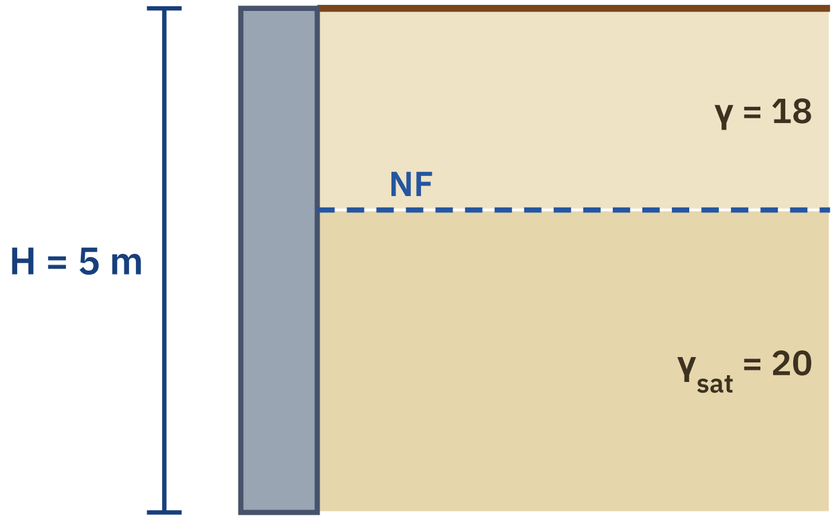
Presentación de clase de geotecnia · Empuje de tierras

# Empuje de tierras al reposo

Clase: empuje al reposo tras un muro que no puede desplazarse (muro de sótano, estribo de arco, alcantarilla); relaciones para el coeficiente $K_0$, relleno seco y sumergido, terreno estratificado; ejemplo resuelto en cada tema.

$K_0 = \sigma'_h / \sigma'_o$ · Jaky · Mayne–Kulhawy · Massarsch · Sherif · Relleno estratificado · Agua subterránea



Introducción

# ¿Qué aprenderemos en esta clase?

- Cuándo se origina el **empuje al reposo** y su relación con el estado activo / pasivo
- El cálculo del **coeficiente $K_0$** en arena (Jaky, Sherif), en suelo sobreconsolidado (Mayne–Kulhawy) y en arcilla (Massarsch)
- La fuerza $P_0 = \frac{1}{2}K_0\gamma H^2$ en relleno seco y su altura de aplicación H/3
- Cómo añade presión el **agua subterránea**; el salto de $K_0$ en el límite entre estratos en un relleno estratificado
- Comparar los estados activo – al reposo – pasivo y el movimiento necesario del muro

DESARROLLO DE LA CLASE

Cada tema se desarrolla en **tres pasos**:

1 · **Teoría**: ¿cuál es la regla y por qué es así?

2 · **Enunciado**: datos y se pide

3 · **Solución**: paso a paso, con números

Las fuerzas se expresan por unidad de longitud de muro (kN/m); las presiones, en kPa; las tensiones son efectivas.

# Muro que no puede desplazarse

TEORÍA

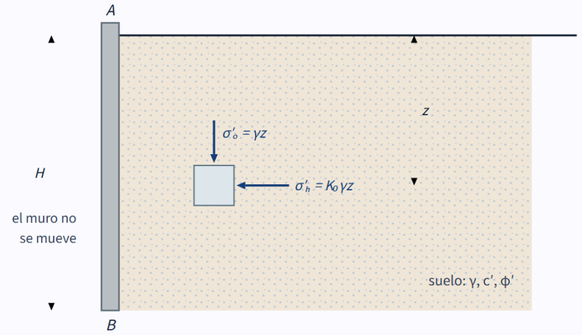
Un muro sostenido por los forjados de los sótanos, un arranque de arco sobre pilotes o un muro de alcantarilla **no puede desplazarse**; el terreno que tiene detrás conserva el estado tensional que tenía in situ. La relación entre la tensión efectiva horizontal y la tensión efectiva vertical es el **coeficiente de empuje al reposo**:

$$K_0 = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_o} \qquad \sigma'_o = \gamma z \qquad \sigma'_h = K_0 \gamma z$$

Si el muro se aleja del terreno, la presión **desciende** al valor activo; si se empuja contra el terreno, **asciende** al valor pasivo; $K_a < K_0 < K_p$.

Los movimientos necesarios son pequeños en el caso activo y grandes en el pasivo (Teoría: Movimiento necesario).

