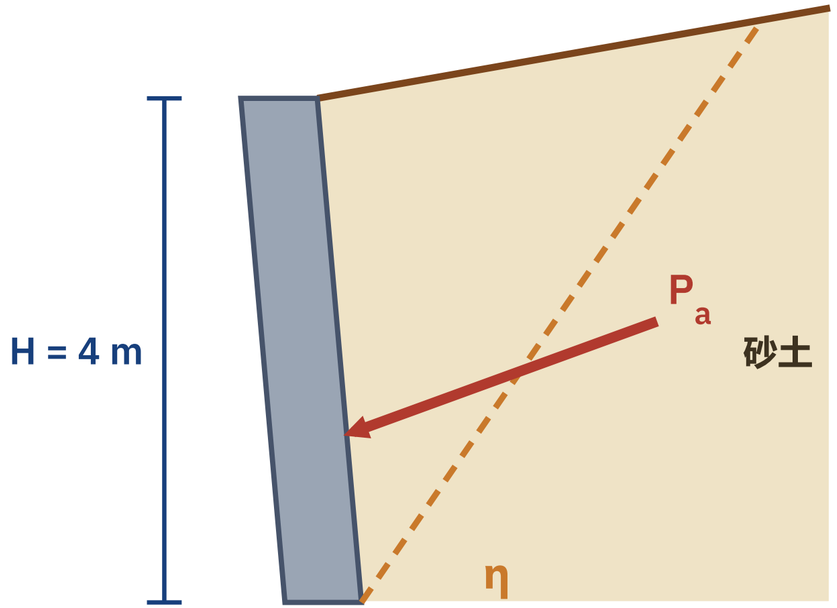
GeoTerva

岩土工程课程讲义 · 侧向土压力

Coulomb侧向土压力

讲义：针对墙后平面滑动土楔、墙背摩擦、倾斜墙面和倾斜填土的Coulomb主动与被动土压力；超载、地下水和分层填土；每个专题均配有工程算例。

试算土楔 | 墙背摩擦角δ′ | 主动与被动 | 超载 · 水 · 土层 | 黏性土层



引言

本讲内容

- Coulomb的**试算滑动楔体**概念：三个力(W, F, P_a)的平衡与最危险土楔
- 墙背摩擦角(δ′)、墙面倾角(θ)和填土坡角(α)如何改变**K_a和K_p**系数
- 理解**主动**土压力合力是各土楔中的**最大值**，**被动**土压力合力是各土楔中的**最小值**
- 求力的作用位置(H/3)、方向（与墙面法线成δ′）及其水平和竖向分量
- **超载**($q_e = q \cos\theta / \cos(\theta - \alpha)$)、**地下水**和分层填土
- 被动土压力情形下Coulomb解何时**偏于不安全**

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：规则是什么，为什么如此?

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

力按单位墙长计(kN/m)；角度以度计；θ为墙面与竖直方向的夹角，α为填土面与水平方向的夹角。

Coulomb平面土楔

理论

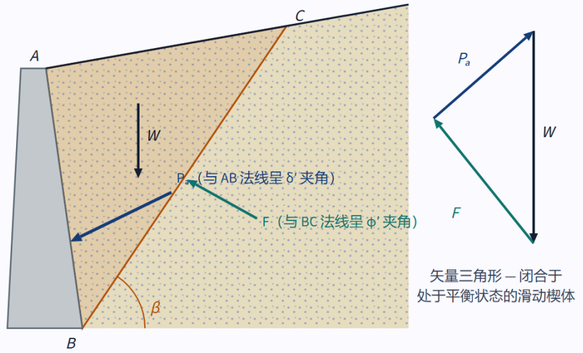
Coulomb (1776)将墙后土体视为沿过墙踵平面滑动的**刚性楔体**，并且与Rankine不同，计入了墙与土之间的**摩擦**。对于无黏性填土，试算楔体上作用有三个力：

- **W**：土楔的重量
- **F**：滑裂面BC上的合力，与滑裂面法线夹角为φ′
- **P_a**：作用于墙上的力，与墙面法线夹角为δ′

平面与水平面夹角为β时，力多边形中的正弦定理为：

$$\frac{W}{\sin(90^\circ+\theta+\delta'-\beta+\varphi')}=\frac{P_a}{\sin(\beta-\varphi')}$$

$$P_a=\tfrac{1}{2}\gamma H^2\,\frac{\cos(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)\sin(\beta-\varphi')}{\cos^2\theta\,\sin(\beta-\alpha)\,\sin(90^\circ+\theta+\delta'-\beta+\varphi')}$$



题目

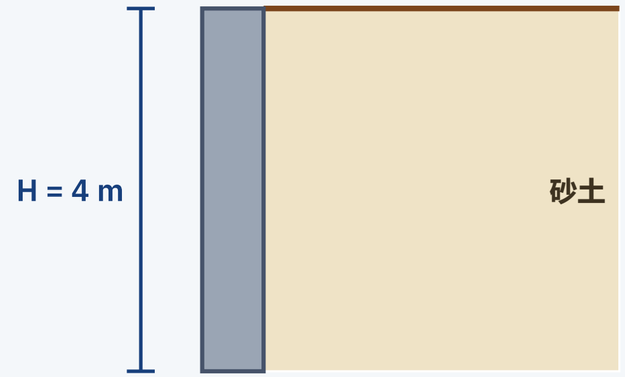
算例

已知条件

墙	$H = 4$ m，**竖直**($\theta = 0$)；**填土表面水平**($\alpha = 0$)
土	**干砂**：$\gamma = 17$ kN/m^3，$\varphi' = 32°$；**墙背摩擦** $\delta' = 16° = \varphi'/2$

