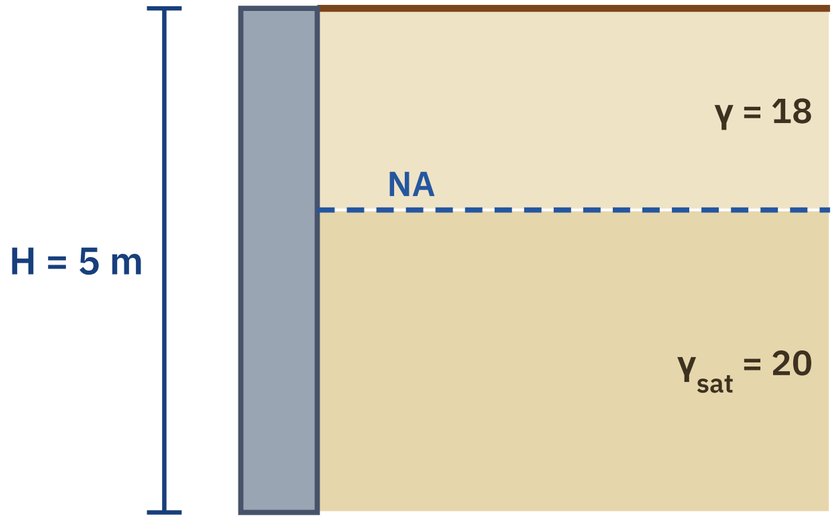
Apresentação de aula de geotecnia · Empuxo de terra

Empuxo de terra em repouso

Aula: empuxo em repouso atrás de um muro que não pode se deslocar (parede de subsolo, encontro de arco, bueiro); relações do coeficiente K_0, reaterro seco e submerso, solo estratificado; exemplo resolvido em cada tópico.

$K_0 = \sigma'_h / \sigma'_o$ · Jaky · Mayne–Kulhawy · Massarsch · Sherif · Aterro em camadas · Lençol freático



Introdução

O que veremos nesta aula?

- Quando se desenvolve o **empuxo em repouso** e qual é sua relação com o estado ativo / passivo
- Calcular o **coeficiente K_0** em areia (Jaky, Sherif), em solo sobre-adensado (Mayne–Kulhawy) e em argila (Massarsch)
- Em aterro seco, a força $P_0 = \frac{1}{2}K_0\gamma H^2$ e sua altura de aplicação H/3
- Como a **água subterrânea** acrescenta pressão; o salto de K_0 no limite entre camadas em reaterro estratificado
- Comparar os estados ativo – em repouso – passivo e o movimento necessário do muro

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: qual é a regra e por que é assim?

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

As forças são dadas por unidade de comprimento do muro (kN/m); as pressões em kPa; as tensões são efetivas.

Muro indeslocável

TEORIA

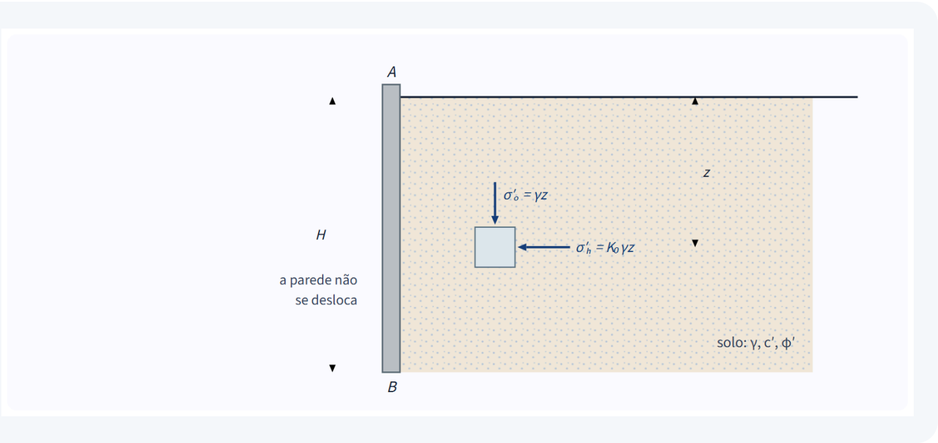
Um muro travado por pavimentos de subsolo, um apoio de arco sobre estacas ou uma parede de bueiro **não pode deslocar-se**; o solo atrás dele mantém o estado de tensões que tinha in situ. A razão entre a tensão efetiva horizontal e a tensão efetiva vertical é o **coeficiente de empuxo em repouso**:

$$K_0 = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_o} \qquad \sigma'_o = \gamma z \qquad \sigma'_h = K_0 \gamma z$$

Se o muro se afasta do solo, a pressão **cai** ao valor ativo; se é empurrado contra o solo, **sobe** ao valor passivo; $K_a < K_0 < K_p$.

