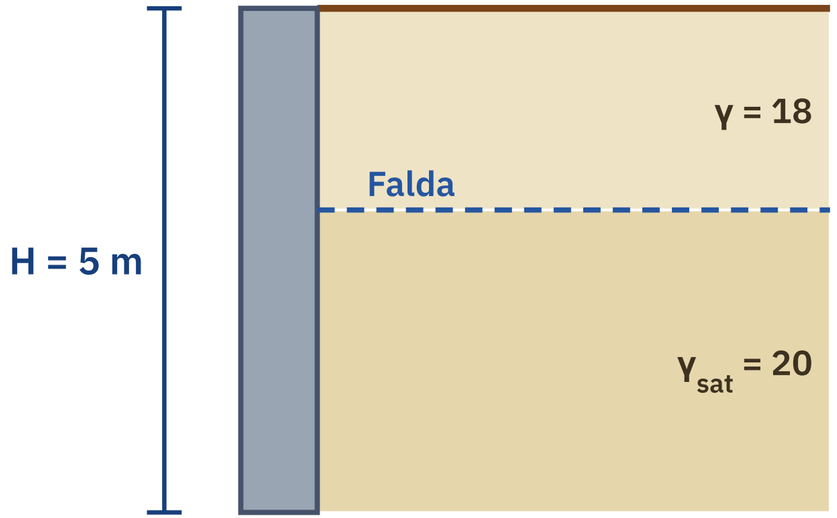
Lezione di geotecnica · Spinta delle terre

Spinta delle terre a riposo

Lezione: la spinta a riposo dietro un muro che non può spostarsi (muro di scantinato, spalla di arco, tombino); le relazioni per il coefficiente K_0, il riempimento asciutto e immerso, il terreno stratificato; un esempio di calcolo per ogni argomento.

- $K_0 = \sigma'_h / \sigma'_o$
- Jaky · Mayne–Kulhawy
- Massarsch · Sherif
- Terreno di riporto stratificato
- Falda freatica



Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

- **Quando si sviluppa la spinta a riposo** e il suo rapporto con lo stato attivo / passivo
- calcolare il **coefficiente K_0** nella sabbia (Jaky, Sherif), nel terreno sovraconsolidato (Mayne–Kulhawy) e nell'argilla (Massarsch)
- Nel riempimento asciutto, la forza $P_0 = \frac{1}{2}K_0\gamma H^2$ e la sua altezza di applicazione H/3
- Come la **falda freatica** aggiunge pressione; il salto di K_0 al confine di strato in un terrapieno stratificato
- Confrontare gli stati attivo – a riposo – passivo e il movimento del muro richiesto

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: qual è la regola e perché è così?

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Le forze sono per unità di lunghezza del muro (kN/m); le pressioni in kPa, le tensioni sono efficaci.

Muro che non può spostarsi

TEORIA

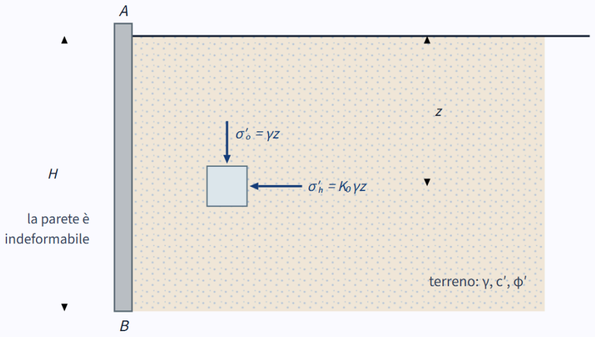
Un muro trattenuto dai solai interrati, un piede d'arco su pali o la parete di una tombinatura **non possono spostarsi**; il terreno retrostante conserva lo stato tensionale che aveva in sito. Il rapporto tra la tensione efficace orizzontale e quella verticale è il **coefficiente di spinta a riposo**:

$$K_0 = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_o} \qquad \sigma'_o = \gamma z \qquad \sigma'_h = K_0 \gamma z$$

Se il muro si allontana dal terreno la spinta **si riduce** fino al valore attivo, se viene spinto verso il terreno **cresce** fino al valore passivo; $K_a < K_0 < K_p$.

Gli spostamenti necessari sono piccoli nel caso attivo e grandi nel caso passivo (Teoria: spostamento necessario).