求

试算面β = 45°、60°和75°时的$P_a(\beta)$；**最大**的力及其对应的角度β。



解答

解答

1 墙背竖直、填土水平：θ = α = 0 ⇒ $P_a(\beta) = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 \cdot \cos\beta \sin(\beta - \varphi') / [\sin\beta \cos(\beta - \varphi' - \delta')]$

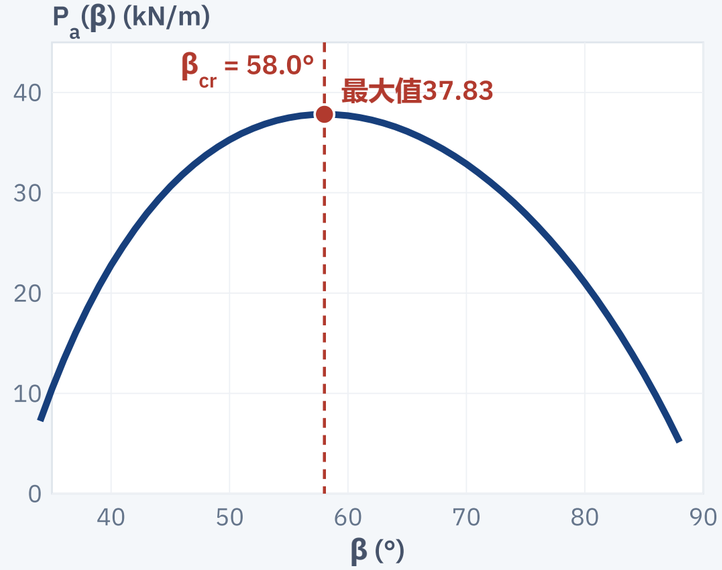
$\beta = 45^\circ$： $P_a = \mathbf{30.64}$ kN/m　　$\beta = 60^\circ$： $P_a = \mathbf{37.69}$ kN/m

$\beta = 75^\circ$： $P_a = \mathbf{27.89}$ kN/m

2 最大试算土楔($dP_a/d\beta = 0$)

$\beta_{cr} = \mathbf{58.0^\circ}$　　$P_{a,max} = \mathbf{37.83}$ kN/m

试算土楔中**最大者为37.83 kN/m**(β = 58.0°)，即Coulomb主动土压力；更陡或更缓的土楔所需的力更小。墙只需能够支挡最危险的土楔即可。



在GeoTerva中验算解答 ↗

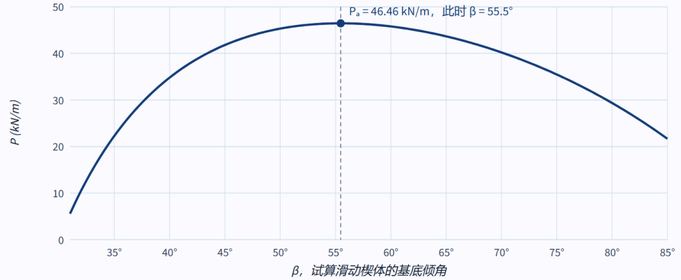
Coulomb主动土压力系数K_a

理论

只有β是未知量。墙体需要挡住的最危险土楔，对应于$P_a(\beta)$的最大值($dP_a/d\beta = 0$)；其解为：

$$K_a = \frac{\cos^2(\varphi' - \theta)}{\cos^2\theta\cos(\delta' + \theta)\left[1 + \sqrt{\dfrac{\sin(\delta' + \varphi')\sin(\varphi' - \alpha)}{\cos(\delta' + \theta)\cos(\theta - \alpha)}}\right]^2} \qquad P_a = \tfrac{1}{2}K_a\gamma H^2$$

φ′	δ′ = 0°	δ′ = 5°	δ′ = 10°	δ′ = 15°	δ′ = 20°	δ′ = 25°
28°	0.3610	0.3448	0.3330	0.3251	0.3203	0.3186
32°	0.3073	0.2945	0.2852	0.2791	0.2755	0.2745
36°	0.2596	0.2497	0.2426	0.2379	0.2354	0.2350
40°	0.2174	0.2098	0.2045	0.2011	0.1994	0.1995



合力作用于底面以上**H/3**处，与墙面法线成**δ′**角；与水平方向的夹角为θ + δ′。

当α = θ = δ′ = 0时，即为Rankine解。墙背摩擦使主动土压力合力**减小**。

题目

算例

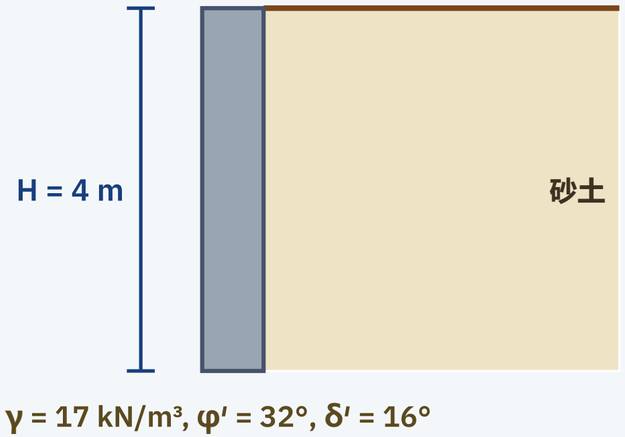
已知条件

墙与土体

算例1中的墙： $H = 4\ \mathrm{m}$，$\theta = \alpha = 0$；$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3}$，$\varphi' = 32^\circ$，$\delta' = 16^\circ$

求

K_a、P_a、作用点高度、水平分量和竖向分量；与Rankine解的比较。



解答

解答

1 系数($\theta = \alpha = 0$)