$K_0$ se toma de ensayos (presiómetro, dilatómetro) o de una correlación; el módulo emplea uno de los dos para cada estrato.



# Arena, suelo sobreconsolidado y arcilla

TEORÍA

$$K_0 = 1 - \sin\varphi' \qquad \text{(Jaky 1944, arena, NC)}$$

$$K_0 = (1 - \sin\varphi') + \left(\frac{\gamma_d}{\gamma_{d(min)}} - 1\right) 5.5 \qquad \text{(Sherif et al. 1984, arena compactada)}$$

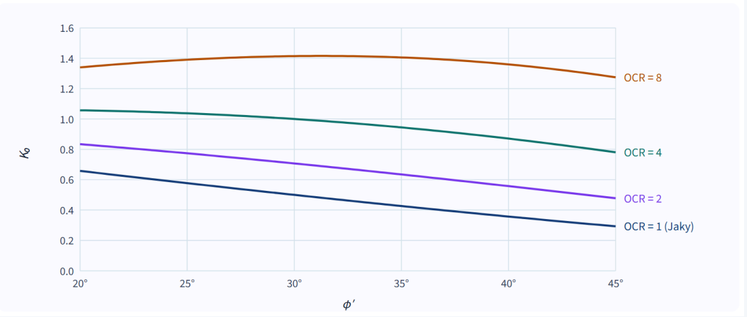
$$K_0 = (1 - \sin\varphi')\, OCR^{\sin\varphi'} \qquad \text{(Mayne–Kulhawy 1982)}$$

$$K_{0(NC)} = 0.44 + 0.42\frac{PI(\%)}{100} \qquad K_{0(OC)} = K_{0(NC)}\sqrt{OCR} \qquad \text{(Massarsch 1979, arcilla)}$$

Jaky **subestima** la presión en la arena compactada: la compactación sobreconsolida el relleno; Sherif lo corrige con $\gamma_d/\gamma_{d,min}$.

OCR = relación entre la mayor tensión efectiva pasada y la tensión efectiva actual. Para OCR = 4, φ′ = 30°, $K_0$ = 1: la tensión horizontal y la vertical son iguales.

### $K_0$ – φ′ (curvas de OCR)



# Enunciado

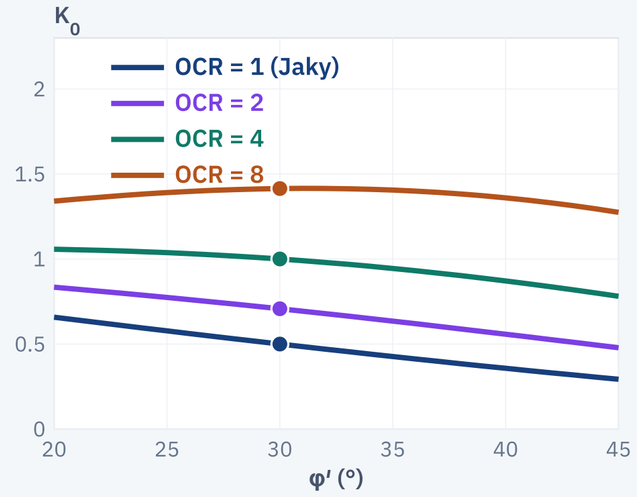
EJEMPLO

**SE PIDE**

**$K_0$** para cada caso; OCR para el que $K_0 = 1$; comparación con $K_a$ y $K_p$ de Rankine.

**Datos**

| | |
|---|---|
| Suelo | **arena sin cohesión, $\varphi' = 30^\circ$** |
| Casos | $OCR = 1,\ 2,\ 4,\ 8$ **(además $\varphi' = 25^\circ,\ 35^\circ,\ 40^\circ$ para $OCR = 1$)** |



# Solución

SOLUCIÓN

**1** Arena NC (Jaky)

$$\varphi' = 30^\circ:\ K_0 = 1 - \sin 30^\circ = \mathbf{0.5000}$$

$$\varphi' = 25^\circ:\ 0.577 \qquad 35^\circ:\ 0.426 \qquad 40^\circ:\ 0.357$$

**2** Sobreconsolidado (exponente de OCR sin φ′ = 0.5)

| OCR | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $K_0 = 0.5 \cdot OCR^{0.5}$ | 0.500 | 0.707 | 1.000 | 1.414 |

Al aumentar OCR aumenta $K_0$: con OCR = 4, **$K_0$ = 1** (tensión hidrostática); con OCR = 8, 1.41. Los valores de Rankine $K_a$ = 0.333 y $K_p$ = 3.0 quedan fuera de los valores de $K_0$ para cualquier OCR: siempre se cumple $K_a < K_0 < K_p$.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

# Enunciado

EJEMPLO

**Datos**

| | |
|---|---|
| Suelo | **relleno de arena compactada:** $\varphi' = 34°$**, peso específico seco** $\gamma_d = 16.0\ \mathrm{kN/m^3}$**; en el estado más suelto** $\gamma_{d(min)} = 14.5\ \mathrm{kN/m^3}$ |

**SE PIDE**

$K_0$ (Sherif) y comparación con Jaky.