K_0 si ricava da prove (pressiometro, dilatometro) oppure da una correlazione; il modulo ne utilizza uno per ciascuno strato.



Sabbia, terreno sovraconsolidato e argilla

TEORIA

$$K_0 = 1 - \sin\varphi' \qquad \text{(Jaky 1944, sabbia, NC)}$$

$$K_0 = (1 - \sin\varphi') + \left(\frac{\gamma_d}{\gamma_{d(min)}} - 1\right) 5.5 \qquad \text{(Sherif et al. 1984, sabbia compattata)}$$

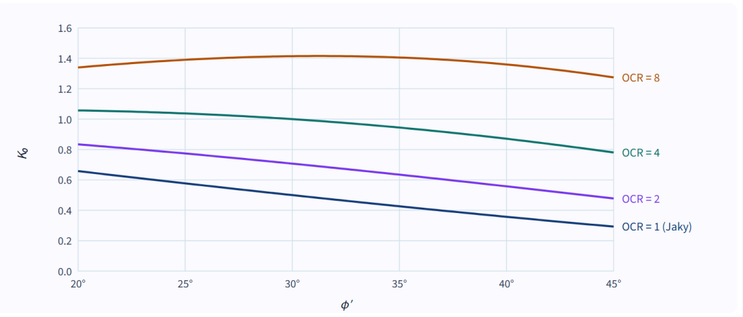
$$K_0 = (1 - \sin\varphi')\, OCR^{\sin\varphi'} \qquad \text{(Mayne–Kulhawy 1982)}$$

$$K_{0(NC)} = 0.44 + 0.42\frac{PI(\%)}{100} \qquad K_{0(OC)} = K_{0(NC)}\sqrt{OCR} \qquad \text{(Massarsch 1979, argilla)}$$

Jaky **sottostima** la pressione nella sabbia compattata: la compattazione rende il riporto sovraconsolidato; Sherif corregge questo con $\gamma_d/\gamma_{d,min}$.

OCR = rapporto tra la massima tensione efficace del passato e la tensione efficace attuale. Per OCR = 4, $\varphi' = 30°$, $K_0 = 1$: la tensione orizzontale e quella verticale sono uguali.

K_0 – φ' (curve OCR)



Traccia

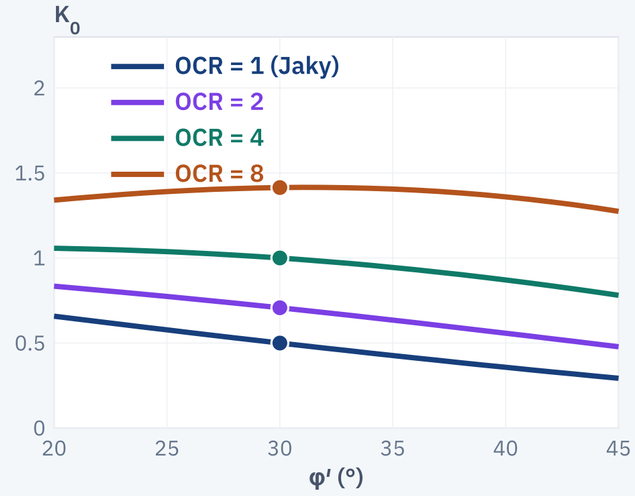
ESEMPIO

Dati

Terreno	**sabbia incoerente,** $\varphi' = 30°$
Casi	$OCR = 1,\ 2,\ 4,\ 8$ **(anche** $\varphi' = 25°,\ 35°,\ 40°$ **per** $OCR = 1$**)**

RICHIESTO

K_0 per ciascun caso; OCR per cui $K_0 = 1$; confronto con K_a, K_p di Rankine.



