | 33.30 | 46.12 | 33.92 | 48.03 | %71 |
| 40 | 64.20 | 75.31 | 79.54 | 109.41 | %73 |
| 45 | 134.87 | 133.87 | 200.81 | 271.75 | %74 |

Para φ′ = 35° vale o mesmo: $N_\gamma$ = 33.92 (Hansen) e 48.03 (Vesic), razão de 71%. A razão cresce de 32% a 74% à medida que φ′ aumenta e nunca chega a 1: **não misturar os métodos**.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Três coeficientes dependentes da razão B/L

TEORIA

Em uma sapata que não é corrida, a ruptura é tridimensional. Os fatores de forma de Hansen são semelhantes aos de De Beer; incluem a **razão $N_q/N_c$**:

$$s_c = 1 + \frac{B}{L}\frac{N_q}{N_c} \qquad s_q = 1 + \frac{B}{L}\sin\varphi \qquad s_\gamma = 1 - 0.4\,\frac{B}{L}$$

Em carregamento não drenado (φ = 0), a razão $N_q/N_c$ não se comporta bem; o coeficiente de coesão assume a sua própria forma simples. Esse coeficiente é **aditivo**, e não um multiplicador, por isso escreve-se $s'_c$:

$$s'_c = 0.2\,\frac{B}{L} \qquad (\varphi = 0)$$

Sapata corrida (B/L → 0): $s_c = s_q = s_\gamma = 1$ e $s'_c = 0$. Para sapatas quadradas e circulares, adota-se B/L = 1.

Comparação com De Beer: $s_c$ e $s_\gamma$ são iguais; em $s_q$, De Beer usa tan φ e Hansen usa sin φ.

**PARA φ′ = 25°**

| B/L | $s_c$ | $s_q$ | $s_\gamma$ |
|---|---|---|---|
| 0 (corrida) | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 0.5 | 1.257 | 1.211 | 0.800 |
| 1 (quadrada) | 1.515 | 1.423 | 0.600 |

# Enunciado

EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Solo | $\varphi' = 25°$: $N_c = 20.72,\ N_q = 10.66,\ \sin 25° = 0.4226$ **(Exemplo 1)** |
| Fundações | **(a) quadrado 2 × 2 m · (b) retângulo 2 × 4 m (B/L = 0.5) · (c) faixa** |
| Não drenado | **φ = 0: quadrada e 2 × 4 m** |

**PEDE-SE**

Para cada sapata, determinar os valores de $\mathbf{s_c}$, $\mathbf{s_q}$, $\mathbf{s_\gamma}$ ($s'_c$ para φ = 0); na sapata quadrada, comparar $s_q$ com o de De Beer.

# Solução

SOLUÇÃO

**1** (a) Sapata quadrada (B/L = 1)

$$s_c = 1 + (1)\frac{10.66}{20.72} = \mathbf{1.515} \qquad s_q = 1 + \sin 25^\circ = \mathbf{1.423} \qquad s_\gamma = 1 - 0.4 = \mathbf{0.600}$$

**2** (b) Retângulo 2 × 4 m (B/L = 0.5)

$$s_c = 1 + 0.5\frac{10.66}{20.72} = \mathbf{1.257} \qquad s_q = 1 + 0.5(0.4226) = \mathbf{1.211} \qquad s_\gamma = 1 - 0.2 = \mathbf{0.800}$$

**3** (c) Faixa e caso não drenado (φ = 0)

$$\text{faixa}: \; s_c = s_q = s_\gamma = 1 \qquad \varphi = 0: \; s_c' = 0.2 \; (\text{quadrada}),\; 0.1 \; (2 \times 4),\; 0 \; (\text{faixa})$$

Na sapata quadrada, o termo q aumenta **42%** e o termo de peso próprio diminui 40%. Para De Beer, $s_q$ = 1 + tan φ = 1.466; para Hansen, 1.423: a diferença é de cerca de 3%.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Forma linear e forma em arco-tangente

TEORIA

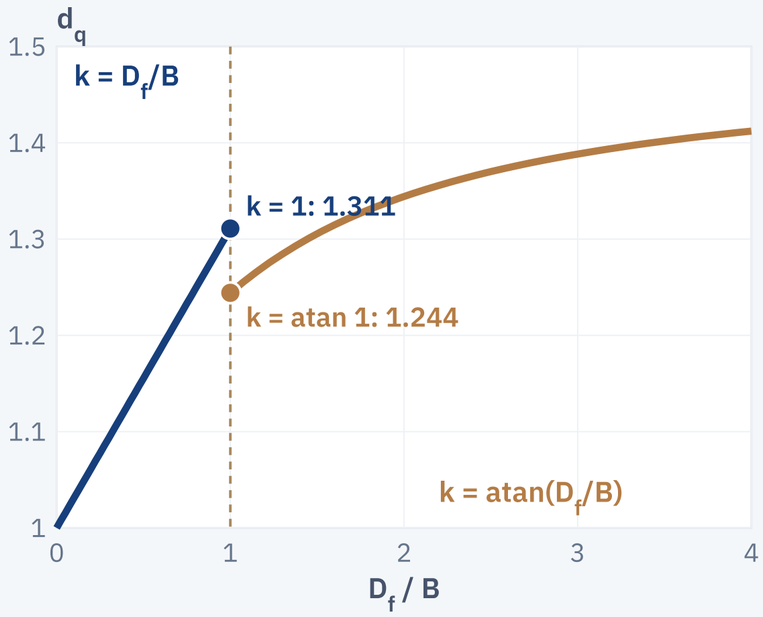
O solo acima da base contribui para a capacidade de carga. Os fatores de profundidade de Hansen dependem da razão **k = $D_f$/B**; quando $D_f$/B excede 1, k é tomado como arcotangente (em radianos):

$$d_c = 1 + 0.4\,k \qquad d_q = 1 + 2\tan\varphi\,(1-\sin\varphi)^2\,k \qquad d_\gamma = 1$$

$$k = \frac{D_f}{B}\quad\left(\frac{D_f}{B} \le 1\right) \qquad k = \tan^{-1}\frac{D_f}{B}\quad\left(\frac{D_f}{B} > 1\right)$$

Para φ = 0, $d_q$ = 1; na forma aditiva não drenada, escreve-se $d'_c = d_c - 1 = 0.4\,k$.

**As duas formas se encontram, com um degrau, em $D_f$/B = 1**: com k = 1, $d_q$ = 1.311; logo além, k = $\tan^{-1}1$ = 0.785 e $d_q$ = 1.244. Por isso, convém comparar valores vizinhos de $D_f$.