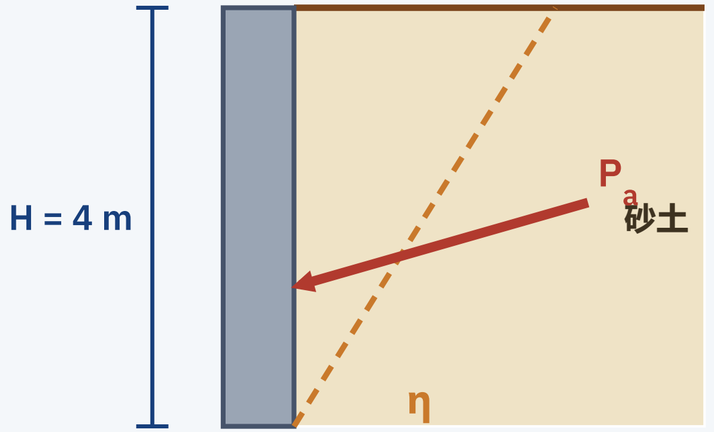
$$\sqrt{\frac{\sin 48^\circ \sin 32^\circ}{\cos 16^\circ}} = 0.6401$$

$$K_a = \frac{\cos^2 32^\circ}{\cos 16^\circ \,(1 + 0.6401)^2} = \frac{0.7192}{2.5856} = \mathbf{0.2782}$$

2 力、作用位置及分量（与水平面夹角$\delta' = 16^\circ$）

$$P_a = \tfrac{1}{2}(0.2782)(17)(4)^2 = \mathbf{37.83}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \tfrac{4}{3} = 1.33\ \text{m}$$

$$P_h = P_a \cos 16^\circ = 36.36 \qquad P_v = P_a \sin 16^\circ = 10.43\ \text{kN/m}$$



P_a = **37.83 kN/m**；与试算土楔中最大者（算例1）相同。按Rankine理论($\delta' = 0$, $K_a = 0.3073$)将得41.79 kN/m：墙背摩擦使该力减小了9%。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

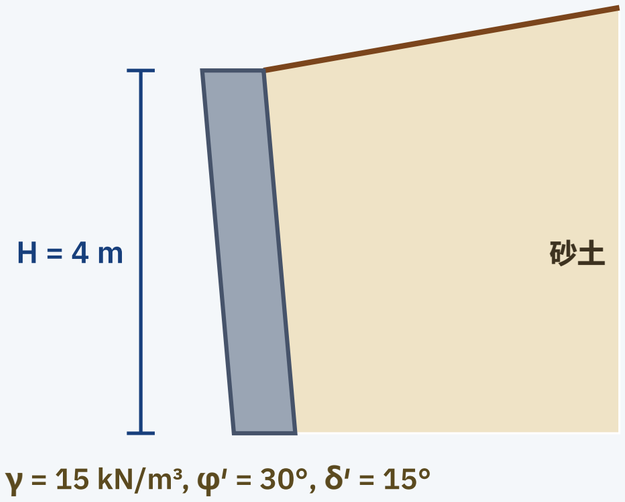
算例

求

K_a、P_a及其方向和作用位置；临界土楔β。模块默认以该挡土墙打开。

已知条件

墙	$H = 4$ m；**墙面自竖直方向倾斜**$\theta = 5^\circ$
填土	**地表坡度**$\alpha = 10^\circ$；$\gamma = 15$ kN/m^3，$\varphi' = 30^\circ$
墙背摩擦	$\delta' = 15^\circ$ $(\delta'/\varphi' = \frac{1}{2})$



解答 (1/2)

解答

1 分子与根式项

$$\cos^2(30^\circ - 5^\circ) = 0.8214 \qquad \cos^2 5^\circ \cos(15^\circ + 5^\circ) = 0.9326$$

$$\sqrt{\frac{\sin 45^\circ \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ \cos(-5^\circ)}} = \sqrt{0.2583} = 0.5083$$

2 系数

$$K_a = \frac{0.8214}{0.9326\,(1 + 0.5083)^2} = \mathbf{0.3872}$$

解答 (2/2)

解答

3 力及其位置

$$P_a = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_a = \tfrac{1}{2}(15)(4)^2(0.3872) = \mathbf{46.46}\ \text{kN/m}$$

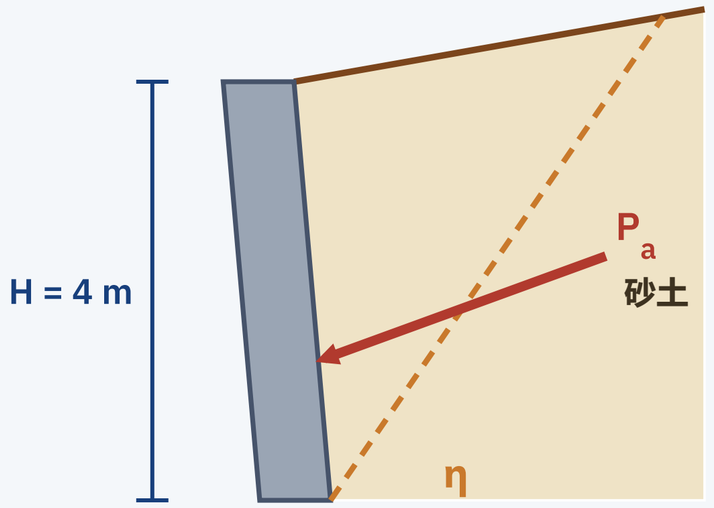
$$\bar{z} = \frac{H}{3} = \mathbf{1.33}\ \text{m}$$