Os movimentos necessários são pequenos no estado ativo e grandes no passivo (Teoria: Movimento necessário).

K_0 é obtido de ensaios (pressiômetro, dilatômetro) ou de correlação; o módulo usa um dos dois para cada camada.



Areia, solo sobre-adensado e argila

TEORIA

$$K_0 = 1 - \sin\varphi' \qquad \text{(Jaky 1944, areia, NC)}$$

$$K_0 = (1 - \sin\varphi') + \left(\frac{\gamma_d}{\gamma_{d(min)}} - 1\right) 5.5 \qquad \text{(Sherif et al. 1984, areia compactada)}$$

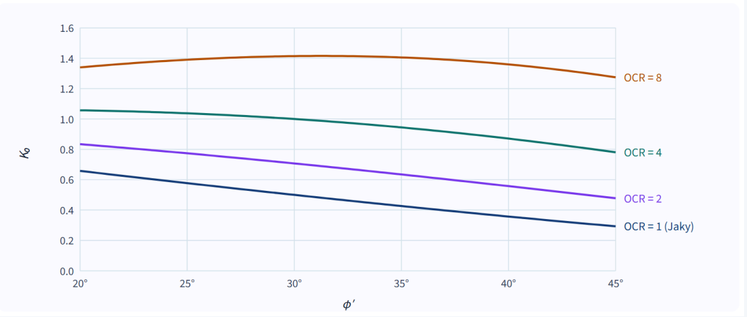
$$K_0 = (1 - \sin\varphi')\, OCR^{\sin\varphi'} \qquad \text{(Mayne–Kulhawy 1982)}$$

$$K_{0(NC)} = 0.44 + 0.42\frac{PI(\%)}{100} \qquad K_{0(OC)} = K_{0(NC)}\sqrt{OCR} \qquad \text{(Massarsch 1979, argila)}$$

Jaky **subestima** a pressão em areia compactada: a compactação torna o aterro sobre-adensado; Sherif corrige isso com $\gamma_d/\gamma_{d,min}$.

OCR = razão entre a maior tensão efetiva do passado e a tensão efetiva atual. Para OCR = 4, φ′ = 30°, K_0 = 1: as tensões horizontal e vertical são iguais.

K_0 – φ′ (curvas de OCR)



Enunciado

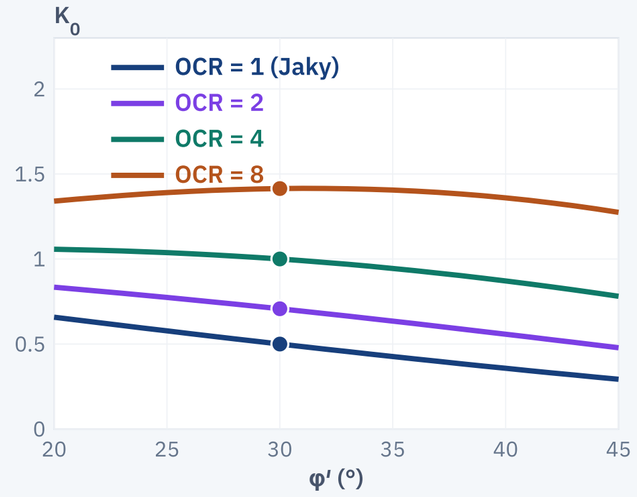
EXEMPLO

Dados

Solo	**areia não coesiva,** $\varphi' = 30^\circ$
Casos	$OCR = 1,\ 2,\ 4,\ 8$ **(também** $\varphi' = 25^\circ,\ 35^\circ,\ 40^\circ$ **para** $OCR = 1$**)**

PEDE-SE

K_0 para cada caso; OCR para o qual $K_0 = 1$; comparação com K_a e K_p de Rankine.