# Enunciado

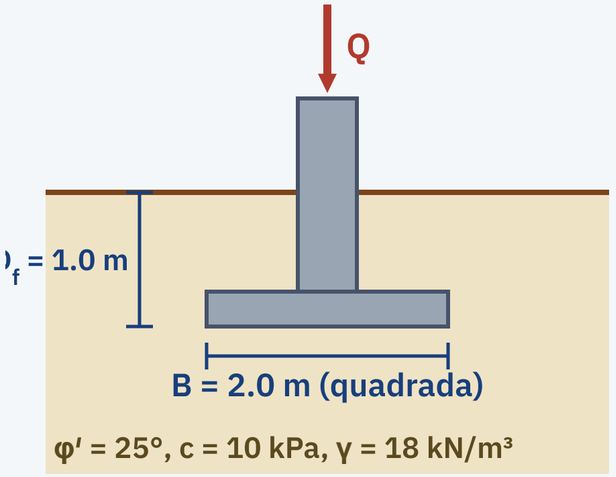
EXEMPLO

## Dados

| | |
|---|---|
| Solo | $\varphi' = 25°$: $\tan\varphi = 0.4663,\ (1 - \sin 25°)^2 = 0.3334$ |
| Fundação | **B = 2 m; $D_f$ = 1 m (exemplo), comparação com $D_f$ = 2 m e 3 m** |
| Não drenado | **φ = 0: $D_f$ = 1.5 m** |

**PEDE-SE**

Determinar os valores de **$d_c$, $d_q$** e $d_\gamma$ para cada caso; explicar o que ocorre quando $D_f$ passa de 2 m para 3 m.



# Solução

SOLUÇÃO

**1** $D_f$ = 1 m ($D_f/B$ = 0.5 ≤ 1: k = 0.5)

$$d_q = 1 + 2(0.4663)(0.3334)(0.5) = \mathbf{1.155} \qquad d_c = 1 + 0.4(0.5) = \mathbf{1.200} \qquad d_\gamma = 1$$

**2** $D_f$ = 2 m ($D_f/B$ = 1: linear, k = 1) e $D_f$ = 3 m ($D_f/B$ = 1.5: k = $\tan^{-1}1.5$ = 0.9828)

$$D_f = 2: \; d_q = 1 + 2(0.4663)(0.3334)(1) = \mathbf{1.311}, \; d_c = \mathbf{1.400}$$

$$D_f = 3: \; d_q = 1 + 2(0.4663)(0.3334)(0.9828) = \mathbf{1.306}, \; d_c = \mathbf{1.393}$$

**3** Não drenado (φ = 0): $D_f/B$ = 1.5/2 = 0.75

$$d_c = 1 + 0.4(0.75) = \mathbf{1.300} \quad (d'_c = 0.3) \qquad d_q = 1$$

$D_f$ = 2 m → 3 m: $d_q$ **diminui** de 1.311 para 1.306, porque k passa de 1 para $\tan^{-1}1.5$ = 0.98 (degrau). Já para $D_f$ = 1 → 2 m, aumenta de 1.155 para 1.311.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Com a carga real, não com o ângulo

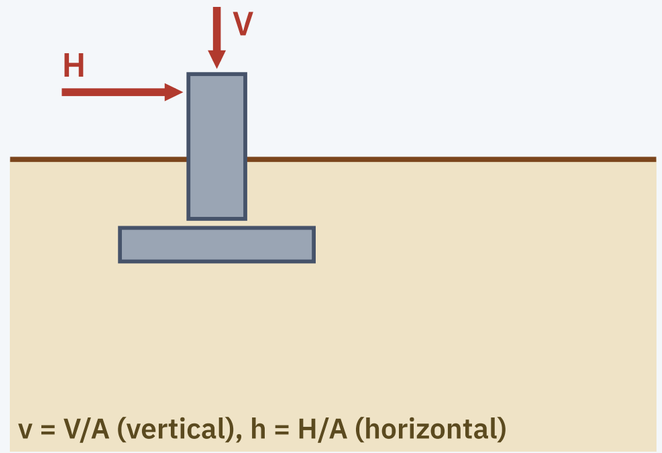
TEORIA

Os coeficientes de inclinação de Meyerhof dependem apenas do ângulo da carga com a vertical. Os de Hansen dependem das **tensões horizontal e vertical reais**; h = H/A e v = V/A são as tensões do mesmo caso de carga (v = $q_{app}$):

$$i_q = \left(1 - \frac{0.5\,h}{v + c\cot\varphi}\right)^5 \qquad i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_q - 1} \;\; (\geq 0)$$

$$i_\gamma = \left(1 - \frac{0.7\,h}{v + c\cot\varphi}\right)^5$$

$$\eta > 0: \;\; 0.7 \to 0.7 - \frac{\eta^\circ}{450^\circ}\;(i_\gamma) \qquad \varphi = 0: \;\; i'_c = 0.5\left(1 - \sqrt{1 - \frac{h}{c}}\right),\; i_q = i_\gamma = 1$$




Se h > 0, deve-se informar $q_{applied}$: a verificação da sapata com os fatores de inclinação usa **a mesma carga**.

À medida que h/(v + c cot φ) cresce, os três fatores tendem a zero; uma sapata próxima do deslizamento não tem mais capacidade de carga.

# A base não atinge a capacidade de carga antes de deslizar

TEORIA

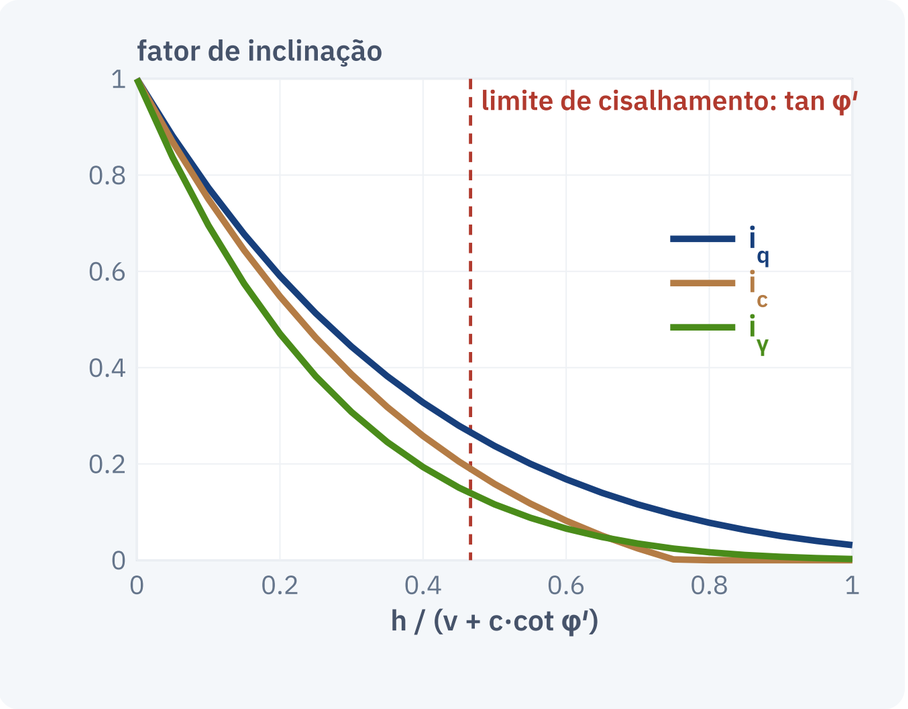
A fundação **desliza** quando a carga horizontal supera a resistência de atrito e adesão da base. Limite superior (adotando atrito na base φ e adesão c):