4 方向：与法线夹角δ′ = 15°，与水平线夹角θ + δ′ = 20°

$$P_h = P_a \cos 20^\circ = 43.66\ \text{kN/m}$$

$$P_v = P_a \sin 20^\circ = 15.89\ \text{kN/m}$$

P_a = **46.46 kN/m**，作用点在底面以上1.33 m。临界土楔与水平面成**β ≈ 55.5°**角（试算土楔的顶点）。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

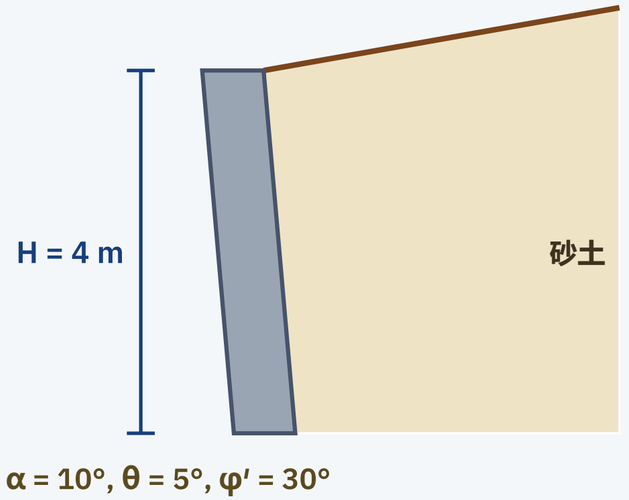
算例

已知条件

墙与填土	**算例3中的挡土墙：** $\theta = 5^\circ,\ \alpha = 10^\circ,\ \varphi' = 30^\circ$**；为作对比，取竖直墙背、水平填土(**$\theta = \alpha = 0$**)**
变量	$\delta' = 0^\circ,\ 5^\circ,\ 10^\circ,\ 15^\circ,\ 20^\circ,\ 25^\circ,\ 30^\circ$

求

各δ′对应的K_a；**最小**的K_a出现在哪个δ′处？推荐的δ′/φ′范围。



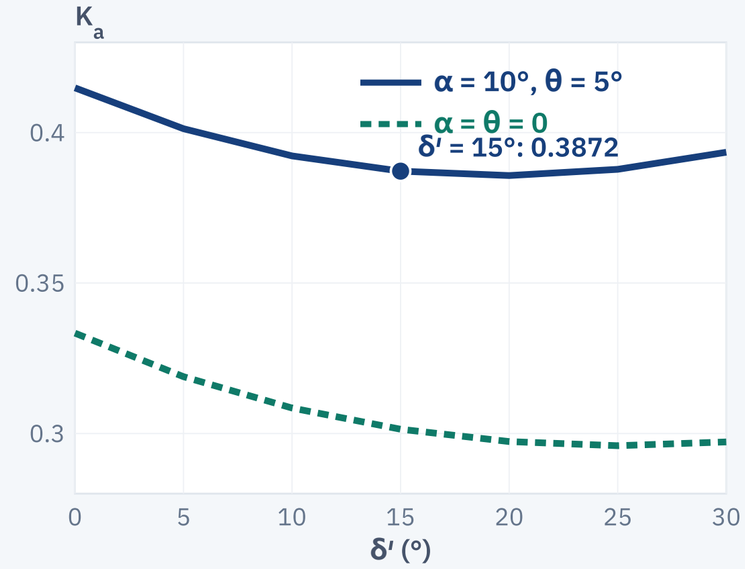
解答

解答

1 同一公式的七个δ′值

δ′	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°
K_a (θ = 5°, α = 10°)	0.4149	0.4013	0.3923	0.3872	0.3857	0.3878	0.3935
K_a (θ = α = 0)	0.3333	0.3189	0.3085	0.3014	0.2973	0.2959	0.2972

随着δ′增大，K_a先**减小**（δ′ = 0 → 15°时，0.415 → 0.387），在δ′ ≈ 20–25°时达到最小值，随后又**增大**。工程中取δ′ = (1/2 – 2/3)φ′；取δ′ = φ′并不偏于安全，因为这以墙体相对于土体向下滑移为前提。



在GeoTerva中验算解答 ↗

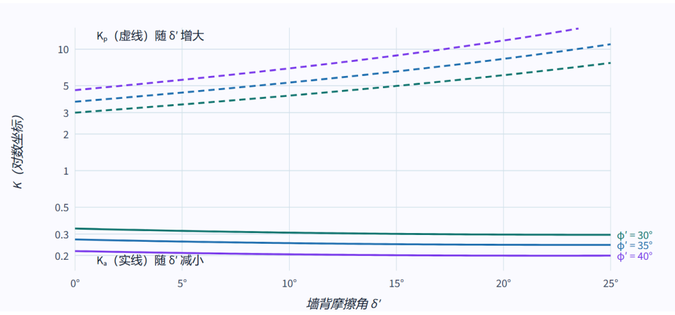
Coulomb被动土压力系数K_p

理论

墙被推向土体时，合力和墙的作用力转到其法线的**另一侧**；被动土压力取各试算土楔中的**最小值**：

$$K_p = \frac{\cos^2(\varphi' + \theta)}{\cos^2\theta\cos(\delta' - \theta)\left[1 - \sqrt{\dfrac{\sin(\varphi' + \delta')\sin(\varphi' + \alpha)}{\cos(\delta' - \theta)\cos(\alpha - \theta)}}\right]^2} \qquad P_p = \tfrac{1}{2}K_p\gamma H^2$$

φ′	δ′ = 0°	δ′ = 5°	δ′ = 10°	δ′ = 15°	δ′ = 20°
15°	1.698	1.901	2.131	2.403	2.735
20°	2.040	2.313	2.635	3.029	3.525
25°	2.464	2.833	3.285	3.855	4.597
30°	3.000	3.505	4.143	4.977	6.105
35°	3.690	4.391	5.309	6.555	8.324
40°	4.599	5.593	6.946	8.872	11.771



