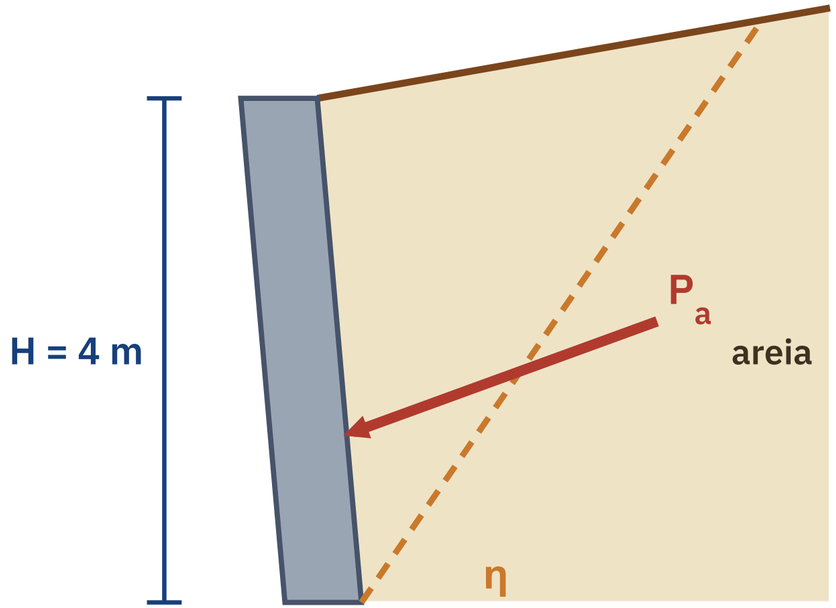
Apresentação de aula de geotecnia · Empuxo de terra

Empuxo de terra de Coulomb

Aula: empuxo ativo e passivo de Coulomb para a cunha de ruptura plana atrás do muro, atrito solo-muro, face do muro inclinada e reaterro inclinado; sobrecarga, água subterrânea e reaterro estratificado; exemplo resolvido em cada tópico.

Cunha de tentativa · Atrito solo-muro δ′ · Ativo e passivo · Sobrecarga · água · camada · Camada coesiva



Introdução

O que veremos nesta aula?

- A ideia da **cunha de tentativa** de Coulomb: equilíbrio das três forças (W, F, P_a) e a cunha mais crítica
- Como o atrito do muro (δ′), a inclinação da face do muro (θ) e a inclinação do reaterro (α) alteram os coeficientes **K_a e K_p**
- O empuxo **ativo** é o **maior** valor entre as cunhas, e o empuxo **passivo** é o **menor** valor entre as cunhas
- Determinar a posição da força (H/3), sua direção (δ′ em relação à normal à face) e suas componentes horizontal e vertical
- **Sobrecarga** ($q_e = q \cos\theta / \cos(\theta - \alpha)$), **água subterrânea** e aterro estratificado
- Quando a solução de Coulomb é **insegura** no caso passivo

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: qual é a regra e por que é assim?

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

As forças referem-se à unidade de comprimento do muro (kN/m); ângulos em graus; θ é o ângulo da face do muro com a vertical e α, o ângulo do reaterro com a horizontal.

Cunha plana de Coulomb

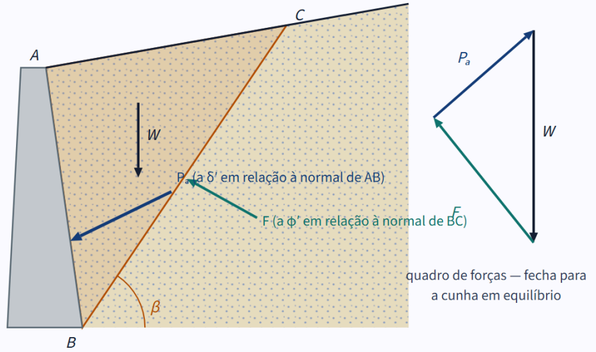
TEORIA

Coulomb (1776) considera o solo atrás do muro uma **cunha rígida** que desliza sobre um plano que passa pelo calcanhar e, diferentemente de Rankine, leva em conta o **atrito** entre o muro e o solo. Em aterro não coesivo, três forças atuam sobre a cunha de tentativa:

W: peso da cunha

F: resultante no plano de ruptura BC, inclinada de φ′ em relação à normal ao plano

P_a: força sobre o muro, inclinada de δ′ em relação à normal à face do muro



Se o plano forma um ângulo β com a horizontal, pela lei dos senos no polígono de forças:

$$\frac{W}{\sin(90^\circ + \theta + \delta' - \beta + \varphi')} = \frac{P_a}{\sin(\beta - \varphi')}$$

$$P_a = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 \, \frac{\cos(\theta - \beta)\cos(\theta - \alpha)\sin(\beta - \varphi')}{\cos^2\theta \, \sin(\beta - \alpha) \, \sin(90^\circ + \theta + \delta' - \beta + \varphi')}$$

Enunciado

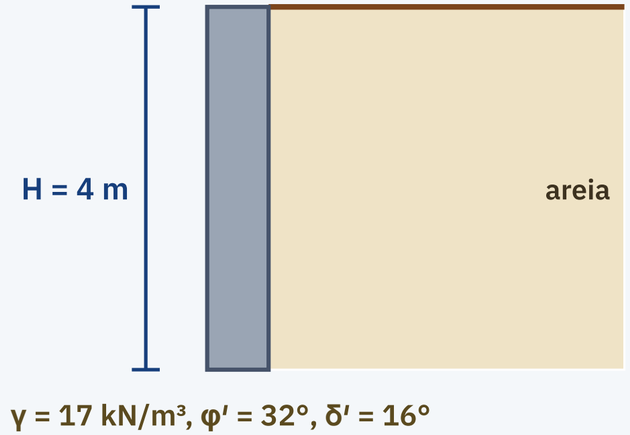
EXEMPLO

PEDE-SE

Para os planos de tentativa β = 45°, 60° e 75°, **$P_a(\beta)$**; a força **máxima** e seu ângulo β.

Dados

Muro	$H = 4$ **m, vertical ($\theta = 0$); superfície do reaterro horizontal ($\alpha = 0$)**
Solo	**areia seca: $\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 32°$; atrito solo-muro $\delta' = 16° = \varphi'/2$**



Solução

SOLUÇÃO

1 Muro vertical, reaterro horizontal: θ = α = 0 ⇒ $P_a(\beta) = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 \cdot \cos\beta \sin(\beta - \varphi') / [\sin\beta \cos(\beta - \varphi' - \delta')]$

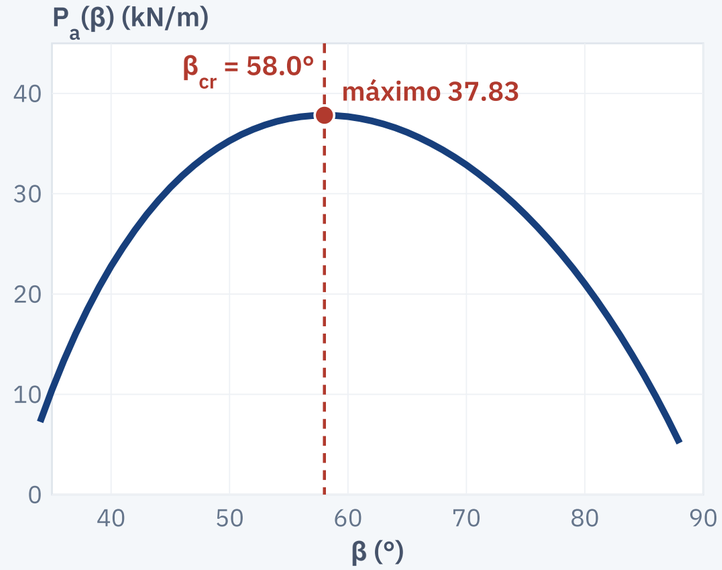
$$\beta = 45^\circ : \; P_a = \mathbf{30.64}\ \mathrm{kN/m} \qquad \beta = 60^\circ : \; P_a = \mathbf{37.69}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\beta = 75^\circ : \; P_a = \mathbf{27.89}\ \mathrm{kN/m}$$