$$h_{shear} = v\tan\varphi + c = \tan\varphi\,(v + c\cot\varphi)$$

Se **h > v tan φ + c**, o módulo emite um aviso: a sapata sujeita a deslizamento não pode atingir a sua capacidade de carga; para a base real, verificar o deslizamento separadamente. No gráfico, esse limite é a linha **h/(v + c cot φ) = tan φ**.

Se **h ≥ v + c cot φ** (h ≥ c para φ = 0), o módulo é interrompido: os coeficientes de inclinação perdem o sentido.

Quando $i_c$ e $i_q$ ficam abaixo de $1/N_q$, são mantidos em zero; o termo de coesão nunca se torna negativo.



# Enunciado

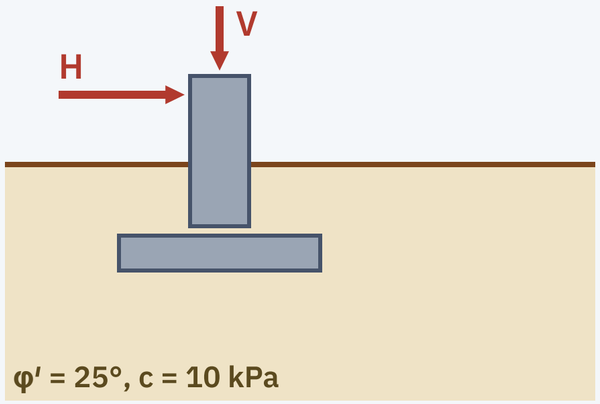
EXEMPLO

## Dados

| | |
|---|---|
| Fundação, solo | **modelo do módulo:** $c = 10\ \mathrm{kPa},\ \varphi' = 25°,\ N_q = 10.66$ |
| Caso de carga | $v = q_{apply} = 150\ \mathrm{kPa},\ h = 30\ \mathrm{kPa}$ **(ek: 60, 90, 120)** |
| Base | **horizontal (η = 0)** |

## PEDE-SE

Determinar os fatores $i_c$, $i_q$, $i_\gamma$ e verificar o limite de deslizamento.



# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

**1** Razão: v + c cot φ = 150 + 10 (2.1445) = 171.45 kPa

$$x = \frac{h}{v + c\cot\varphi} = \frac{30}{171.45} = \mathbf{0.1750}$$

**2** Coeficientes

$$i_q = (1 - 0.5 \cdot 0.175)^5 = \mathbf{0.633} \qquad i_\gamma = (1 - 0.7 \cdot 0.175)^5 = \mathbf{0.520}$$

$$i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_q - 1} = 0.633 - \frac{0.367}{9.66} = \mathbf{0.595}$$

**3** Limite de deslizamento

$$v\tan\varphi + c = 150(0.4663) + 10 = \mathbf{79.9}\ \text{kPa} \geq h = 30 \ \Rightarrow\ \text{sem deslizamento}$$

$$v + c\cot\varphi = 171.4\ \text{kPa} > h$$

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

| h (kPa) | h/(v + c cot φ) | $i_c$ | $i_q$ | $i_\gamma$ | verificação de deslizamento |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | passa |
| 30 | 0.175 | 0.595 | 0.633 | 0.520 | passa |
| 60 | 0.350 | 0.318 | 0.382 | 0.245 | passa |
| 90 | 0.525 | 0.137 | 0.218 | 0.101 | **aviso: h > 79.9** |
| 120 | 0.700 | 0.025 | 0.116 | 0.035 | **aviso: h > 79.9** |

h = 30 kPa (20% de v) reduz o termo q em **37%**, o termo c em **41%** e o termo do peso próprio em **48%**. Se a base é inclinada 10°, $i_\gamma = (1 - (0.7 - 10/450)\cdot 0.175)^5 = 0.532$. Com h = 90 e 120 kPa, que superam o limite, a sapata desliza: os fatores ainda são calculados, mas o deslizamento deve ser verificado à parte.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Base não plana e terreno inclinado

TEORIA

As sapatas reais nem sempre têm base plana nem estão em terreno plano: a base pode ser inclinada propositalmente ou a sapata pode estar na crista de um talude. Os fatores de Hansen cobrem ambos os casos (η e ω em graus; nas expressões exponenciais, em radianos):

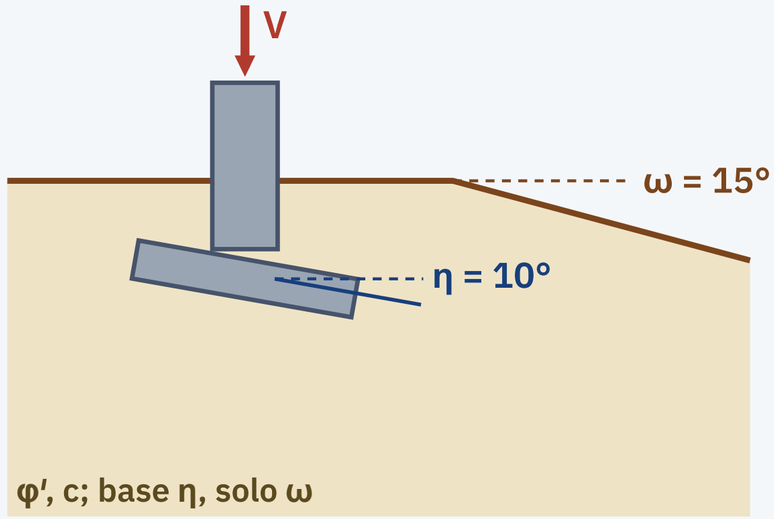
$$b_c = 1 - \frac{\eta^\circ}{147^\circ} \qquad b_q = e^{-2\eta \tan\varphi} \qquad b_\gamma = e^{-2.7\,\eta \tan\varphi}$$

$$g_c = 1 - \frac{\omega^\circ}{147^\circ} \qquad g_q = g_\gamma = (1 - 0.5\tan\omega)^5$$

O expoente de $b_\gamma$ (2.7) é maior que o de $b_q$ (2): a base inclinada prejudica mais o termo do peso próprio do que o termo da sobrecarga.