墙背摩擦使被动土压力**迅速增大**（φ′ = 30°，δ′ = 0 → 20°时K_p由3.00增至6.11）。

δ′较大时，平面土楔法给出的被动抗力**偏大**（偏于不安全）：对数螺旋模块。

题目

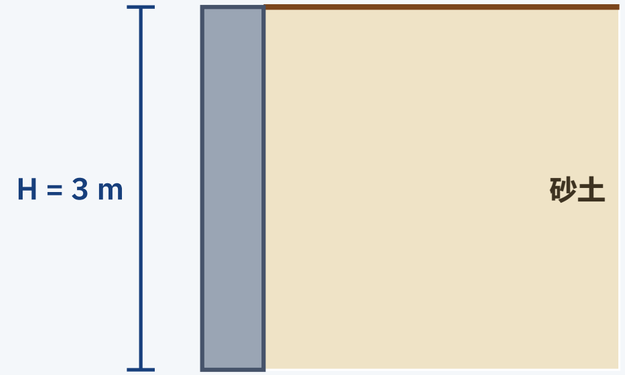
算例

已知条件

墙	$H = 3$ m，**竖直；水平填土**
土	**干砂：** $\gamma = 15.7$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$
墙背摩擦	$\delta' = 0^\circ,\ 10^\circ,\ 15^\circ,\ 20^\circ$

求

对每个δ′：K_p、P_p及其分量；δ′ = 15°时，与曲线滑裂面解(302–326 kN/m)对比。



γ = 15.7 kN/m³，φ′ = 30°（被动）

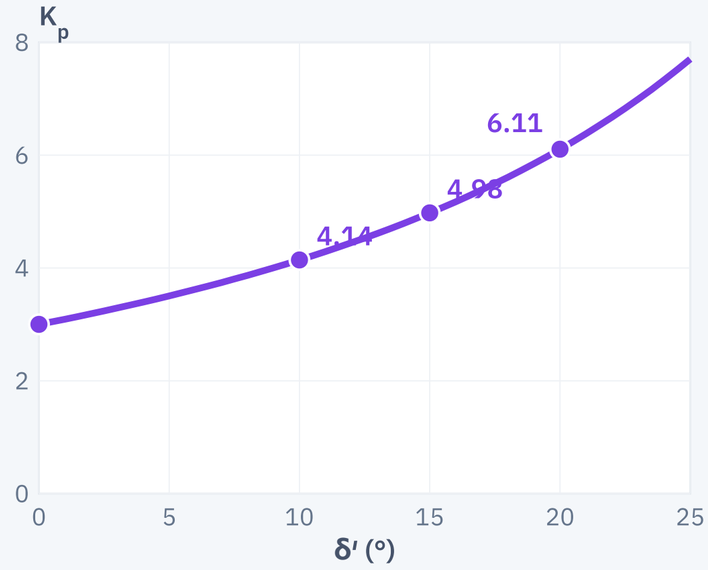
解答

解答

1 K_p公式，$P_p = \frac{1}{2}K_p\gamma H^2 = \frac{1}{2}K_p(15.7)(9) = 70.65\ K_p$

δ′	K_p	P_p (kN/m)	P_h	P_v	β（临界土楔）
0°	3.000	212.0	212.0	0.0	30.0°
10°	4.143	292.7	288.3	50.8	23.4°
15°	4.977	351.6	339.6	91.0	20.7°
20°	6.105	431.3	405.3	147.5	18.1°

δ′从0增至20°时，P_p由212.0增至431.3 kN/m：增大为**2.0倍**。δ′ = 15°时，Coulomb解给出351.6 kN/m；曲线滑裂面的解在302–326 kN/m范围内，即平面楔体法的被动土压力约**偏大8%**（不安全）。



在GeoTerva中验算解答 ↗

Coulomb解在模块中的扩展

理论

超载q（作用于斜面单位面积上的竖向荷载）按与土体相同的比例加到每个试算土楔的重量上；临界土楔和K_a不变。折算到竖向单位深度上的等效应力：

$$q_e = q\,\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} \qquad P_a = \tfrac{1}{2}K_a\gamma H^2 + K_a q_e H$$

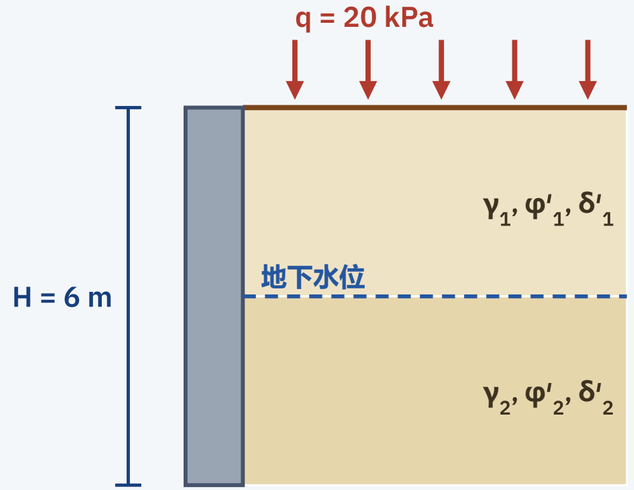
第一部分位于墙底以上H/3处，第二部分位于H/2处。**在分层填土中**（分界面水平，厚度自墙面顶点A竖直量取），各层按各自的γ、φ′和δ′取各自的系数K_i：

$$\sigma'_v = q_e + \sum \gamma_i h_i \qquad \sigma' = K_i\,\sigma'_v\cos\theta$$