Soluzione

SOLUZIONE

1 Sabbia NC (Jaky)

$$\varphi' = 30^\circ: \; K_0 = 1 - \sin 30^\circ = \mathbf{0.5000}$$

$$\varphi' = 25^\circ: \; 0.577 \qquad 35^\circ: \; 0.426 \qquad 40^\circ: \; 0.357$$

2 Sovraconsolidato (esponente OCR sin φ′ = 0.5)

OCR	1	2	4	8
$K_0 = 0.5 \cdot OCR^{0.5}$	0.500	0.707	1.000	1.414

K_0 aumenta all'aumentare di OCR: per OCR = 4, **K_0 = 1** (tensione idrostatica), per OCR = 8, 1.41. Se K_a di Rankine = 0.333 e K_p = 3.0, questi restano al di fuori di tutti gli OCR: $K_a < K_0 < K_p$ è sempre soddisfatta.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

ESEMPIO

Dati

Terreno	**terreno di riporto sabbioso compattato: $\varphi' = 34°$, peso dell'unità di volume secco $\gamma_d = 16.0\ \mathrm{kN/m^3}$; allo stato più sciolto $\gamma_{d(min)} = 14.5\ \mathrm{kN/m^3}$**

RICHIESTO

K_0 (Sherif) e confronto con Jaky.

Soluzione

SOLUZIONE

1 Jaky (assenza di compattazione)

$$K_0 = 1 - \sin 34^\circ = \mathbf{0.4408}$$

2 Sherif: tolleranza di compattazione

$$\frac{\gamma_d}{\gamma_{d(min)}} - 1 = \frac{16.0}{14.5} - 1 = 0.1034$$

$$K_0 = 0.4408 + (0.1034)(5.5) = \mathbf{1.010}$$

La compattazione ha fatto aumentare K_0 da 0.44 a **1.01** (2.3 volte): un muro a tergo di un terreno di riporto compattato deve resistere a una spinta molto maggiore di quella che si ottiene dal calcolo in condizioni normalconsolidate.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

ESEMPIO

Dati

Terreno	**argilla: indice di plasticità** $PI = 25\%$
Casi	$OCR = 1$ **e** $OCR = 2$**; inoltre** $PI = 10,\ 40,\ 60\%$

RICHIESTO

K_0 per argilla normalconsolidata e sovraconsolidata.

Soluzione

SOLUZIONE

1 PI = 25 %

$$K_{0(NC)} = 0.44 + 0.42\frac{25}{100} = \mathbf{0.5450}$$

$$K_{0(OC)} = K_{0(NC)}\sqrt{OCR} = 0.5450\sqrt{2} = \mathbf{0.7707}$$

2 Incremento con la plasticità

PI (%)	$K_{0(NC)}$	OCR = 2	OCR = 4
10	0.482	0.682	0.964
25	0.545	0.771	1.090
40	0.608	0.860	1.216
60	0.692	0.979	1.384

Nell'argilla K_0 aumenta con la plasticità; per OCR = 2 con PI = 25 % vale **0.771**. Nell'argilla sovraconsolidata K_0 si moltiplica per $\sqrt{OCR}$ (tale fattore non fa parte della relazione di Massarsch ma è una approssimazione comune).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Triangolo delle pressioni e forza

TEORIA

In un riporto asciutto con peso dell'unità di volume γ, la tensione efficace orizzontale aumenta linearmente con la profondità; la forza per unità di lunghezza del muro è l'area del triangolo e agisce a H/3 sopra la base:

$$\sigma'_h = K_0 \gamma z \qquad P_0 = \tfrac{1}{2} K_0 \gamma H^2 \qquad \bar{z} = \tfrac{H}{3}$$

Nel riporto stratificato σ'_o si somma strato per strato e ogni strato assume il proprio valore di K_0: a ogni confine in cui K_0 cambia **σ'_h presenta un salto, mentre σ'_o non salta**.

La forza cresce con H^2; OCR e compressione aumentano la forza in proporzione diretta a K_0.

Traccia

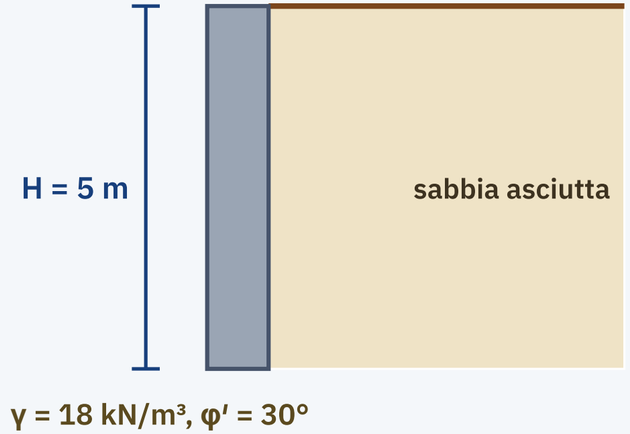
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 5$ **m, non può spostarsi**
Terreno	**sabbia asciutta:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°$
Casi	$OCR = 1$ **e** $OCR = 2$

RICHIESTO

Per ciascun caso, **$\sigma'_h(H)$**, **P_0** e l'altezza del punto di applicazione.