# Solución

SOLUCIÓN

**1** Jaky (sin compactación)

$$K_0 = 1 - \sin 34^\circ = \mathbf{0.4408}$$

**2** Sherif: incremento por compactación

$$\frac{\gamma_d}{\gamma_{d(min)}} - 1 = \frac{16.0}{14.5} - 1 = 0.1034$$

$$K_0 = 0.4408 + (0.1034)(5.5) = \mathbf{1.010}$$

La compactación elevó $K_0$ de 0.44 a **1.01** (2.3 veces): el muro situado tras un relleno compactado debe resistir una presión mucho mayor que la del cálculo para suelo normalmente consolidado.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

# Enunciado

EJEMPLO

**Datos**

| | |
|---|---|
| Suelo | **arcilla: índice de plasticidad $PI = 25\%$** |
| Casos | **$OCR = 1$ y $OCR = 2$; además $PI =$** $10,\ 40,\ 60\%$ |

**SE PIDE**

**$K_0$** para arcilla normalmente consolidada y sobreconsolidada.

# Solución

SOLUCIÓN

**1** PI = 25 %

$$K_{0(NC)} = 0.44 + 0.42\frac{25}{100} = \mathbf{0.5450}$$

$$K_{0(OC)} = K_{0(NC)}\sqrt{OCR} = 0.5450\sqrt{2} = \mathbf{0.7707}$$

**2** Aumento con la plasticidad

| PI (%) | $K_{0(NC)}$ | OCR = 2 | OCR = 4 |
|---|---|---|---|
| 10 | 0.482 | 0.682 | 0.964 |
| 25 | 0.545 | 0.771 | 1.090 |
| 40 | 0.608 | 0.860 | 1.216 |
| 60 | 0.692 | 0.979 | 1.384 |

En arcilla, $K_0$ aumenta con la plasticidad; para OCR = 2 y PI = 25 % resulta **0.771**. En arcilla sobreconsolidada, $K_0$ se multiplica por √OCR (este factor no forma parte de la relación de Massarsch, sino que es una aproximación habitual).

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

# Triángulo de presiones y fuerza

TEORÍA

En un relleno seco de peso específico γ, la tensión efectiva horizontal aumenta linealmente con la profundidad; la fuerza por unidad de longitud de muro es el área del triángulo y actúa a H/3 por encima de la base:

$$\sigma'_h = K_0 \gamma z \qquad P_0 = \tfrac{1}{2} K_0 \gamma H^2 \qquad \bar{z} = \tfrac{H}{3}$$

En un relleno estratificado, $\sigma'_o$ se suma estrato a estrato y cada estrato adopta su propio valor de $K_0$: en cada contacto en el que $K_0$ cambia, **$\sigma'_h$ salta y $\sigma'_o$ no**.

La fuerza crece con $H^2$; el OCR y la compactación aumentan la fuerza en proporción directa a $K_0$.

# Enunciado

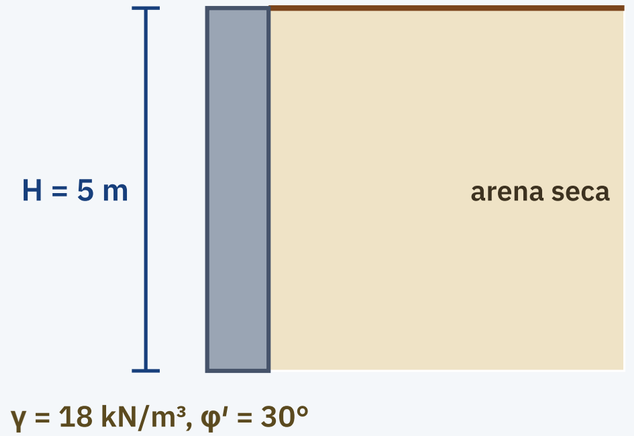
EJEMPLO

**SE PIDE**

Para cada caso, **$\sigma'_h(H)$**, **$P_0$** y la altura de aplicación.