η e ω podem ser informados até no máximo 45°; se ω > φ, o talude não está em equilíbrio por si só e o módulo para.

(1 − tan ω)² é a forma de **Vesic**, não a de Hansen, e é ligeiramente maior: em ω = 5° fornece 0.833; a de Hansen, 0.800. Não deve ser confundida com a de Hansen nesta equação.



# Enunciado

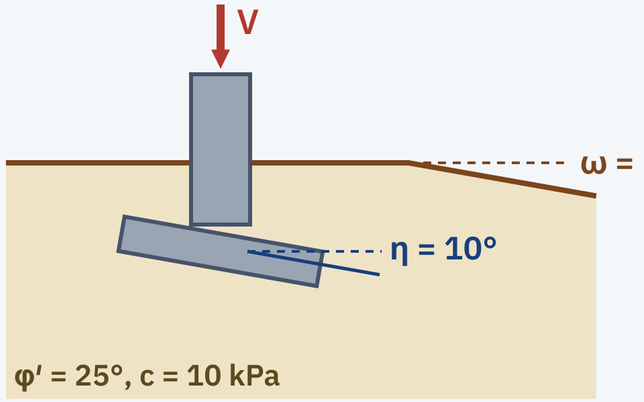
EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Solo | $\varphi' = 25^\circ,\ \tan\varphi = 0.4663$ |
| Inclinação da base | **η = 10°** |
| Inclinação do terreno | **ω = 10° e ω = 15°** |

**PEDE-SE**

Determinar os valores de $\mathbf{b_c}$, $\mathbf{b_q}$, $\mathbf{b_\gamma}$ e $\mathbf{g_c}$, $\mathbf{g_q}$, $\mathbf{g_\gamma}$; comparar $g_q$ com a forma $(1 - \tan\omega)^2$ de Vesic.



# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

**1** Inclinação da base η = 10° (0.1745 rad)

$$b_c = 1 - \frac{10}{147} = \mathbf{0.932} \quad b_q = e^{-2(0.1745)(0.4663)} = \mathbf{0.850} \quad b_\gamma = e^{-2.7(0.1745)(0.4663)} = \mathbf{0.803}$$

**2** Inclinação do terreno ω = 10° (tan 10° = 0.1763)

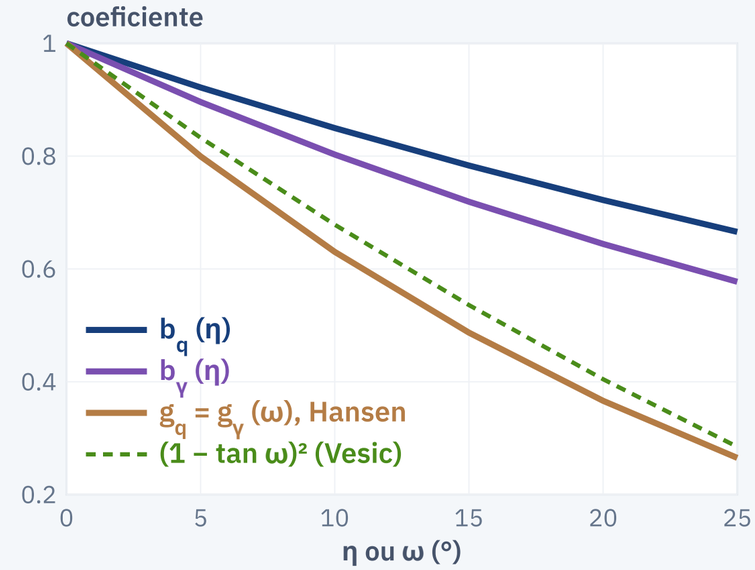
$$g_c = 1 - \frac{10}{147} = \mathbf{0.932} \quad g_q = g_\gamma = (1 - 0.5 \cdot 0.1763)^5 = (0.9118)^5 = \mathbf{0.630}$$

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

| ω (°) | $g_c$ | $g_q = g_\gamma$ Hansen | $g_q$ de Vesic $(1 - \tan \omega)^2$ |
|---|---|---|---|
| 10 | 0.932 | 0.630 | 0.678 |
| 15 | 0.898 | 0.487 | 0.536 |

O $g_q$ de Hansen é menor que o de Vesic (ω = 10°: 0.630 e 0.678): é mais **conservador**. Uma inclinação da base de η = 10° reduz o termo do peso próprio em 20% e o termo de sobrecarga em 15%.




Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Combinação dos seis coeficientes

TEORIA

Embora os seis coeficientes pareçam intimidadores, **no caso comum todos valem 1**; a equação completa só entra em jogo quando uma hipótese é violada. $q_u$ é a pressão vertical na ruptura; o módulo mantém separadas a pressão bruta e a líquida:

$$q_{u,net} = q_u - q \qquad q_{all,g} = \frac{q_u}{FS} \qquad q_{all,n} = \frac{q_{u,net}}{FS}$$

A tensão aplicada $q_{applied}$ é a **tensão vertical bruta** na base para o mesmo caso de carregamento (V/A). A sapata é aprovada nas seguintes condições:

$$q_{apply} \le q_{all,g} \qquad FS_{\text{actual}} = \frac{q_u}{q_{apply}} \qquad q_{apply} - q \le q_{all,n}$$

Carga vertical admissível $Q_{all} = q_{all,g} \cdot A$. Quando h > 0 e $q_{applied}$ não é informado, o módulo deixa de calcular não só as capacidades como também os fatores de inclinação.