Soluzione

SOLUZIONE

1 OCR = 1 (Jaky: $K_0 = 0.5$)

$$\sigma'_h(5) = K_0 \gamma H = 0.5(18)(5) = \mathbf{45.00}\ \text{kPa}$$

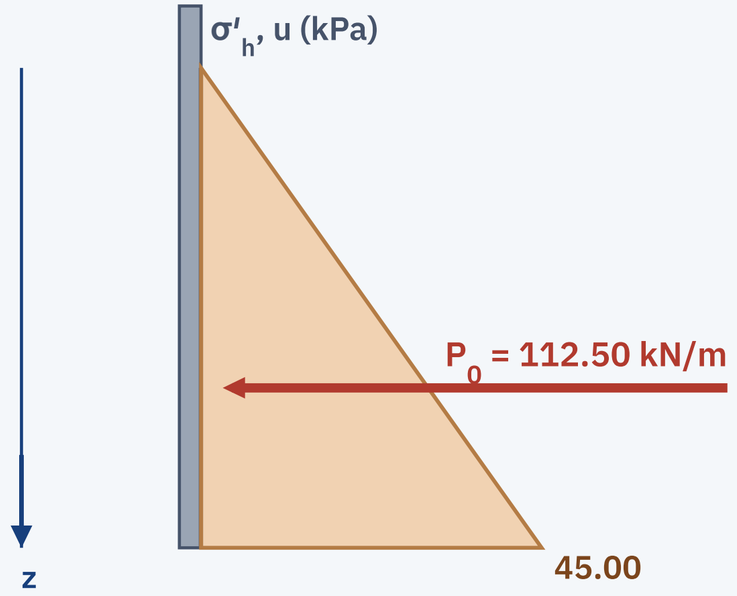
$$P_0 = \tfrac{1}{2}(45.00)(5) = \mathbf{112.50}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \tfrac{5}{3} = 1.67\ \text{m}$$

2 OCR = 2 (Mayne–Kulhawy: $K_0 = 0.7071$)

$$\sigma'_h(5) = 0.7071(18)(5) = \mathbf{63.64}\ \text{kPa}$$

$$P_0 = \tfrac{1}{2}(63.64)(5) = \mathbf{159.10}\ \text{kN/m}$$

P_0 = **112.50 kN/m** (OCR = 1) e **159.10 kN/m** (OCR = 2), entrambe a 1.67 m sopra la base; la sovraconsolidazione ha aumentato la forza del 41%.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Tensione efficace + pressione dell'acqua

TEORIA

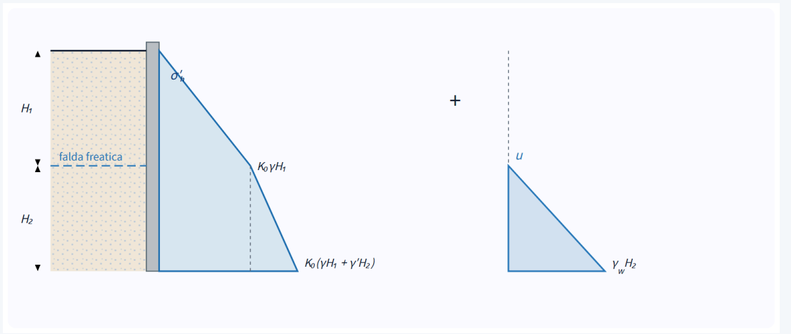
Se la falda freatica è alla profondità H_1 (assenza di acqua davanti al muro), al di sopra si ha $\sigma'_h = K_0\gamma z$; al di sotto la tensione efficace si determina con $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$, e la pressione dell'acqua si somma per intero, **indipendentemente** da K_0:

$$\sigma'_h = K_0\left[\gamma H_1 + \gamma'(z - H_1)\right] \qquad u = \gamma_w(z - H_1) \qquad \sigma_h = \sigma'_h + u$$

$$P_0 = \tfrac{1}{2}K_0\gamma H_1^2 + K_0\gamma H_1 H_2 + \tfrac{1}{2}\left(K_0\gamma' + \gamma_w\right)H_2^2$$

L'altezza della risultante si ricava dal momento delle aree rispetto al punto di base.