**Datos**

| | |
|---|---|
| Muro | $H = 5$ **m, no puede moverse** |
| Suelo | **arena seca:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ$ |
| Casos | $OCR = 1$ **y** $OCR = 2$ |



# Solución

SOLUCIÓN

**1** OCR = 1 (Jaky: $K_0 = 0.5$)

$$\sigma'_h(5) = K_0 \gamma H = 0.5(18)(5) = \mathbf{45.00}\ \text{kPa}$$

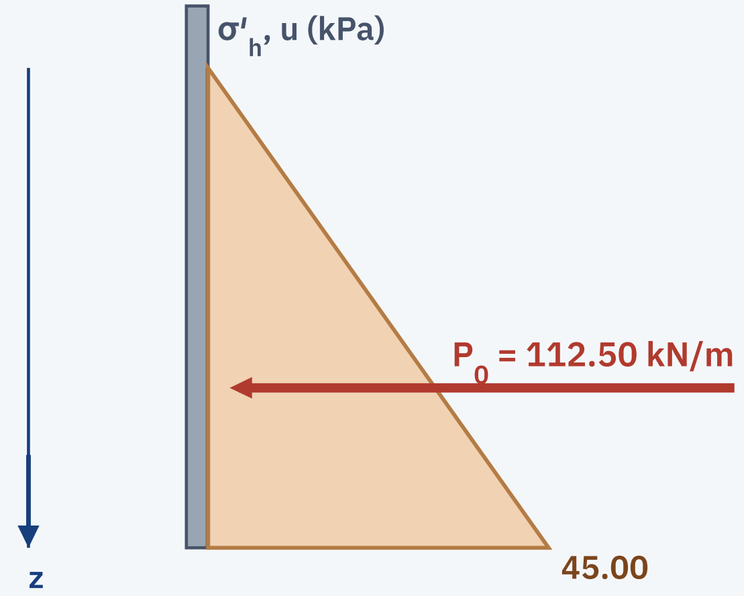
$$P_0 = \tfrac{1}{2}(45.00)(5) = \mathbf{112.50}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \tfrac{5}{3} = 1.67\ \text{m}$$

**2** OCR = 2 (Mayne–Kulhawy: $K_0 = 0.7071$)

$$\sigma'_h(5) = 0.7071(18)(5) = \mathbf{63.64}\ \text{kPa}$$

$$P_0 = \tfrac{1}{2}(63.64)(5) = \mathbf{159.10}\ \text{kN/m}$$

$P_0$ = **112.50 kN/m** (OCR = 1) y **159.10 kN/m** (OCR = 2), ambos a 1.67 m por encima de la base; la sobreconsolidación aumentó la fuerza un 41%.




Comprobar la solución en GeoTerva ↗

# Tensión efectiva + presión del agua

TEORÍA

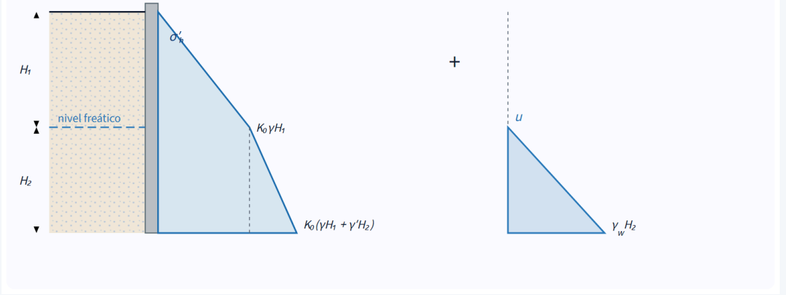
Si el nivel freático está a la profundidad $H_1$ (sin agua delante del muro), por encima de él $\sigma'_h = K_0\gamma z$; por debajo, la tensión efectiva se obtiene con $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$ y la presión del agua se suma íntegramente, **independiente** de $K_0$:

$$\sigma'_h = K_0\left[\gamma H_1 + \gamma'(z - H_1)\right] \qquad u = \gamma_w(z - H_1) \qquad \sigma_h = \sigma'_h + u$$

$$P_0 = \tfrac{1}{2}K_0\gamma H_1^2 + K_0\gamma H_1 H_2 + \tfrac{1}{2}\left(K_0\gamma' + \gamma_w\right)H_2^2$$

La altura de aplicación se obtiene tomando momentos de las áreas respecto al punto de la base.