Solução

SOLUÇÃO

1 Areia normalmente adensada (Jaky)

$$\varphi' = 30^\circ:\ K_0 = 1 - \sin 30^\circ = \mathbf{0.5000}$$

$$\varphi' = 25^\circ:\ 0.577 \qquad 35^\circ:\ 0.426 \qquad 40^\circ:\ 0.357$$

2 Sobre-adensado (expoente de OCR sin φ′ = 0.5)

OCR	1	2	4	8
$K_0 = 0.5 \cdot OCR^{0.5}$	0.500	0.707	1.000	1.414

K_0 aumenta com o OCR: para OCR = 4, **$K_0 = 1$** (tensão hidrostática); para OCR = 8, 1.41. Os valores de Rankine, $K_a = 0.333$ e $K_p = 3.0$, ficam fora de todos os OCR: $K_a < K_0 < K_p$ é sempre satisfeita.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Solo	**aterro de areia compactada: $\varphi' = 34^\circ$, peso específico seco $\gamma_d = 16.0\ \mathrm{kN/m^3}$; no estado mais fofo $\gamma_{d(min)} = 14.5\ \mathrm{kN/m^3}$**

PEDE-SE

K_0 (Sherif) e comparação com Jaky.

Solução

SOLUÇÃO

1 Jaky (sem compactação)

$$K_0 = 1 - \sin 34^\circ = \mathbf{0.4408}$$

2 Sherif: acréscimo por compactação

$$\frac{\gamma_d}{\gamma_{d(min)}} - 1 = \frac{16.0}{14.5} - 1 = 0.1034$$

$$K_0 = 0.4408 + (0.1034)(5.5) = \mathbf{1.010}$$

A compactação elevou K_0 de 0.44 para **1.01** (2.3 vezes): o muro atrás de um aterro compactado deve resistir a uma pressão muito maior que a do cálculo para solo normalmente adensado.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Solo	**argila: índice de plasticidade** $PI = 25\%$
Casos	$OCR = 1$ **e** $OCR = 2$**; também** $PI = 10,\ 40,\ 60\%$

PEDE-SE

K_0 para argila normalmente adensada e sobre-adensada.

Solução

SOLUÇÃO

1 PI = 25 %

$$K_{0(NC)} = 0.44 + 0.42\frac{25}{100} = \mathbf{0.5450}$$

$$K_{0(OC)} = K_{0(NC)}\sqrt{OCR} = 0.5450\sqrt{2} = \mathbf{0.7707}$$

2 Aumento com a plasticidade

PI (%)	$K_{0(NC)}$	OCR = 2	OCR = 4
10	0.482	0.682	0.964
25	0.545	0.771	1.090
40	0.608	0.860	1.216
60	0.692	0.979	1.384

Na argila, K_0 aumenta com a plasticidade; para OCR = 2 e PI = 25 % resulta **0.771**. Na argila sobre-adensada, K_0 é multiplicado por √OCR (esse multiplicador não faz parte da relação de Massarsch, mas é uma aproximação usual).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Triângulo de pressões e força

TEORIA

Em um reaterro seco de peso específico γ, a tensão efetiva horizontal aumenta linearmente com a profundidade; a força por unidade de comprimento do muro é a área do triângulo e atua a H/3 acima da base:

$$\sigma'_h = K_0 \gamma z \qquad P_0 = \tfrac{1}{2} K_0 \gamma H^2 \qquad \bar{z} = \tfrac{H}{3}$$

No aterro em camadas, σ'_o é somada camada a camada e cada camada adota o seu próprio valor de K_0: em cada limite em que K_0 muda, **σ'_h dá um salto, enquanto σ'_o não**.

A força cresce com H^2; o OCR e a compactação aumentam a força em proporção direta a K_0.