$\gamma_w = 9.81$, $K_0\gamma' \approx 0.5\cdot 10 = 5$: **il contributo dell'acqua è spesso maggiore di quello del terreno**.



Traccia

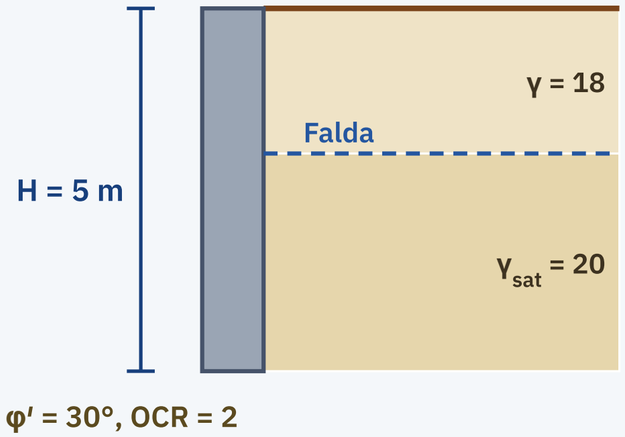
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 5$ **m, non può spostarsi**
Terreno	**sabbia:** $c' = 0,\ \varphi' = 30°,\ OCR = 2$**;** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$ **(superiore),** $\gamma_{sat} = 20\ \mathrm{kN/m^3}$ **(inferiore)**
Acqua sotterranea	**a 2 m di profondità; assenza di acqua davanti al muro**

RICHIESTO

Diagramma delle pressioni, P_0 totale (terreno + acqua) e altezza della linea d'azione. Il modulo si apre con questo muro.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

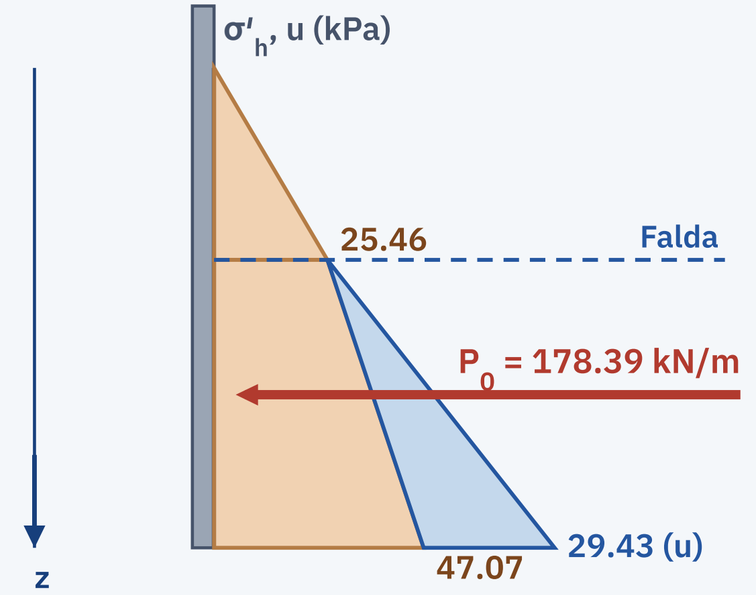
1 K$_0$ e tensioni

$$K_0 = (1 - \sin 30^\circ)\, 2^{\sin 30^\circ} = \mathbf{0.7071}$$

$$z = 2: \ \sigma'_o = 36 \ \rightarrow \ \sigma'_h = 0.7071(36) = 25.46 \text{ kPa}$$

$$z = 5: \ \sigma'_o = 36 + 3(20 - 9.81) = 66.57 \ \rightarrow \ \sigma'_h = \mathbf{47.07} \text{ kPa}$$

$$u = 9.81(3) = \mathbf{29.43} \text{ kPa}$$



Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

2 Aree: triangolo superiore · rettangolo inferiore · triangolo inferiore · triangolo dell'acqua

$$P_0 = \tfrac{1}{2}(2)(25.46) + 3(25.46) + \tfrac{1}{2}(3)(21.62) + \tfrac{1}{2}(3)(29.43)$$
$$= 25.46 + 76.37 + 32.42 + 44.14 = \mathbf{178.39}\ \mathrm{kN/m}$$