2 Maior cunha de tentativa ($dP_a/d\beta = 0$)

$$\beta_{cr} = \mathbf{58.0}^\circ \qquad P_{a,max} = \mathbf{37.83}\ \mathrm{kN/m}$$

Entre as cunhas de tentativa, o **maior valor, 37.83 kN/m** (β = 58.0°), é o empuxo ativo de Coulomb; cunhas mais inclinadas ou mais deitadas exigem uma força menor. O muro precisa ser capaz de reter somente a cunha mais crítica.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

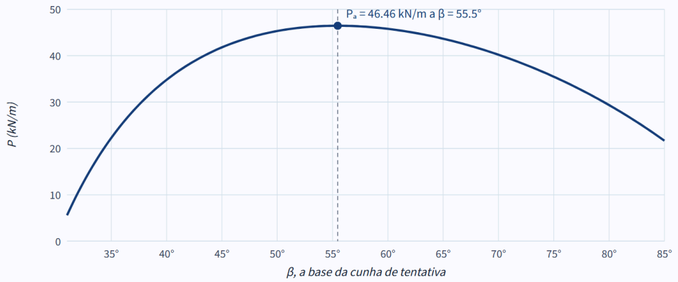
Coeficiente ativo de Coulomb K_a

TEORIA

Apenas β era desconhecido. A cunha mais crítica, que o muro deve conter, é a de máximo $P_a(\beta)$ ($dP_a/d\beta = 0$); a solução:

$$K_a = \frac{\cos^2(\varphi' - \theta)}{\cos^2\theta\cos(\delta' + \theta)\left[1 + \sqrt{\dfrac{\sin(\delta' + \varphi')\sin(\varphi' - \alpha)}{\cos(\delta' + \theta)\cos(\theta - \alpha)}}\right]^2} \qquad P_a = \tfrac{1}{2}K_a\gamma H^2$$

φ′	δ′ = 0°	δ′ = 5°	δ′ = 10°	δ′ = 15°	δ′ = 20°	δ′ = 25°
28°	0.3610	0.3448	0.3330	0.3251	0.3203	0.3186
32°	0.3073	0.2945	0.2852	0.2791	0.2755	0.2745
36°	0.2596	0.2497	0.2426	0.2379	0.2354	0.2350
40°	0.2174	0.2098	0.2045	0.2011	0.1994	0.1995



A força atua a **H/3** acima da base, inclinada de **δ′** em relação à normal à face do muro; forma com a horizontal o ângulo θ + δ′.

Rankine para α = θ = δ′ = 0. O atrito solo-muro **reduz** a força ativa.

Enunciado

EXEMPLO

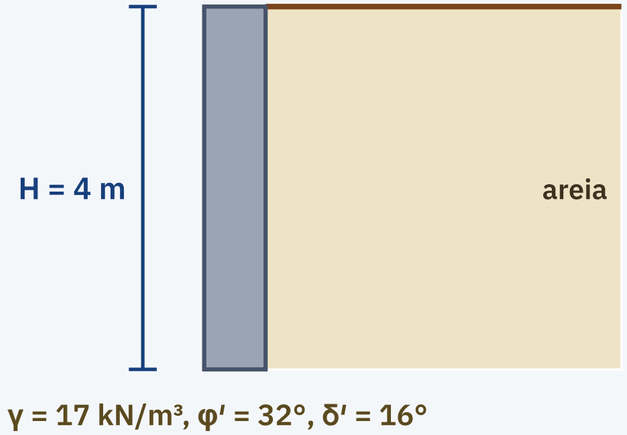
PEDE-SE

K_a, **P_a**, altura de atuação, componentes horizontal e vertical; comparação com Rankine.