$\gamma_w = 9.81$, $K_0\gamma' \approx 0.5\cdot 10 = 5$: **la contribución del agua suele ser mayor que la del suelo**.



# Enunciado

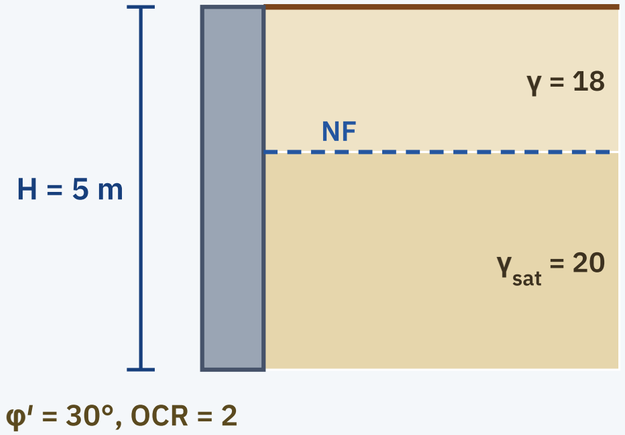
EJEMPLO

## Datos

| | |
|---|---|
| Muro | $H = 5$ **m, no puede moverse** |
| Suelo | **arena:** $c' = 0,\ \varphi' = 30°,\ OCR = 2$**;** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$ **(arriba),** $\gamma_{sat} = 20\ \mathrm{kN/m^3}$ **(abajo)** |
| Agua subterránea | **a 2 m de profundidad; sin agua delante del muro** |

## SE PIDE

Diagrama de presiones, $\mathbf{P_0}$ total (terreno + agua) y altura de aplicación. El módulo se abre con este muro.



# Solución (1/2)

SOLUCIÓN

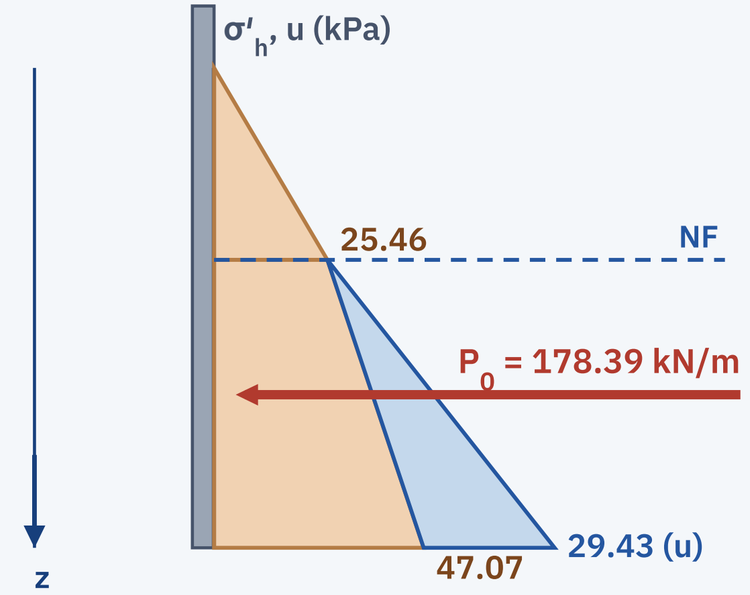
**1** K$_0$ y tensiones

$$K_0 = (1 - \sin 30^\circ)\, 2^{\sin 30^\circ} = \mathbf{0.7071}$$

$$z = 2:\ \sigma'_o = 36 \ \rightarrow\ \sigma'_h = 0.7071(36) = 25.46\ \text{kPa}$$

$$z = 5:\ \sigma'_o = 36 + 3(20 - 9.81) = 66.57 \ \rightarrow\ \sigma'_h = \mathbf{47.07}\ \text{kPa}$$

$$u = 9.81(3) = \mathbf{29.43}\ \text{kPa}$$



# Solución (2/2)

SOLUCIÓN

**2** Áreas: triángulo superior · rectángulo inferior · triángulo inferior · triángulo de agua

$$P_0 = \tfrac{1}{2}(2)(25.46) + 3(25.46) + \tfrac{1}{2}(3)(21.62) + \tfrac{1}{2}(3)(29.43)$$
$$= 25.46 + 76.37 + 32.42 + 44.14 = \mathbf{178.39}\ \mathrm{kN/m}$$

**3** Altura de aplicación (brazos 3.67; 1.50; 1.00; 1.00 m)

$$\bar{z} = \frac{25.46(3.67) + 76.37(1.50) + 32.42(1.00) + 44.14(1.00)}{178.39} = \mathbf{1.59}\ \mathrm{m}$$

$P_0$ = **178.39 kN/m**, a **1.59 m** por encima de la base; terreno 134.25, agua 44.14 kN/m (parte del agua: 25 %).