3 Altezza di applicazione (bracci 3.67; 1.50; 1.00; 1.00 m)

$$\bar{z} = \frac{25.46(3.67) + 76.37(1.50) + 32.42(1.00) + 44.14(1.00)}{178.39} = \mathbf{1.59}\ \mathrm{m}$$

P_0 = **178.39 kN/m**, **1.59 m** sopra la base; terreno 134.25, acqua 44.14 kN/m (quota dell'acqua 25%).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

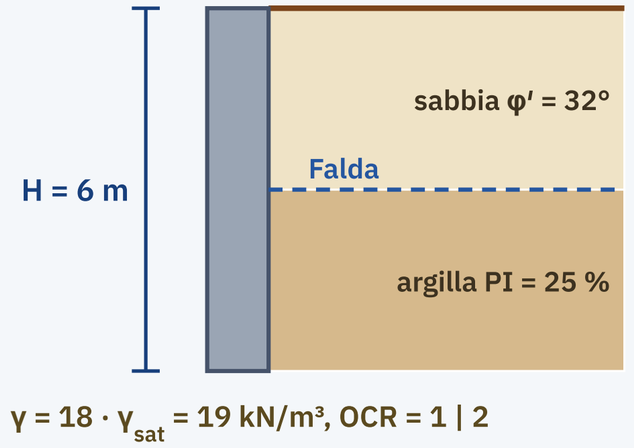
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 6$ **m, non può spostarsi**
Strato superiore (0–3 m)	**sabbia:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 32°,\ OCR = 1$
Strato inferiore (3–6 m)	**argilla:** $\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3},\ PI = 25\%,\ OCR = 2$
Acqua sotterranea	**sopra l'argilla (3 m)**

RICHIESTO

Il salto di pressione al confine, $\mathbf{P_0}$ e $\bar{\mathbf{z}}$.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Valori di K_0: sabbia Jaky, argilla Massarsch

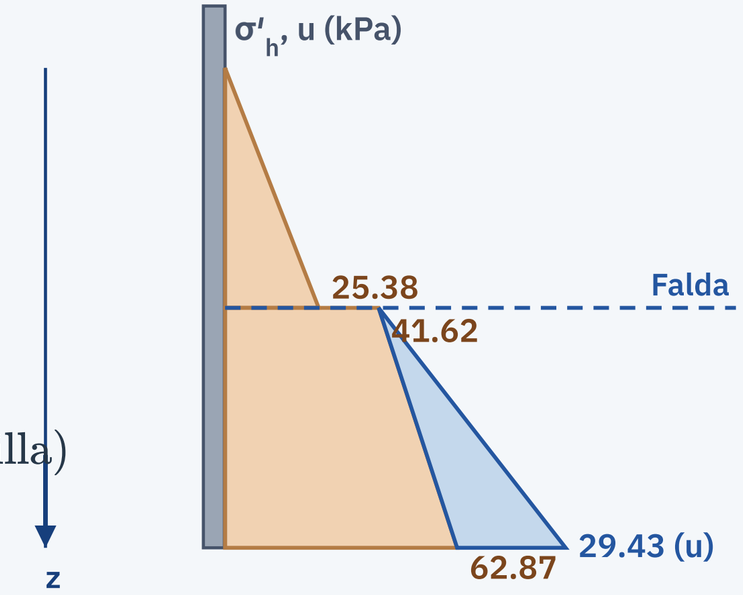
$$K_{0(kum)} = 1 - \sin 32^\circ = \mathbf{0.4701}$$

$$K_{0(kil)} = \left[0.44 + 0.42\frac{25}{100}\right]\sqrt{2} = 0.5450\sqrt{2} = \mathbf{0.7707}$$

2 Tensioni ($\sigma'_o(3) = 54$; $\sigma'_o(6) = 54 + 3(19 - 9.81) = 81.57$)

$$z = 3:\ \sigma'_h = 0.4701(54) = 25.38\ \text{(sabbia)};\quad 0.7707(54) = 41.62\ \text{(argilla)}$$

$$z = 6:\ \sigma'_h = 0.7707(81.57) = \mathbf{62.87}\ \text{kPa};\quad u = \mathbf{29.43}\ \text{kPa}$$



Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

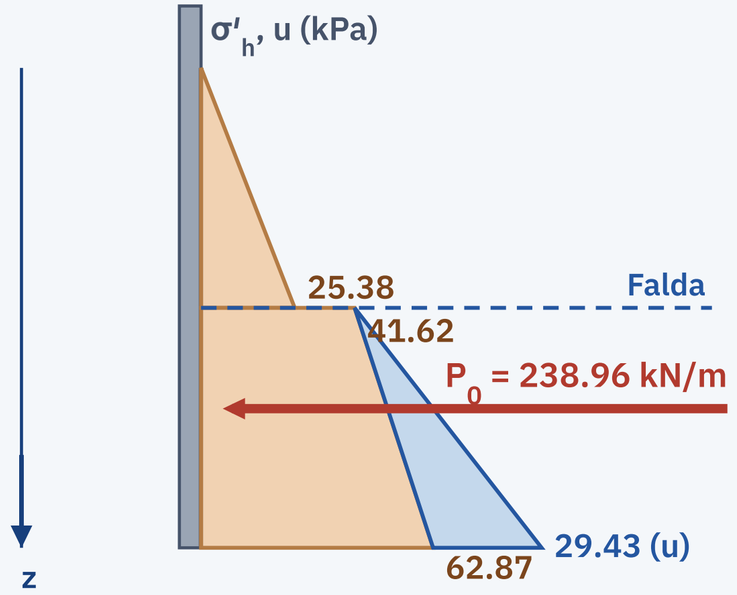
3 Forze

$$P_0 = \tfrac{1}{2}(3)(25.38) + 3(41.62) + \tfrac{1}{2}(3)(21.25) + \tfrac{1}{2}(3)(29.43)$$
$$= 38.08 + 124.86 + 31.87 + 44.14 = \mathbf{238.96}\ \mathrm{kN/m}$$

4 Altezza di applicazione (bracci 4.00; 1.50; 1.00; 1.00 m)

$$\bar{z} = \frac{38.08(4) + 124.86(1.5) + 31.87(1) + 44.14(1)}{238.96} = \mathbf{1.74}\ \mathrm{m}$$

P_0 = **238.96 kN/m**, $\bar{z}$ = **1.74 m**. σ'_h passa bruscamente da 25.38 → 41.62 kPa alla sommità dello strato di argilla (K_0 cambia); σ'_0 = 54 kPa è uguale sui due lati.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Movimenti che raggiungono gli stati attivo e passivo

TEORIA

Se il muro non può spostarsi si sviluppa la spinta a riposo. Se il muro si allontana dal terreno la spinta diminuisce da K_0 a K_a; se si avvicina al terreno cresce fino a K_p; lo spostamento necessario rapportato all'altezza (molto piccolo per la spinta attiva, dieci volte maggiore per la passiva):

Terreno	Attivo $\Delta L_a/H$	Passivo $\Delta L_p/H$
Sabbia sciolta	0.001–0.002	0.01
Sabbia addensata	0.0005–0.001	0.005
Argilla tenera	0.02	0.04
Argilla consistente	0.01	0.02

PERCHÉ È IMPORTANTE?

Un muro di cantina, un piedritto d'arco collegato a un plinto su pali o la spalla di una tombinatura non possono spostarsi: la pressione di progetto è quella **a riposo**, non quella attiva, e dipende unicamente dalla relazione K_0.

Traccia

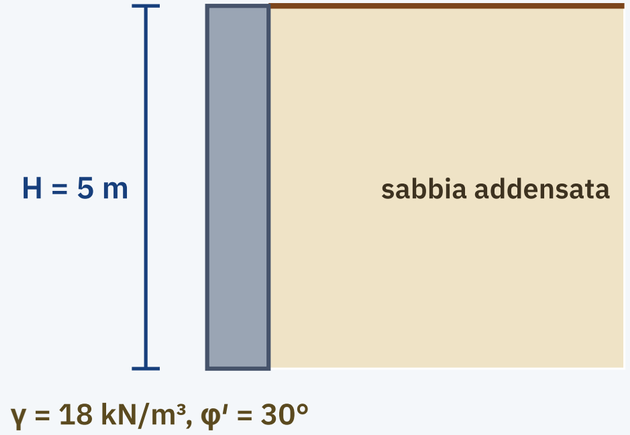
ESEMPIO

RICHIESTO

Spinta **attiva**, a riposo e passiva; per ciascuna, il movimento del muro necessario (sabbia addensata).