Enunciado

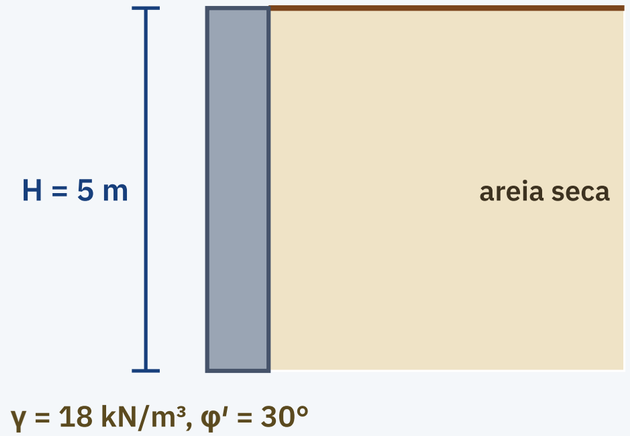
EXEMPLO

PEDE-SE

Para cada caso, **$\sigma'_h(H)$**, **P_0** e a altura de aplicação.

Dados

Muro	$H = 5$ **m, não pode se deslocar**
Solo	**areia seca:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ$
Casos	$OCR = 1$ **e** $OCR = 2$



Solução

SOLUÇÃO

1 OCR = 1 (Jaky: $K_0 = 0.5$)

$$\sigma'_h(5) = K_0 \gamma H = 0.5(18)(5) = \mathbf{45.00}\ \text{kPa}$$

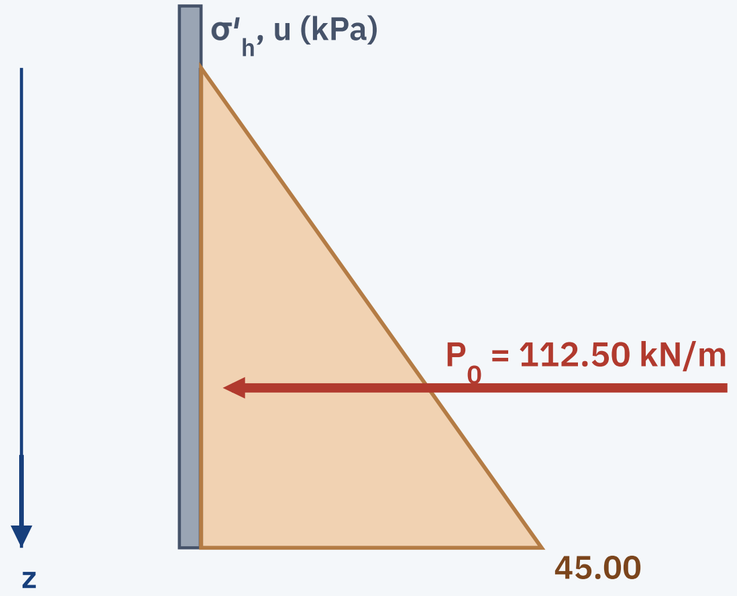
$$P_0 = \tfrac{1}{2}(45.00)(5) = \mathbf{112.50}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \tfrac{5}{3} = 1.67\ \text{m}$$

2 OCR = 2 (Mayne–Kulhawy: $K_0 = 0.7071$)

$$\sigma'_h(5) = 0.7071(18)(5) = \mathbf{63.64}\ \text{kPa}$$

$$P_0 = \tfrac{1}{2}(63.64)(5) = \mathbf{159.10}\ \text{kN/m}$$

P_0 = **112.50 kN/m** (OCR = 1) e **159.10 kN/m** (OCR = 2), ambos 1.67 m acima da base; o sobre-adensamento aumentou a força em 41%.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Tensão efetiva + pressão da água

TEORIA

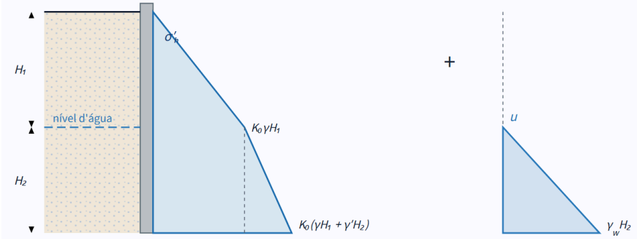
Se o lençol freático está na profundidade H_1 (sem água diante do muro), acima dele $\sigma'_h = K_0\gamma z$; abaixo dele, a tensão efetiva é obtida com $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$, e a pressão da água é adicionada integralmente, **independentemente** de K_0:

$$\sigma'_h = K_0\left[\gamma H_1 + \gamma'(z - H_1)\right] \qquad u = \gamma_w(z - H_1) \qquad \sigma_h = \sigma'_h + u$$

$$P_0 = \tfrac{1}{2}K_0\gamma H_1^2 + K_0\gamma H_1 H_2 + \tfrac{1}{2}\left(K_0\gamma' + \gamma_w\right)H_2^2$$

A altura de aplicação obtém-se do momento das áreas em relação ao ponto da base.