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

# Enunciado

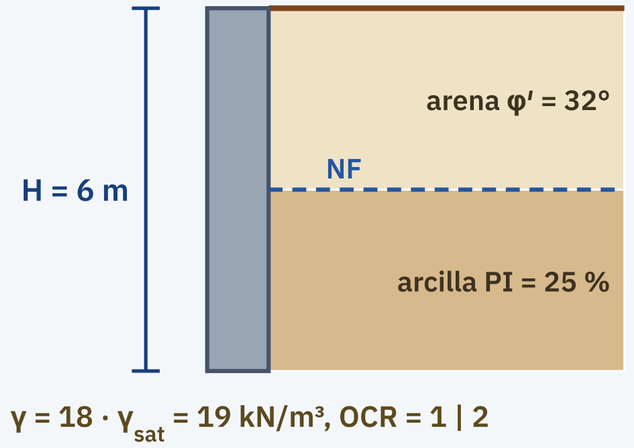
EJEMPLO

**Datos**

| | |
|---|---|
| Muro | $H = 6$ **m, no puede moverse** |
| Estrato superior (0–3 m) | **arena:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 32°,\ OCR = 1$ |
| Estrato inferior (3–6 m) | **arcilla:** $\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3},\ PI = 25\%,\ OCR = 2$ |
| Agua subterránea | **sobre la arcilla (3 m)** |

**SE PIDE**

Salto de presión en el límite, $\mathbf{P_0}$ y $\bar{\mathbf{z}}$.



# Solución (1/2)

SOLUCIÓN

**1** Valores de $K_0$: arena según Jaky, arcilla según Massarsch

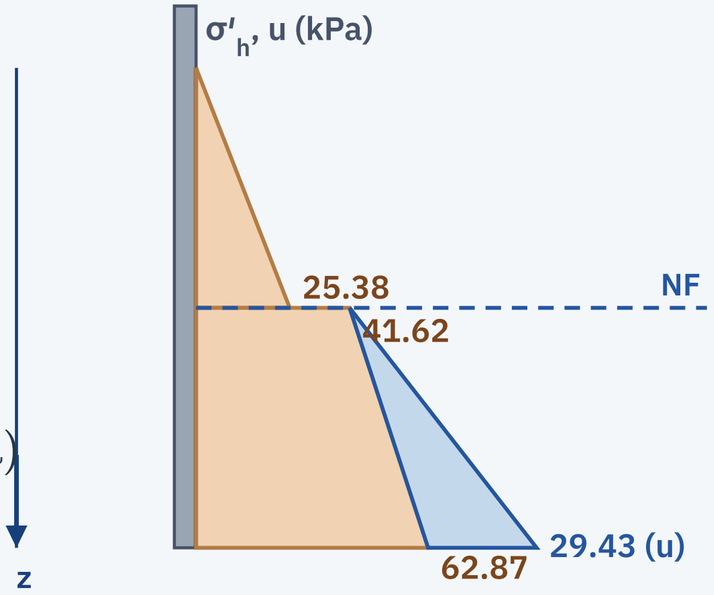
$$K_{0(kum)} = 1 - \sin 32^\circ = \mathbf{0.4701}$$

$$K_{0(kil)} = \left[0.44 + 0.42\frac{25}{100}\right]\sqrt{2} = 0.5450\sqrt{2} = \mathbf{0.7707}$$

**2** Tensiones ($\sigma'_o(3) = 54$; $\sigma'_o(6) = 54 + 3(19 - 9.81) = 81.57$)

$$z = 3:\ \sigma'_h = 0.4701(54) = 25.38\ (\text{arena});\ \ 0.7707(54) = 41.62\ (\text{arcilla})$$

$$z = 6:\ \sigma'_h = 0.7707(81.57) = \mathbf{62.87}\ \text{kPa};\ \ u = \mathbf{29.43}\ \text{kPa}$$