### QUANDO O FATOR É 1?

| Coeficiente | caso em que é igual a 1 |
|---|---|
| s | sapata corrida (B/L = 0) |
| d | $D_f$ = 0 (base na superfície) |
| i | h = 0 (carga vertical) |
| b | η = 0 (base horizontal) |
| g | ω = 0 (terreno plano) |

# Os coeficientes não mudam; q e γ mudam

TEORIA

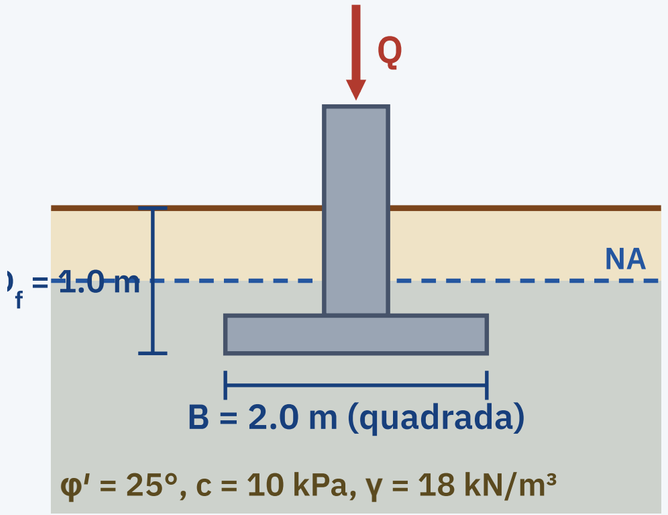
O módulo de Hansen trata a água subterrânea com **os mesmos três casos** dos demais módulos de capacidade de carga. Abaixo do nível do lençol freático, o peso específico efetivo é $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$ ($\gamma_w = 9.81$). $D_w$ é a profundidade do lençol freático a partir da superfície:

$$\text{I } (D_w \leq D_f):\ q = \gamma D_w + \gamma'(D_f - D_w),\ \ \gamma \to \gamma' \text{ (terceiro termo)}$$

$$\text{III } (D_f < D_w \leq D_f + B):\ q = \gamma D_f,\ \ \bar{\gamma} = \frac{1}{B}\left[\gamma D + \gamma'(B - D)\right],\ D = D_w - D_f$$

Para $D_w = D_f$, adota-se $q = \gamma D_f$ e utiliza-se $\gamma'$ no terceiro termo.

A água a mais de B abaixo da base é **ineficaz**. A água entra apenas por meio de **q e γ**; s, d, i, b, g permanecem os mesmos.



# Enunciado

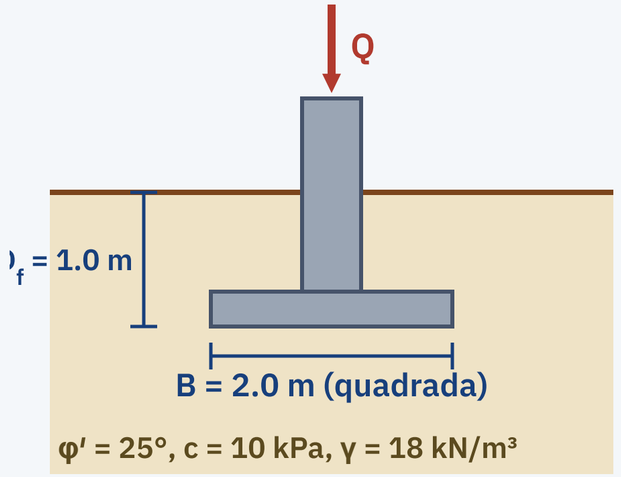
EXEMPLO

## Dados

| | |
|---|---|
| Fundação | **quadrada, B = L = 2.0 m, profundidade da base $D_f$ = 1.0 m** |
| Solo | $c = 10\ \mathrm{kPa},\ \varphi' = 25^\circ$ |
| Peso específico | $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$**; sem lençol freático** |
| Carga | **vertical, centrada** |
| Segurança | **FS = 3** |

## PEDE-SE

**$q_u$, $q_{all}$** bruta e líquida e a carga admissível **$Q_{all}$**; determinar a contribuição de cada termo.



# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

**1** Fatores de capacidade de carga (φ′ = 25°)

$$N_c = \mathbf{20.72}, \quad N_q = \mathbf{10.66}, \quad N_\gamma = 1.5(10.66 - 1)(0.4663) = \mathbf{6.758}$$

**2** Fatores de correção (B/L = 1; $D_f/B$ = 0.5; h = η = ω = 0)

$$s_c = 1.515,\ s_q = 1.423,\ s_\gamma = 0.6 \qquad d_c = 1.200,\ d_q = 1.155,\ d_\gamma = 1 \qquad i = b = g = 1$$

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

**3** Capacidade de carga ($q = \gamma D_f = 18$ kPa)

$$q_u = 10(20.72)(1.515)(1.200) + 18(10.66)(1.423)(1.155)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(18)(2)(6.758)(0.6) = 376.6 + 315.5 + 73.0 = \mathbf{765.05}\ \text{kPa}$$

**4** Tensão admissível e carga ($A = 2^2 = 4$ m²)

$$q_{all,g} = \frac{765.05}{3} = \mathbf{255.02}\ \text{kPa} \qquad q_{all,n} = \frac{765.05 - 18}{3} = 249.02\ \text{kPa}$$

$$Q_{all} = 255.02(4) = \mathbf{1{,}020}\ \text{kN}$$

**49%** da capacidade de carga provém da coesão, **41%** da sobrecarga e apenas **10%** do peso próprio: o pequeno $N_\gamma$ e $s_\gamma = 0.6$ enfraquecem o termo do peso próprio.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

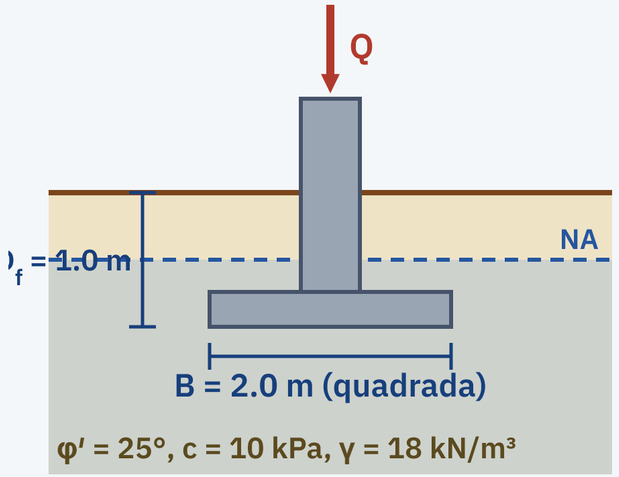
EXEMPLO

## Dados

| | |
|---|---|
| Fundação | **quadrada, B = L = 2.0 m, $D_f$ = 1.0 m** |
| Solo | $c = 10\ \mathrm{kPa},\ \varphi' = 25^\circ$ |
| Peso específico | $\gamma = 18$ **(acima),** $\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3}$ **(abaixo do nível do lençol freático)** |
| Água subterrânea | **$D_W$ = 0.5; 1.0; 2.0 e 4.0 m** |

## PEDE-SE

Para cada caso, determinar **q**, o peso específico do terceiro termo e os valores de $q_u$. (Fatores como no Exemplo 6.)



# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

**1** Caso I ($D_W \le D_f$): $\gamma' = 19 - 9.81 = 9.19$ kN/m³

$$D_w = 0.5: \; q = 18(0.5) + 9.19(0.5) = \mathbf{13.595}\ \mathrm{kPa}$$

$$D_w = 1.0: \; q = 18(1.0) = \mathbf{18.0}\ \mathrm{kPa}$$

**2** Caso III ($D_W = 2.0 \Rightarrow D = 1.0 \le B$) e água sem efeito ($D_W = 4.0 \Rightarrow D = 3.0 > B$)

$$D_w = 2.0: \; \bar{\gamma} = \frac{1}{2}\left[18(1) + 9.19(1)\right] = \mathbf{13.595}\ \mathrm{kN/m^3},\ q = 18\ \mathrm{kPa}$$

$$D_w = 4.0: \; q = 18\ \mathrm{kPa},\ \gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$$

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

| $D_w$ (m) | Situação | q (kPa) | terceiro termo (γ) | $q_u$ (kPa) |
|---|---|---|---|---|
| 0.5 | I | 13.59 | 9.19 | **652.1** |
| 1.0 | I | 18.00 | 9.19 | **729.3** |
| 2.0 | III | 18.00 | 13.59 | **747.2** |
| 4.0 | desprezível | 18.00 | 18.00 | **765.1** |

Com o lençol freático a 0.5 m, $q_u$ = 652; com ele profundo, 765 kPa (diferença de 15%). A origem da diferença está **apenas em q e γ**: o termo de coesão (376.6 kPa) não se altera.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

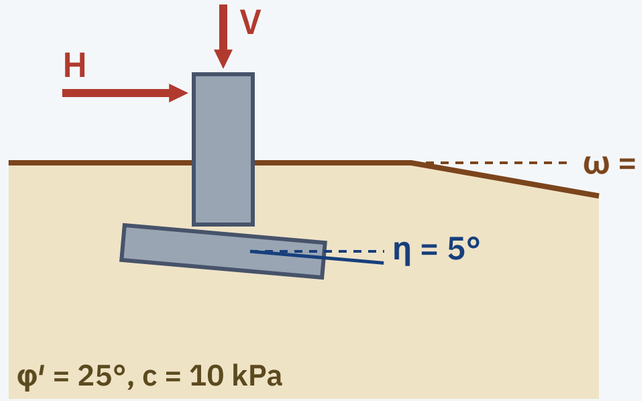
EXEMPLO

## Dados

| | |
|---|---|
| Fundação | **quadrada, B = L = 2.0 m, profundidade da base $D_f$ = 1.0 m** |
| Solo | $c = 10\ \mathrm{kPa},\ \varphi' = 25^\circ$ |
| Peso específico | $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$**; sem lençol freático** |
| Caso de carga | $v = q_{apply} = 150\ \mathrm{kPa},\ h = 30\ \mathrm{kPa}$ |
| Base, solo | **η = 5°, ω = 10°** |
| Segurança | **FS = 3** |

## PEDE-SE

Determinar $\mathbf{q_u}$ e $\mathbf{q_{all}}$; verificar se a sapata atende para $q_{applied}$ = 150 kPa; verificar o deslizamento.



# Solução (1/3)

SOLUÇÃO

**1** Fatores de inclinação (v + c cot φ = 171.45 kPa; base inclinada: 0.7 → 0.7 − 5/450 = 0.6889)

$$x = \frac{30}{171.45} = 0.175 \qquad i_q = (1 - 0.5x)^5 = \mathbf{0.633} \qquad i_c = \mathbf{0.595}$$

$$i_\gamma = (1 - 0.6889x)^5 = \mathbf{0.526}$$

**2** Fatores de inclinação da base e do terreno (η = 5°, ω = 10°)

$$b_c = 0.966,\ b_q = 0.922,\ b_\gamma = 0.896$$

$$g_c = 0.932,\ g_q = g_\gamma = (1 - 0.5\tan 10^\circ)^5 = 0.630$$

# Solução (2/3)

SOLUÇÃO

**3** Três termos (fatores de forma e de profundidade como no Exemplo 6)

$$c\text{ termo} = 10(20.72)(1.515)(1.20)(0.595)(0.966)(0.932) = 201.6$$

$$q\text{ termo} = 18(10.66)(1.423)(1.155)(0.633)(0.922)(0.630) = 116.0$$

$$\gamma\text{ termo} = \tfrac{1}{2}(18)(2)(6.758)(0.6)(1)(0.526)(0.896)(0.630) = 21.7$$

**4** Capacidade de carga e tensão admissível

$$q_u = 201.6 + 116.0 + 21.7 = \mathbf{339.3}\ \text{kPa} \qquad q_{all,g} = \frac{339.3}{3} = \mathbf{113.1}\ \text{kPa}$$

# Solução (3/3)

SOLUÇÃO

**5** Verificação ($q_{app}$ = 150 kPa)

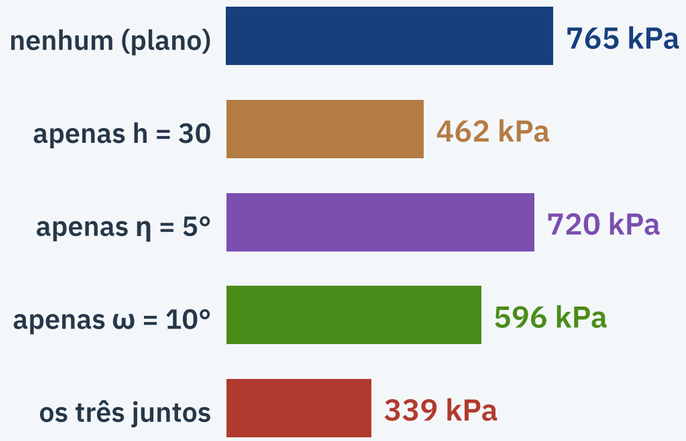
$$q_{apply} = 150 > q_{all,g} = 113.1 \;\Rightarrow\; \textbf{não atende}$$

$$FS_{\text{actual}} = \frac{339.3}{150} = \mathbf{2.26} < 3$$

**6** Limite de deslizamento

$$h = 30 \leq v\tan\varphi + c = 79.9\ \text{kPa} \;\Rightarrow\; \text{sem aviso de deslizamento}$$

$q_u$, que vale 765 kPa no modelo plano, reduz-se a **339 kPa** (56%) nesta combinação de cargas. Isoladamente: carga horizontal **–40%**, inclinação do terreno –22%, inclinação da base –6%. A sapata não atende (FS = 2.26 < 3); soluções: aumentar B ou $D_f$, reduzir h, nivelar a base.