$\gamma_w = 9.81$, $K_0\gamma' \approx 0.5\cdot 10 = 5$: **a parcela da água é, muitas vezes, maior que a parcela do solo**.



Enunciado

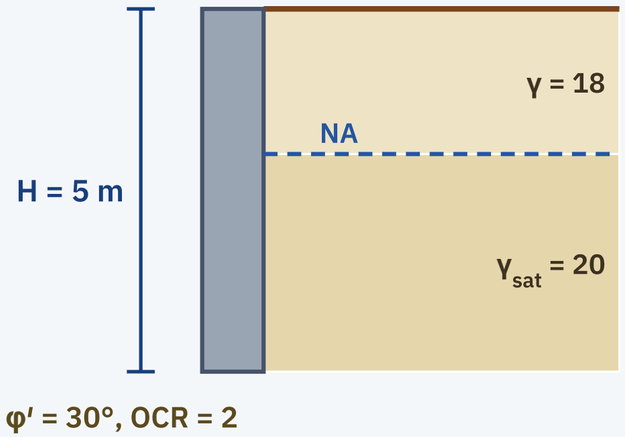
EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 5$ **m, não pode se deslocar**
Solo	**areia:** $c' = 0,\ \varphi' = 30°,\ OCR = 2$**;** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$ **(acima),** $\gamma_{sat} = 20\ \mathrm{kN/m^3}$ **(abaixo)**
Água subterrânea	**a 2 m de profundidade; sem água à frente do muro**

PEDE-SE

Diagrama de pressões, $\mathbf{P_0}$ total (solo + água) e altura de aplicação. Este é o muro inicial do módulo.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

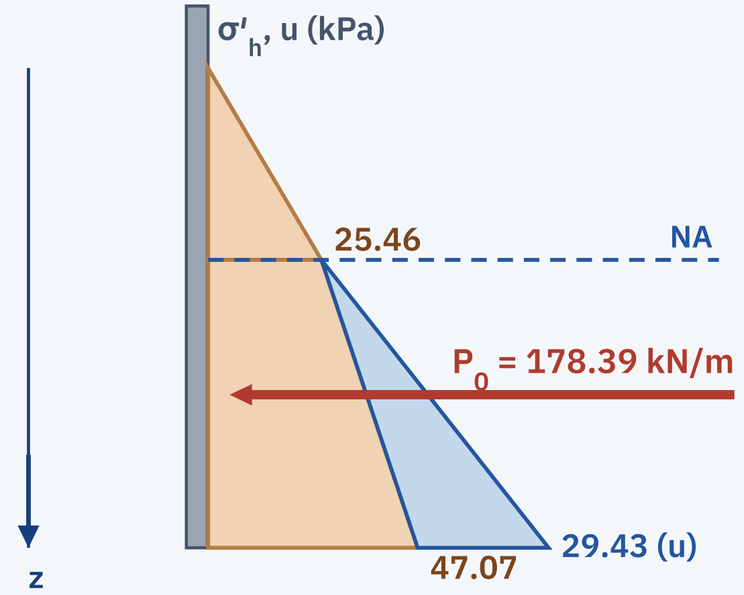
1 K$_0$ e tensões

$$K_0 = (1 - \sin 30^\circ)\, 2^{\sin 30^\circ} = \mathbf{0.7071}$$

$$z = 2: \ \sigma'_o = 36 \ \rightarrow \ \sigma'_h = 0.7071(36) = 25.46 \text{ kPa}$$

$$z = 5: \ \sigma'_o = 36 + 3(20 - 9.81) = 66.57 \ \rightarrow \ \sigma'_h = \mathbf{47.07} \text{ kPa}$$

$$u = 9.81(3) = \mathbf{29.43} \text{ kPa}$$



Solução (2/2)