# Solución (2/2)

SOLUCIÓN

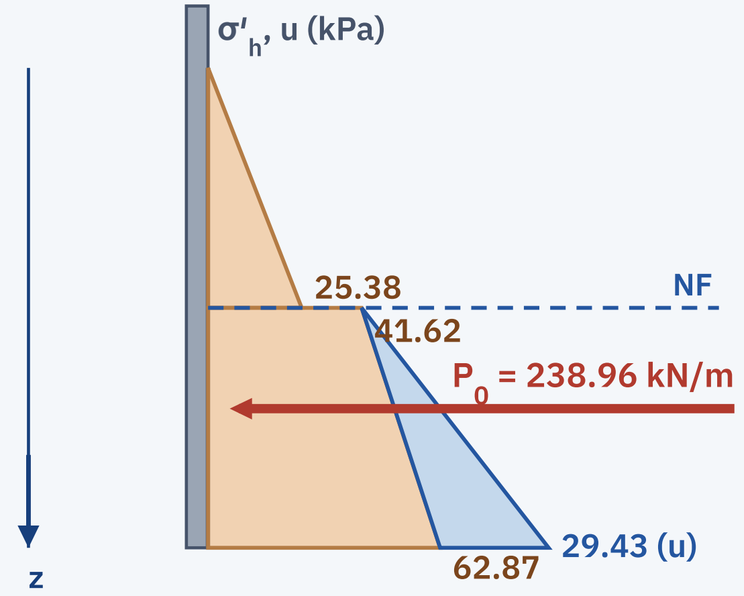
**3** Fuerzas

$$P_0 = \tfrac{1}{2}(3)(25.38) + 3(41.62) + \tfrac{1}{2}(3)(21.25) + \tfrac{1}{2}(3)(29.43)$$
$$= 38.08 + 124.86 + 31.87 + 44.14 = \mathbf{238.96}\ \mathrm{kN/m}$$

**4** Altura de aplicación (brazos 4.00; 1.50; 1.00; 1.00 m)

$$\bar{z} = \frac{38.08(4) + 124.86(1.5) + 31.87(1) + 44.14(1)}{238.96} = \mathbf{1.74}\ \mathrm{m}$$

$P_0$ = **238.96 kN/m**, $\bar{z}$ = **1.74 m**. $\sigma'_h$ salta de 25.38 → 41.62 kPa en la parte superior del estrato de arcilla (cambia $K_0$); $\sigma'_o$ = 54 kPa es igual a ambos lados.




Comprobar la solución en GeoTerva ↗

# Movimientos que alcanzan los estados activo y pasivo

TEORÍA

Si el muro no puede moverse, se desarrolla el empuje al reposo. Si el muro se aleja del terreno, la presión desciende de $K_0$ a $K_a$; si se aproxima al terreno, asciende hasta $K_p$; el movimiento necesario, en proporción a la altura (muy pequeño para el estado activo y diez veces mayor para el pasivo):

| Suelo | Activo $\Delta L_a/H$ | Pasivo $\Delta L_p/H$ |
|---|---|---|
| Arena suelta | 0.001–0.002 | 0.01 |
| Arena densa | 0.0005–0.001 | 0.005 |
| Arcilla blanda | 0.02 | 0.04 |
| Arcilla rígida | 0.01 | 0.02 |

**¿POR QUÉ ES IMPORTANTE?**

Un muro de sótano, un arranque de arco unido a un cabezal de pilotes o un muro de alcantarilla no pueden desplazarse: la presión de cálculo es el valor **al reposo y no el activo**, y depende únicamente de la expresión de $K_0$.

# Enunciado

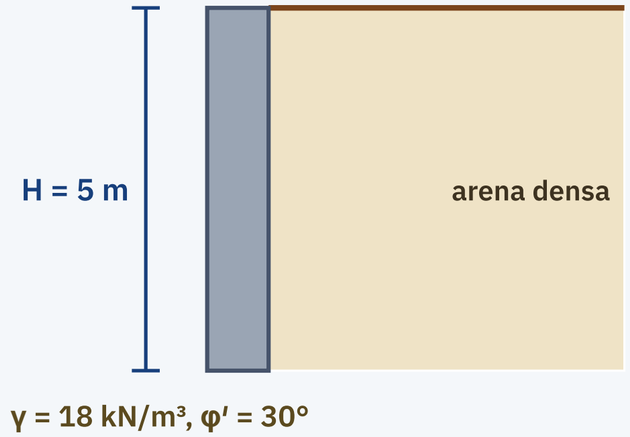
EJEMPLO

**SE PIDE**

**Empuje** activo, al reposo y pasivo; desplazamiento del muro necesario para cada uno (arena densa).

**Datos**

| | |
|---|---|
| Muro | $H = 5$ **m, relleno de arena densa** |
| Suelo | **seco:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$**, NC (Jaky)** |