Verificar a solução no GeoTerva ↗

# φ = 0: o termo de coesão entra de forma aditiva

TEORIA

Para φ = 0, o termo de coesão multiplicativo não é utilizado. Hansen o escreve de forma **aditiva**: as correções são somadas a, ou subtraídas de, 1, de modo que o termo de coesão não se anula quando h, η e ω são nulos. $N_c$ = 5.14, $N_q$ = 1, $N_\gamma$ = 0:

$$q_u = c\,N_c\,(1 + s'_c + d'_c - i'_c - b'_c - g'_c) + q\,g_q$$

$$s'_c = 0.2\frac{B}{L} \quad d'_c = 0.4k \quad i'_c = 0.5\left(1 - \sqrt{1 - \frac{h}{c}}\right) \quad b'_c = \frac{\eta^\circ}{147^\circ} \quad g'_c = \frac{\omega^\circ}{147^\circ}$$

O termo de sobrecarga reduz-se a q $g_q$: em terreno plano, apenas q. Não há termo de peso próprio ($N_\gamma$ = 0).

Deve-se ter **h < c**; se h ≥ c, a base desliza e o módulo é interrompido. O termo entre parênteses também deve permanecer positivo (se h, η e ω forem simultaneamente muito grandes, o termo de coesão se tornaria negativo).

**EXEMPLO: c = 40 kPa, quadrado de 2 m, $D_f$ = 1 m**

| Coeficiente | Valor |
|---|---|
| $s'_c$ = 0.2(B/L) | 0.2 |
| $d'_c$ = 0.4 k (k = 0.5) | 0.2 |
| $i'_c$, $b'_c$, $g'_c$ | 0 |
| parêntese | 1.4 |

$q_u$ = 40 × 5.14 × 1.4 + 18 = **305.84 kPa**

# Enunciado

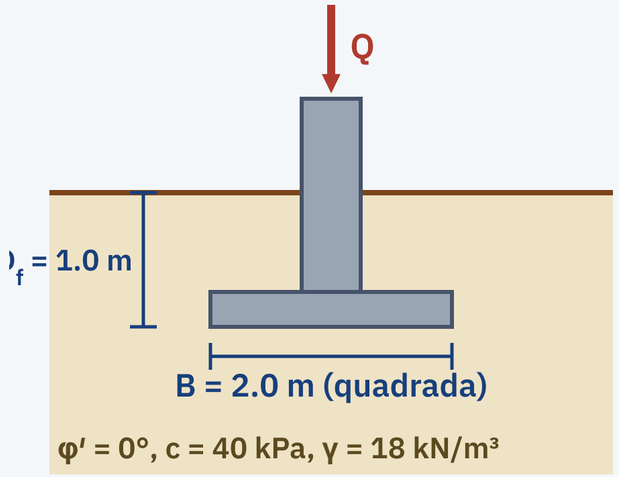
EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Fundação | **quadrada B = L = 2 m, $D_f$ = 1 m** |
| Solo | **argila:** $\varphi = 0,\ c_u = 40\ \mathrm{kPa},\ \gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$**; sem lençol freático** |
| Casos | **(a) carga vertical · (b)** $v = 100,\ h = 10\ \mathrm{kPa}$ **· (c)** $h = 10$ **e** $\eta = \omega = 10^\circ$ |

**PEDE-SE**

Determinar o valor de $q_u$ para cada caso.



# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

**1** (a) Carga vertical: termo entre parênteses 1 + s′c + d′c = 1 + 0.2 + 0.2

$$q_u = 40(5.14)(1.4) + 18 = 287.84 + 18 = \mathbf{305.84}\ \text{kPa}$$

**2** (b) h = 10 kPa (h/c = 0.25 < 1)

$$i'_c = 0.5\left(1 - \sqrt{0.75}\right) = 0.0670 \;\Rightarrow\; q_u = 40(5.14)(1.4 - 0.0670) + 18 = \mathbf{292.07}\ \text{kPa}$$

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

**3** (c) h = 10 kPa, η = ω = 10°: $b'_c = g'_c = 10/147 = 0.068$; $g_q = (1 - 0.5 \tan 10°)^5$

$$1.4 - 0.067 - 0.068 - 0.068 = 1.197$$

$$q_u = 40(5.14)(1.197) + 18(0.630) = 246.1 + 11.3 = \mathbf{257.4}\ \text{kPa}$$

| Situação | parêntese | c $N_c$(...) | q $g_q$ | $q_u$ (kPa) |
|---|---|---|---|---|
| (a) vertical | 1,400 | 287.8 | 18.0 | **305.8** |
| (b) h = 10 | 1.333 | 274.1 | 18.0 | **292.1** |
| (c) h, η, ω | 1.197 | 246.1 | 11.3 | **257.4** |

Somente h = 10 kPa reduz a capacidade de carga em 5%, e, junto com h, a inclinação da base e do terreno a reduz em 16%. Graças à forma aditiva, o termo de coesão não se anula no caso plano e vertical: 305.84 kPa.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

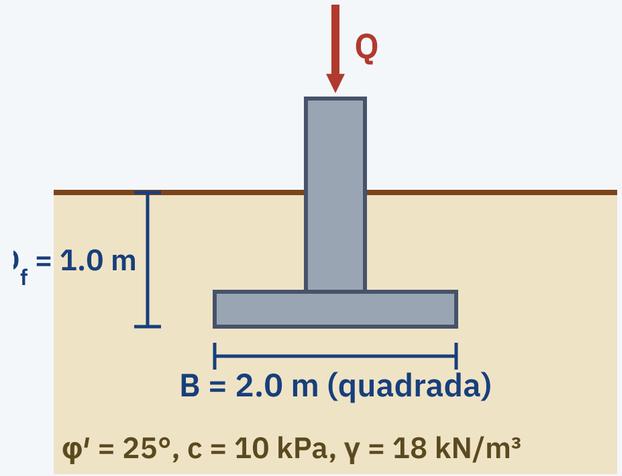
EXEMPLO

## Dados

| | |
|---|---|
| Fundação | **quadrada, B = L = 2.0 m, profundidade da base $D_f$ = 1.0 m** |
| Solo | $c = 10\ \mathrm{kPa},\ \varphi' = 25°$ |
| Peso específico | $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$**; sem lençol freático** |
| Comparação | **Equação de Vesic: fator de forma de De Beer, $N_\gamma$ de Vesic, $d_c = d_q - (1 - d_q)/(N_c \tan \varphi)$** |
| Caso de carregamento (adicional) | **Exemplo 8: $q_{app}$ = 150, h = 30 kPa, η = 5°, ω = 10°** |