SOLUÇÃO

2 Áreas: triângulo superior · retângulo inferior · triângulo inferior · triângulo de água

$$P_0 = \tfrac{1}{2}(2)(25.46) + 3(25.46) + \tfrac{1}{2}(3)(21.62) + \tfrac{1}{2}(3)(29.43)$$
$$= 25.46 + 76.37 + 32.42 + 44.14 = \mathbf{178.39}\ \mathrm{kN/m}$$

3 Altura de atuação (braços de alavanca 3.67; 1.50; 1.00; 1.00 m)

$$\bar{z} = \frac{25.46(3.67) + 76.37(1.50) + 32.42(1.00) + 44.14(1.00)}{178.39} = \mathbf{1.59}\ \mathrm{m}$$

P_0 = **178.39 kN/m**, **1.59 m** acima da base; solo 134.25, água 44.14 kN/m (parcela da água: 25%).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

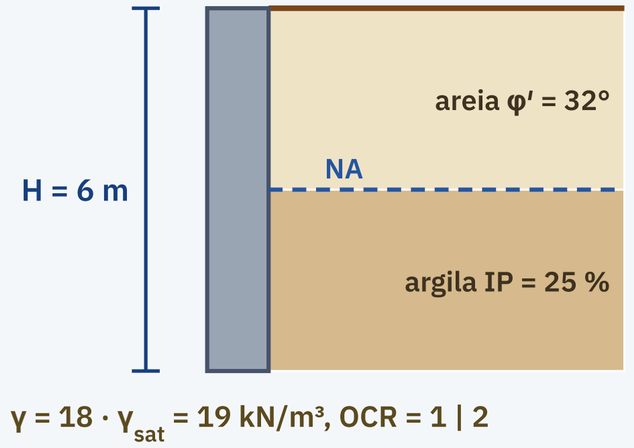
EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 6$ **m, não pode se deslocar**
Camada superior (0–3 m)	**areia:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 32°,\ OCR = 1$
Camada inferior (3–6 m)	**argila:** $\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3},\ PI = 25\%,\ OCR = 2$
Água subterrânea	**acima da argila (3 m)**

PEDE-SE

Salto de pressão no limite, $\mathbf{P_0}$ e $\bar{\mathbf{z}}$.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Valores de K_0: areia, Jaky; argila, Massarsch

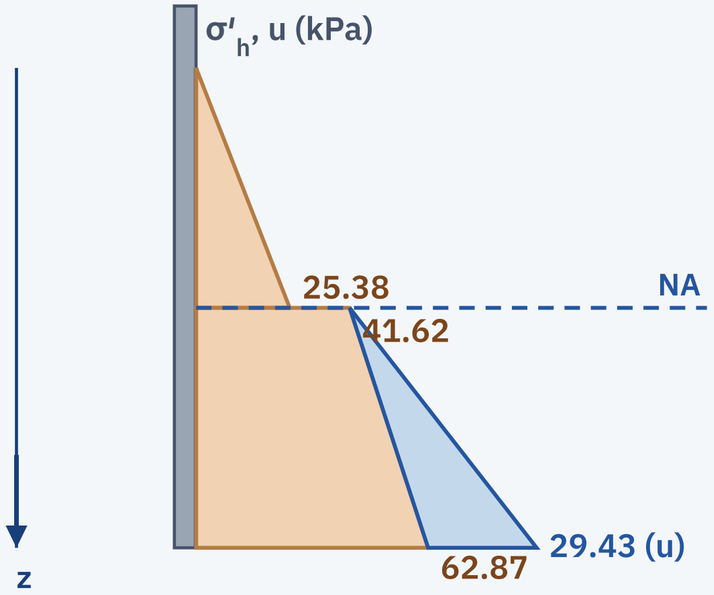
$$K_{0(kum)} = 1 - \sin 32^\circ = \mathbf{0.4701}$$

$$K_{0(kil)} = \left[0.44 + 0.42\frac{25}{100}\right]\sqrt{2} = 0.5450\sqrt{2} = \mathbf{0.7707}$$

2 Gerilmeler ($\sigma'_o(3) = 54$; $\sigma'_o(6) = 54 + 3(19 - 9.81) = 81.57$)

$$z = 3:\ \sigma'_h = 0.4701(54) = 25.38\ (\text{areia});\quad 0.7707(54) = 41.62\ (\text{argila})$$

$$z = 6:\ \sigma'_h = 0.7707(81.57) = \mathbf{62.87}\ \text{kPa};\quad u = \mathbf{29.43}\ \text{kPa}$$