σ′作用于墙面单位长度上，与法线成该土层的δ′角；在K发生变化的分界处，压力发生突变。

地下水（水平面，z_w）以下：$\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$；$u = \gamma_w(z - z_w)$**垂直**于墙面叠加。各力分解为垂直(N)和平行(T)于墙面的分量后分别求和：$P = \sqrt{(N^2 + T^2)}$，$\beta = \tan^{-1}(T/N)$。

分层填土与水



题目

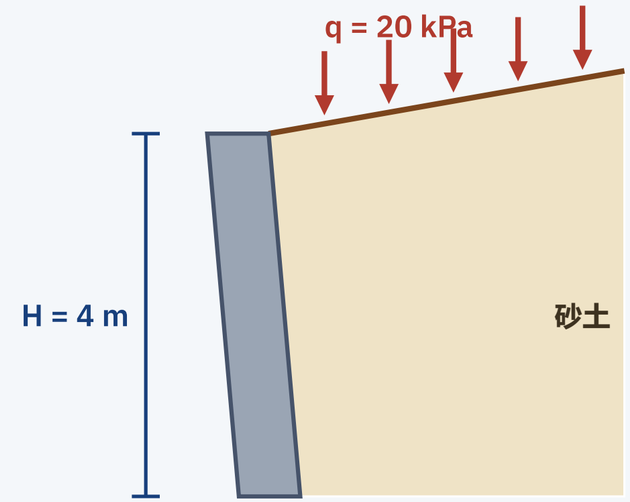
算例

已知条件

墙与土体	**算例3中的墙：** $H = 4\ \text{m}$，$\theta = 5^\circ$，$\alpha = 10^\circ$；$\gamma = 15\ \text{kN/m}^3$，$\varphi' = 30^\circ$，$\delta' = 15^\circ$
超载	**倾斜表面上的均布荷载** $q = 20\ \text{kPa}$**（垂直于表面）**

求

q_e、总P_a及其作用高度；超载所占份额。



解答

解答

1 等效竖向应力

$$q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} = 20\frac{\cos 5^\circ}{\cos(-5^\circ)} = \mathbf{20.00}\ \text{kPa}$$

2 土体和超载产生的力(K_a = 0.3872)

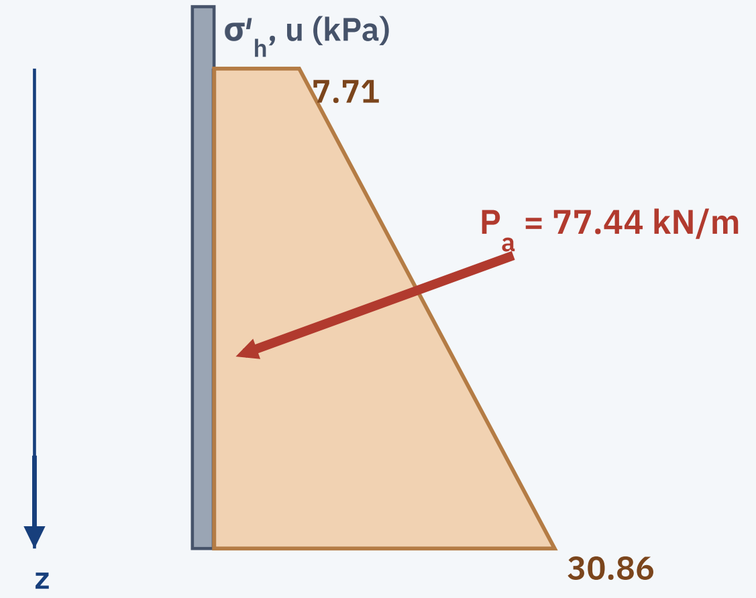
$$P_\gamma = \tfrac{1}{2}K_a\gamma H^2 = 46.46\ \text{kN/m}\quad (H/3 = 1.33\ \text{m})$$

$$P_q = K_a q_e H = 0.3872(20)(4) = 30.97\ \text{kN/m}\quad (H/2 = 2.00\ \text{m})$$

3 合计及位置

$$P_a = 46.46 + 30.97 = \mathbf{77.44}\ \text{kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{46.46(1.33) + 30.97(2.00)}{77.44} = \mathbf{1.60}\ \text{m}$$



超载使合力增大了67%(P_a = 77.44 kN/m)；作用点由1.33 m升高到**1.60 m**。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

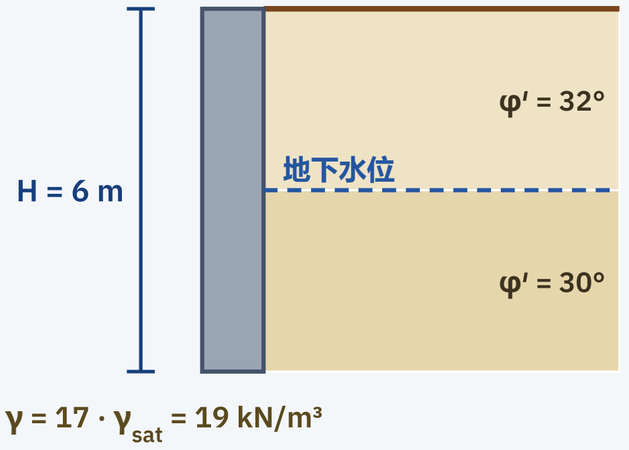
算例

已知条件

墙	$H = 6$ m，**竖直；水平填土；无地面超载**
第1层(0–3 m)	$\gamma = 17$ kN/m^3, $\varphi' = 32°$, $\delta' = 16°$
第2层(3–6 m)	$\gamma_{sat} = 19$ kN/m^3, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$
地下水位	**深度3 m处**

求

各土层中的压力；土和水的作用力；P、β及作用点高度。



解答 (1/2)