Dati

Muro	$H = 5$ **m, terrapieno in sabbia addensata**
Terreno	**asciutto:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°$**, NC (Jaky)**



Soluzione

SOLUZIONE

1 $P = \frac{1}{2}K\gamma H^2 = \frac{1}{2}K(18)(25) = 225\ K$

Condizione	K	P (kN/m)	Movimento (sabbia densa, H = 5 m)
Attiva	0.3333	75.0	0.0005–0.001·5 = 2.5–5 mm
A riposo	0.50	112.5	0 (il muro non si muove)
Passiva	3.00	675.0	0.005·5 = 25 mm

Attiva **75.0** < a riposo **112.5** < passiva **675.0 kN/m**; la forza a riposo è 1.5 volte quella attiva. Se il muro può spostarsi di 2.5–5 mm si assume la spinta attiva, se non può spostarsi affatto la spinta a riposo; per la resistenza passiva è necessario uno spostamento di almeno 25 mm.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Ambito della soluzione

TEORIA

Si assume che il **muro sia privo di attrito e verticale**; la spinta a riposo agisce orizzontalmente ($\delta' = 0$).

Superficie orizzontale; per superficie inclinata e muro inclinato si vedano i moduli Rankine (terrapieno inclinato) e Coulomb.

K_0 è distinto e costante per ogni strato: Jaky, Sherif, Mayne–Kulhawy, Massarsch oppure il valore inserito dalla prova.

L'acqua è idrostatica, non vi è acqua a monte del muro; la pressione dell'acqua non dipende da K_0.

Sovraccarico, tensione di compattazione e sisma non sono inclusi in questo modulo; l'effetto della compattazione è riflesso nel valore di K_0 (Sherif) oppure nell'OCR.

Sintesi

Punti chiave

Spinta a riposo: in un muro che non può spostarsi $\sigma'_h = K_0\sigma'_o$; $K_a < K_0 < K_p$

K_0: Jaky $1 - \sin\varphi'$; Mayne–Kulhawy $\times\ OCR^{\sin\varphi'}$; Massarsch $0.44 + 0.42\ PI/100$ ($\times\ \sqrt{OCR}$ per sovraconsolidato); Sherif per sabbia compattata + $(\gamma_d/\gamma_{d,min} - 1)\cdot 5.5$

Terrapieno asciutto: $P_0 = \frac{1}{2}K_0\gamma H^2$, ad $H/3$ dalla base

Acqua: tensione efficace con γ', $u = \gamma_w(z - H_1)$ viene aggiunto per intero; il contributo dell'acqua è spesso rilevante

Nel terrapieno **stratificato** σ'_o è continua, mentre σ'_h presenta un salto al confine dove cambia K_0; $\bar{z}$ si ricava dai momenti delle aree

Movimento: $\Delta L/H \sim 0.001$ per la spinta attiva; ~ 0.01 per la passiva (metà in sabbia addensata); se il muro non può muoversi è determinante la condizione a riposo

Bibliografia

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Jaky, J. (1944). The coefficient of earth pressure at rest. Journal of the Society of Hungarian Architects and Engineers, 7, 355–358.

Mayne, P.W. and Kulhawy, F.H. (1982). K_o–OCR relationships in soil. J. Geotech. Eng. Div., ASCE, 108(GT6), 851–872.

Massarsch, K.R. (1979). Lateral earth pressure in normally consolidated clay. Proc. 7th European Conf. SMFE, Brighton, 2, 245–250.

Sherif, M.A., Fang, Y.S. and Sherif, R.I. (1984). KA and K0 behind rotating and non-yielding walls. J. Geotech. Eng., ASCE, 110(GT1), 41–56.

NOTA

Tutti gli esempi numerici sono stati prodotti con il motore di calcolo del modulo stesso; il modulo restituisce gli stessi valori. Il modulo si apre con il muro dell'Esempio 5 (un solo strato; per due strati si veda l'Esempio 6).

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

Inserire in GeoTerva gli strati del proprio muro, il metodo K_0, il valore di OCR e la falda freatica; il modulo fornisce insieme il diagramma delle pressioni, la forza e l'altezza di applicazione.

Aprire il modulo → **Pagina di teoria →**

Aprire dallo smartphone
I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com