Solução (2/2)

SOLUÇÃO

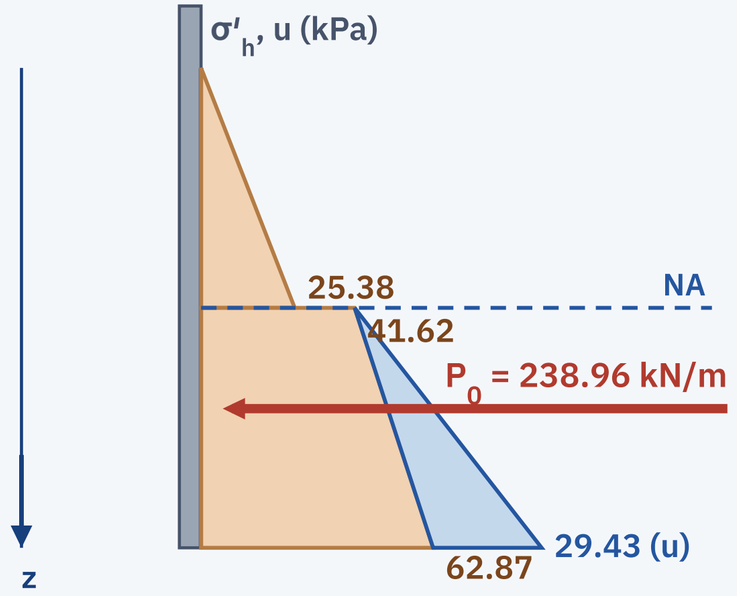
3 Forças

$$P_0 = \tfrac{1}{2}(3)(25.38) + 3(41.62) + \tfrac{1}{2}(3)(21.25) + \tfrac{1}{2}(3)(29.43)$$
$$= 38.08 + 124.86 + 31.87 + 44.14 = \mathbf{238.96}\ \mathrm{kN/m}$$

4 Altura de atuação (braços de alavanca 4.00; 1.50; 1.00; 1.00 m)

$$\bar{z} = \frac{38.08(4) + 124.86(1.5) + 31.87(1) + 44.14(1)}{238.96} = \mathbf{1.74}\ \mathrm{m}$$

P_0 = **238.96 kN/m**, $\bar{z}$ = **1.74 m**. σ'_h salta de 25.38 → 41.62 kPa no topo da camada de argila (K_0 muda); σ'_o = 54 kPa é igual dos dois lados.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Movimentos que atingem os estados ativo e passivo

TEORIA

Se o muro não pode se deslocar, desenvolve-se o empuxo em repouso. Se o muro se afasta do solo, o empuxo diminui de K_0 para K_a; se se aproxima do solo, aumenta até K_p; o deslocamento necessário, em relação à altura (ativo muito pequeno, passivo dez vezes maior):

Solo	Ativo $\Delta L_a/H$	Passivo $\Delta L_p/H$
Areia fofa	0.001–0.002	0.01
Areia compacta	0.0005–0.001	0.005
Argila mole	0.02	0.04
Argila rija	0.01	0.02

POR QUE É IMPORTANTE?

Um muro de subsolo, um arranque de arco ligado ao bloco de coroamento ou um muro de bueiro não pode se deslocar: o empuxo de projeto é o valor **em repouso, e não o ativo**, e depende apenas da expressão de K_0.

Enunciado

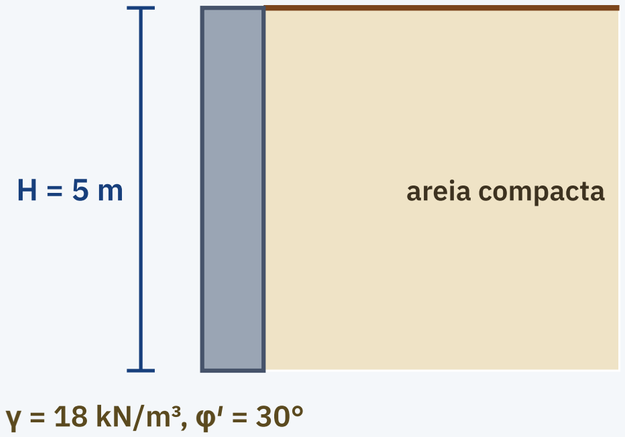
EXEMPLO

PEDE-SE

Força ativa, em repouso e passiva; o movimento necessário do muro para cada uma (areia compacta).