解答

1 系数

$$K_1(32^\circ, 16^\circ) = \mathbf{0.2782} \qquad K_2(30^\circ, 15^\circ) = \mathbf{0.3014}$$

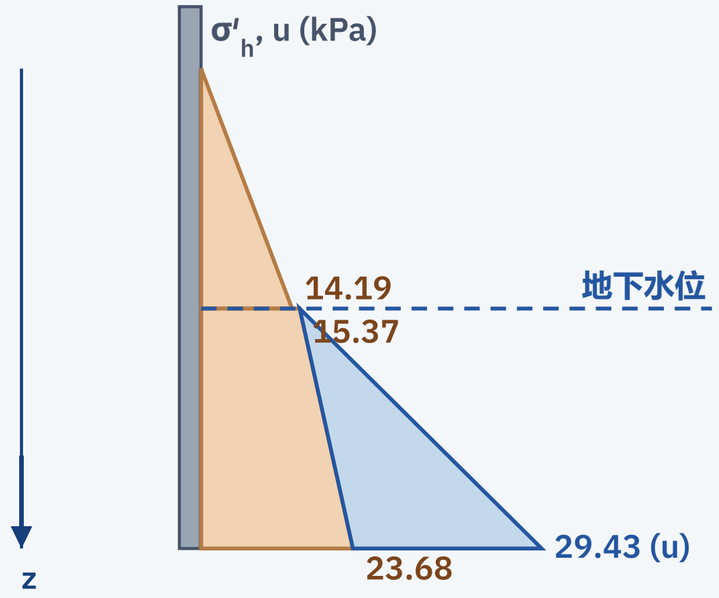
2 应力：$\sigma'_v(3) = 17(3) = 51$；$\sigma'_v(6) = 51 + 3(19 - 9.81) = 78.57$ kPa

$$p_1 = 0.2782(51) = \mathbf{14.19}\ \text{kPa}\ \text{（顶部）}$$

$$p_2 = 0.3014(51) = \mathbf{15.37}\ \text{kPa}\ \text{（底部）}$$

$$p(6) = 0.3014(78.57) = \mathbf{23.68}\ \text{kPa}$$

$$u(6) = 9.81(3) = \mathbf{29.43}\ \text{kPa}$$



解答 (2/2)

解答

3 土的作用力（作用于墙面，各层采用各自的δ′角）：三角形 · 矩形 · 三角形

$$P_s = \tfrac{1}{2}(3)(14.19) + 3(15.37) + \tfrac{1}{2}(3)(8.31) = 21.28 + 46.12 + 12.47 = 79.86 \text{ kN/m}$$

$$P_w = \tfrac{1}{2}(29.43)(3) = 44.14 \text{ kN/m} \quad \text{（垂直于墙）}$$

4 分量、合力和位置

$$N = N_s + N_w = 77.04 + 44.14 = 121.18 \qquad T = 21.03 \text{ kN/m}$$

$$P = \sqrt{N^2 + T^2} = \mathbf{123.00} \text{ kN/m} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{T}{N} = 9.84^\circ \qquad \bar{z} = \mathbf{1.69} \text{ m}$$

合力为**123.00 kN/m**（土压力79.86 + 水压力44.14），作用点距底部1.69 m。水压力为土压力的55%；在土层分界处p跳变：14.19 → 15.37 kPa（K值改变）。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

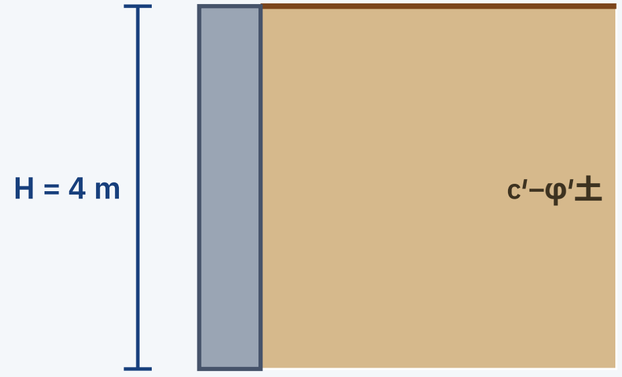
算例

已知条件

墙	$H = 4$ m，**竖直；水平填土**
土	**c′–φ′:** $\gamma = 18$ kN/m^3, $\varphi' = 25^\circ$, $c' = 10$ **kPa;** $\delta' = 12.5^\circ = \varphi'/2$

求

K_a、受拉深度z_0、考虑与不考虑拉裂缝的P_a；与Rankine的比较。



γ = 18, φ′ = 25°, c′ = 10 kPa, δ′ = 12.5°

解答 (1/2)

解答

1 Coulomb系数及黏聚力项（忽略附着力）

$$K_a(25^\circ, 12.5^\circ) = \mathbf{0.3674} \qquad \sigma' = K_a\sigma'_v - 2c'\sqrt{K_a}$$

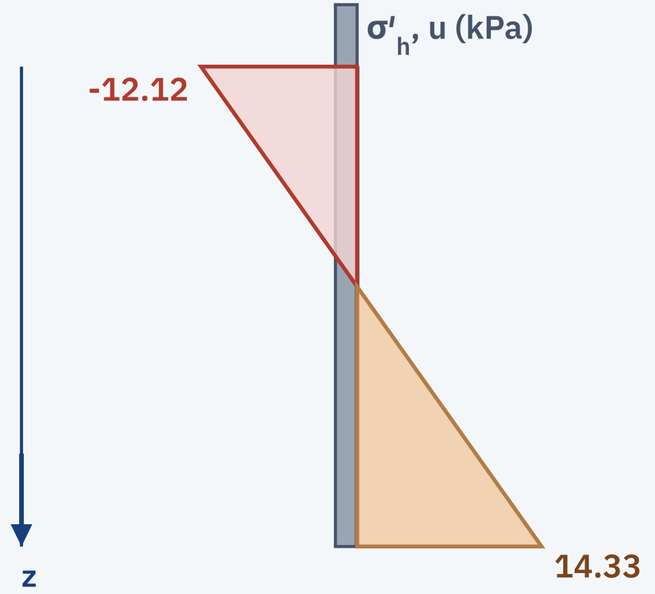
$$2c'\sqrt{K_a} = 2(10)(0.6061) = 12.12 \text{ kPa}$$