# Solución

SOLUCIÓN

**1** $P = \frac{1}{2}K\gamma H^2 = \frac{1}{2}K(18)(25) = 225\ K$

| Situación | K | P (kN/m) | Movimiento (arena densa, H = 5 m) |
|---|---|---|---|
| Activo | 0.3333 | 75.0 | 0.0005–0.001·5 = 2.5–5 mm |
| Al reposo | 0.50 | 112.5 | 0 (el muro no se mueve) |
| Pasivo | 3.00 | 675.0 | 0.005·5 = 25 mm |

Activo **75.0** < al reposo **112.5** < pasivo **675.0 kN/m**; el empuje al reposo es 1.5 veces el activo. Si el muro puede desplazarse 2.5–5 mm, se toma como base la presión activa; si no puede desplazarse en absoluto, la presión al reposo; para la resistencia pasiva se requiere, en cambio, un movimiento de al menos 25 mm.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

# Alcance de la solución

TEORÍA

Se supone que el **muro es liso y vertical**; el empuje al reposo actúa horizontalmente ($\delta' = 0$).

**Superficie horizontal**; para superficie inclinada y muro inclinado, véanse los módulos de Rankine (relleno inclinado) y de Coulomb.

**$K_0$** se define por separado para cada estrato y es constante: Jaky, Sherif, Mayne–Kulhawy, Massarsch o un valor introducido a partir de ensayos.

El **agua** es hidrostática y no hay agua delante del muro; la presión del agua no depende de $K_0$.

**La sobrecarga, la tensión de compactación y el sismo** no figuran en este módulo; el efecto de la compactación se refleja en el valor de $K_0$ (Sherif) o en el OCR.

Resumen

# Puntos clave

**Empuje al reposo**: en un muro que no puede moverse, $\sigma'_h = K_0\sigma'_o$; $K_a < K_0 < K_p$

**$K_0$**: Jaky $1 - \sin\varphi'$; Mayne–Kulhawy $\times$ OCR$^{\sin\varphi'}$; Massarsch $0.44 + 0.42\ PI/100$ (en suelos sobreconsolidados $\times \sqrt{OCR}$); Sherif, para arena compactada, $+ (\gamma_d/\gamma_{d,min} - 1)\cdot 5.5$

**Relleno seco**: $P_0 = \frac{1}{2}K_0\gamma H^2$, a $H/3$ desde la base

**Agua**: tensión efectiva con $\gamma'$; $u = \gamma_w(z - H_1)$ se suma íntegramente; la contribución del agua suele ser grande

En un relleno **estratificado**, $\sigma'_o$ es continua y $\sigma'_h$ presenta un salto en el límite donde cambia $K_0$; $\bar{z}$ se obtiene del momento de las áreas

**Movimiento**: $\Delta L/H \sim 0.001$ para el estado activo; $\sim 0.01$ para el pasivo (la mitad en arena densa); si el muro no puede moverse, rige el empuje al reposo

# Referencias bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Jaky, J. (1944). The coefficient of earth pressure at rest. Journal of the Society of Hungarian Architects and Engineers, 7, 355–358.

Mayne, P.W. and Kulhawy, F.H. (1982). $K_o$–OCR relationships in soil. J. Geotech. Eng. Div., ASCE, 108(GT6), 851–872.

Massarsch, K.R. (1979). Lateral earth pressure in normally consolidated clay. Proc. 7th European Conf. SMFE, Brighton, 2, 245–250.

Sherif, M.A., Fang, Y.S. and Sherif, R.I. (1984). KA and K0 behind rotating and non-yielding walls. J. Geotech. Eng., ASCE, 110(GT1), 41–56.

**NOTA**

Todos los ejemplos numéricos se han obtenido con el propio motor de cálculo del módulo; el módulo da los mismos valores. El módulo se abre con el muro del Ejemplo 5 (un estrato; para dos estratos, Ejemplo 6).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos en línea

# De la teoría a la práctica

Introducir en GeoTerva los estratos del propio muro, el método de $K_0$, el valor de OCR y el nivel freático; el módulo da conjuntamente el diagrama de presiones, la fuerza y la altura de aplicación.

**Abrir el módulo →**

**Página de teoría →**

**Abrir en el teléfono**
Los módulos de prueba no requieren registro.

Si desea utilizarlas en sus clases: info@geoterva.com