Dados

Muro	$H = 5$ **m, aterro de areia compacta**
Solo	**seco:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$**, NC (Jaky)**



Solução

SOLUÇÃO

1 $P = \frac{1}{2}K\gamma H^2 = \frac{1}{2}K(18)(25) = 225\ K$

Situação	K	P (kN/m)	Movimento (areia compacta, H = 5 m)
Ativo	0.3333	75.0	0.0005–0.001·5 = 2.5–5 mm
Em repouso	0.50	112.5	0 (o muro não se move)
Passivo	3.00	675.0	0.005·5 = 25 mm

Ativo **75.0** < em repouso **112.5** < passivo **675.0 kN/m**; o empuxo em repouso é 1.5 vez o ativo. Se o muro puder deslocar-se de 2.5 a 5 mm, adota-se o empuxo ativo; se não puder deslocar-se de modo algum, o empuxo em repouso; já para mobilizar a resistência passiva, é necessário um movimento de pelo menos 25 mm.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Escopo da solução

TEORIA

Admite-se que o **muro é liso e vertical**; o empuxo em repouso atua na horizontal (δ′ = 0).

Superfície horizontal; para superfície inclinada e muro inclinado, ver os módulos Rankine (reaterro inclinado) e Coulomb.

K_0 é distinto e constante para cada camada: Jaky, Sherif, Mayne–Kulhawy, Massarsch ou valor informado a partir de ensaio.

A **água** é hidrostática e não há água na frente do muro; a pressão da água não depende de K_0.

Sobrecarga, tensão de compactação e sismo não estão incluídos neste módulo; o efeito da compactação é refletido no valor de K_0 (Sherif) ou no OCR.

Resumo

Pontos-chave

Empuxo em repouso: em um muro que não pode se deslocar, $\sigma'_h = K_0\sigma'_o$; $K_a < K_0 < K_p$

K_0: Jaky $1 - \sin\varphi'$; Mayne–Kulhawy $\times$ OCR$^{\sin\varphi'}$; Massarsch $0.44 + 0.42\ PI/100$ ($\times\sqrt{OCR}$ para sobre-adensado); Sherif, para areia compactada, $+ (\gamma_d/\gamma_{d,min} - 1)\cdot 5.5$

Aterro seco: $P_0 = \frac{1}{2}K_0\gamma H^2$, a $H/3$ da base

Água: tensão efetiva com γ', $u = \gamma_w(z - H_1)$ é somada integralmente; a parcela da água costuma ser grande

Em reaterro **estratificado**, σ'_o é contínua, enquanto σ'_h sofre um salto na fronteira em que K_0 muda; $\bar{z}$ obtém-se dos momentos das áreas

Movimento: $\Delta L/H \sim 0.001$ para o estado ativo; ~ 0.01 para o passivo (metade em areia compacta); se o muro não puder se mover, prevalece a condição de repouso

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Jaky, J. (1944). The coefficient of earth pressure at rest. Journal of the Society of Hungarian Architects and Engineers, 7, 355–358.

Mayne, P.W. and Kulhawy, F.H. (1982). K_o–OCR relationships in soil. J. Geotech. Eng. Div., ASCE, 108(GT6), 851–872.

Massarsch, K.R. (1979). Lateral earth pressure in normally consolidated clay. Proc. 7th European Conf. SMFE, Brighton, 2, 245–250.

Sherif, M.A., Fang, Y.S. and Sherif, R.I. (1984). KA and K0 behind rotating and non-yielding walls. J. Geotech. Eng., ASCE, 110(GT1), 41–56.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o mecanismo de cálculo do próprio módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O módulo abre com o muro do Exemplo 5 (camada única; para duas camadas, Exemplo 6).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva as camadas do próprio muro, o método K_0, o valor de OCR e o lençol freático; o módulo fornece em conjunto o diagrama de pressões, a força e a altura de aplicação.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.

Para utilização em aulas: info@geoterva.com