## PEDE-SE

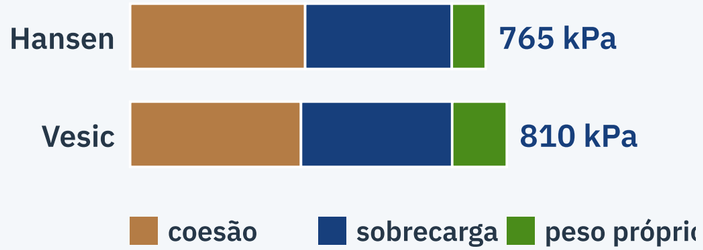
Comparar, termo a termo, os valores de $q_u$ das duas equações; em seguida, também para o caso de carregamento do Exemplo 8.



# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

| | Hansen | Vesic |
|---|---|---|
| $N_\gamma$ | 6.76 | 10.88 |
| $s_q$ | 1.423 | 1.466 |
| $d_c$ | 1.200 | 1.172 |
| termo c | 376.6 | 367.7 |
| termo q | 315.5 | 325.2 |
| termo γ | 73.0 | 117.5 |
| **$q_u$ (kPa)** | **765.1** | **810.3** |



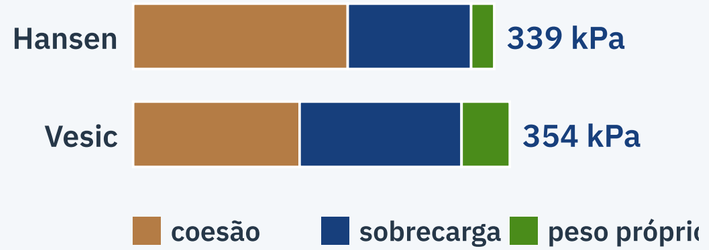

Hansen é **5.6% menor** (765 e 810 kPa). A diferença está quase inteiramente na parcela do peso próprio (73 e 117 kPa): $N_\gamma$ é pequeno.

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

| Coeficiente | Hansen | Vesic |
|---|---|---|
| $i_c$, $i_q$, $i_\gamma$ | 0.595 · 0.633 · 0.526 | 0.723 · 0.749 · 0.618 |
| $b_c$, $b_q$, $b_\gamma$ | 0.966 · 0.922 · 0.896 | 0.912 · 0.920 · 0.920 |
| $g_c$, $g_q$, $g_\gamma$ | 0.932 · 0.630 · 0.630 | 0.645 · 0.678 · 0.678 |
| **$q_u$ (kPa)** | **339.3** | **354.0** |

Para o mesmo caso de carga, a diferença é de 4.3%: os expoentes de inclinação de Vesic m = 1.5 (sapata quadrada) e as formas b = (1 − η tan φ)², g = (1 − tan ω)² dão uma **penalização um pouco menor** que as de Hansen. Não se devem misturar as duas equações; os coeficientes de cada método são consistentes com o seu próprio $N_\gamma$.




Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

# Pontos-chave

**Equação de Hansen**: $q_u = cN_c(s\ d\ i\ b\ g) + qN_q(s\ d\ i\ b\ g) + \frac{1}{2}\gamma BN_\gamma(s\ d\ i\ b\ g)$; no caso comum, $i = b = g = 1$

**$N_\gamma = 1.5(N_q - 1)\tan\varphi$**: menor que o de Vesic ($\varphi' = 25°$: 6.76 e 10.88); os coeficientes do método são usados em conjunto

**Forma**: $s_c = 1 + (B/L)(N_q/N_c)$, $s_q = 1 + (B/L)\sin\varphi$, $s_\gamma = 1 - 0.4\ B/L$ · **Profundidade**: $k = D_f/B$ ou $\tan^{-1}(D_f/B)$; degrau em $D_f/B = 1$

**Inclinação**: com h e v reais; $i_q = (1 - 0.5h/(v + c\cot\varphi))^5$, $i_\gamma = (1 - 0.7h/(\ldots))^5$; aviso de deslizamento se $h > v\tan\varphi + c$, interrupção se $h \geq v + c\cot\varphi$

**Inclinação da base** $b_q = e^{-2\eta\tan\varphi}$, $b_\gamma = e^{-2.7\eta\tan\varphi}$; **inclinação do terreno** $g_q = g_\gamma = (1 - 0.5\tan\omega)^5$ (o $(1 - \tan\omega)^2$ de Vesic é diferente)

**Não drenado ($\varphi = 0$)**: $cN_c(1 + s' + d' - i' - b' - g') + qg_q$; $N_c = 5.14$, $N_\gamma = 0$; $h < c$

A **água subterrânea** altera apenas q e γ; **verificação**: $q_{applied} \leq q_{all,g}$, $FS_{actual}$ e líquido

# Referências bibliográficas

A equação completa da capacidade de carga de Hansen — seus próprios Nγ, fatores de forma, fatores de inclinação da carga, da base e do terreno — segue Hansen, J.B., A Revised and Extended Formula for Bearing Capacity, Danish Geotechnical Institute Bulletin 28, 1970, conforme apresentado de forma consistente nas referências bibliográficas geotécnicas padrão. Os fatores de profundidade utilizados em toda esta seção são os de Hansen, conforme exposto em Das, B.M., Principles of Geotechnical Engineering, 9ª ed., Cengage Learning, 2018 (Capítulo 16).

**NOTA**

Parte das figuras desta apresentação foi extraída da página de Teoria do GeoTerva; todos os exemplos numéricos foram gerados com a biblioteca de cálculo do próprio módulo, e o módulo fornece os mesmos valores.

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

# Da teoria à prática

Calcular passo a passo, no GeoTerva, a fundação do exemplo desta apresentação: o módulo abre com este modelo.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

**Abrir no celular**
Os módulos de teste não exigem cadastro.