2 顶部、底部及拉裂缝深度处

$$\sigma'(0) = -\mathbf{12.12} \text{ kPa（受拉）}$$

$$\sigma'(4) = 0.3674(18)(4) - 12.12 = \mathbf{14.33} \text{ kPa}$$

$$z_0 = \frac{2c'}{\gamma\sqrt{K_a}} = \frac{20}{18(0.6061)} = \mathbf{1.83} \text{ m}$$



解答 (2/2)

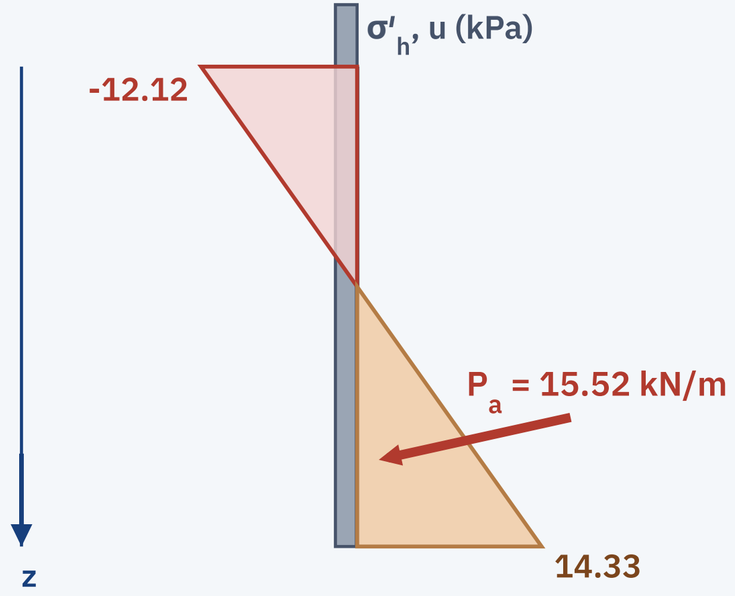
解答

3 含拉裂缝的合力（仅取正值三角形）

$$P_a = \tfrac{1}{2}(14.33)(4 - 1.83) = \mathbf{15.52}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = 0.72\ \text{m}$$

无裂缝：$P_a = 4.41$ kN/m

考虑拉裂缝时P_a = **15.52 kN/m**；不考虑裂缝（含负值区）为4.41 kN/m：若计入受拉区，所得的力会比实际值小得多。按Rankine理论(δ′ = 0)将得18.59 kN/m。



在GeoTerva中验算解答 ↗

Coulomb解的适用范围

理论

滑裂面为平面。对主动土压力，这是实际滑裂面的良好近似；对被动土压力，当δ′较大时平面与曲面相差较大，所得抗力**大于实际值**（δ′ > φ′/3时需注意；参见对数螺旋模块）。

墙背摩擦角δ′为输入量：取决于墙体材料以及土体相对于墙体的运动；粗略取值为δ′ = (1/2 – 2/3)φ′（混凝土–砂土）。

黏性土层：黏聚力项按Rankine形式取用，K取该土层的Coulomb值；墙–土间黏着力忽略不计；受拉区以拉裂缝的形式扣除。

分层解是模块的工程扩展（文献中不存在封闭形式的分层Coulomb解）；单层时退化为封闭解，δ′ = 0且填土水平时退化为Rankine解。

地震工况由Mononobe–Okabe模块计算；Coulomb为静力解。

小结

要点回顾

土楔：W，F（与其法线成φ′角），P（与其法线成δ′角）；$P_a(\beta)$由正弦定理求得；**主动 = 最大**土楔，**被动 = 最小**土楔

$K_a = \cos^2(\varphi' - \theta) / \{\cos^2\theta \cos(\delta' + \theta)[1 + \sqrt{(\ldots)}]^2\}$；合力作用点距底部H/3，与水平面夹角为θ + δ′；当δ′ = 0且为平直几何条件时，即为Rankine解

墙背摩擦使主动土压力减小（至$\delta' \approx 2\varphi'/3$为止），并使被动土压力迅速增大；被动状态下δ′较大时，平面土楔不安全

超载$q_e = q \cos\theta / \cos(\theta - \alpha)$：$P = \frac{1}{2}K\gamma H^2 (H/3) + K q_e H (H/2)$

分层土 + 水：$\sigma' = K_i \sigma'_v \cos\theta$，在分界面处发生突变；u垂直于墙面；$P = \sqrt{(N^2 + T^2)}$，$\beta = \tan^{-1}(T/N)$

黏性土层：$\sigma' = K\sigma'_v - 2c'\sqrt{K}$，拉裂缝范围内的负值区舍去

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Coulomb, C.A. (1776). Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. Mémoires de Mathématique et de Physique, Académie Royale des Sciences, Paris, 7, 343–382.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning — a surcharge on a sloping backfill.

注

所有数值算例均由模块自带的计算引擎生成；模块给出的数值与之相同。模块打开时载入算例3中的挡土墙(θ = 5°, α = 10°, δ′ = 15°)。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自己挡土墙的倾角、填土坡角、墙背摩擦、土层、超载和地下水；模块同时给出合力、其方向及作用点高度。

打开模块→

理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。