Dados

Muro e solo

O muro do Exemplo 1: $H = 4$ **m,** $\theta = \alpha = 0$**;** $\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 32°,\ \delta' = 16°$



Solução

SOLUÇÃO

1 Coeficiente (θ = α = 0)

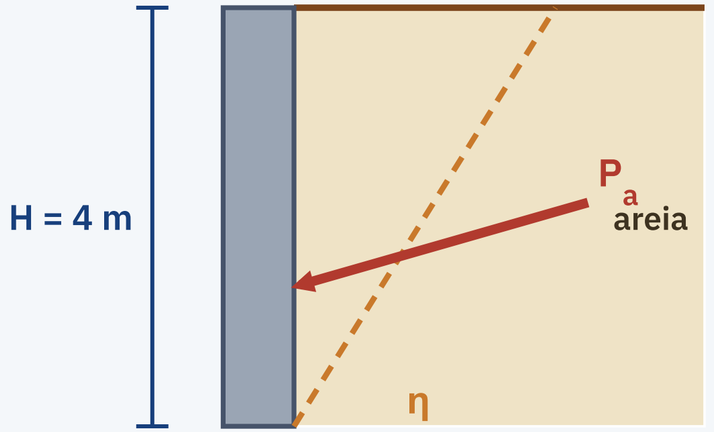
$$\sqrt{\frac{\sin 48^\circ \sin 32^\circ}{\cos 16^\circ}} = 0.6401$$

$$K_a = \frac{\cos^2 32^\circ}{\cos 16^\circ \,(1 + 0.6401)^2} = \frac{0.7192}{2.5856} = \mathbf{0.2782}$$

2 Força, posição e componentes (δ′ = 16° com a horizontal)

$$P_a = \tfrac{1}{2}(0.2782)(17)(4)^2 = \mathbf{37.83}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \tfrac{4}{3} = 1.33\ \text{m}$$

$$P_h = P_a \cos 16^\circ = 36.36 \qquad P_v = P_a \sin 16^\circ = 10.43\ \text{kN/m}$$



P_a = **37.83 kN/m**; igual ao obtido com a maior das cunhas de tentativa (Exemplo 1). Rankine (δ′ = 0, K_a = 0.3073) forneceria 41.79 kN/m: o atrito solo-muro reduziu a força em 9%.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

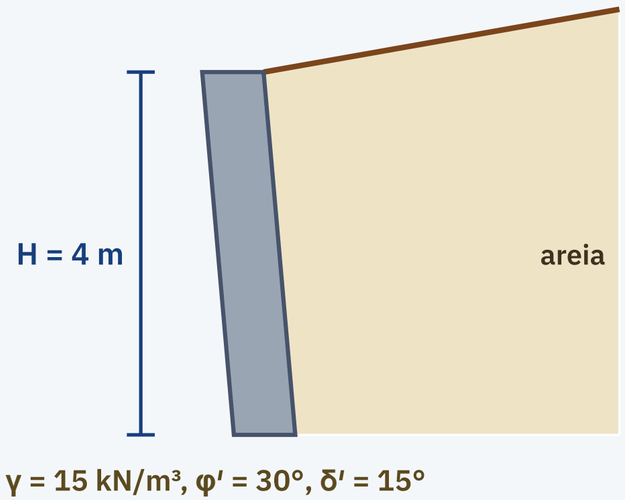
EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 4$ **m; face inclinada de** $\theta = 5^\circ$ **em relação à vertical**
Aterro	**inclinação da superfície** $\alpha = 10^\circ$**;** $\gamma = 15\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ$
Atrito solo-muro	$\delta' = 15^\circ$ $(\delta'/\varphi' = \frac{1}{2})$

PEDE-SE

K_a, P_a, sua direção e posição; cunha crítica β. Este é o muro inicial do módulo.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Numerador e termo da raiz

$$\cos^2(30^\circ - 5^\circ) = 0.8214 \qquad \cos^2 5^\circ \cos(15^\circ + 5^\circ) = 0.9326$$

$$\sqrt{\frac{\sin 45^\circ \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ \cos(-5^\circ)}} = \sqrt{0.2583} = 0.5083$$

2 Coeficiente

$$K_a = \frac{0.8214}{0.9326\,(1 + 0.5083)^2} = \mathbf{0.3872}$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Força e posição

$$P_a = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_a = \tfrac{1}{2}(15)(4)^2(0.3872) = \mathbf{46.46}\ \mathrm{kN/m}$$

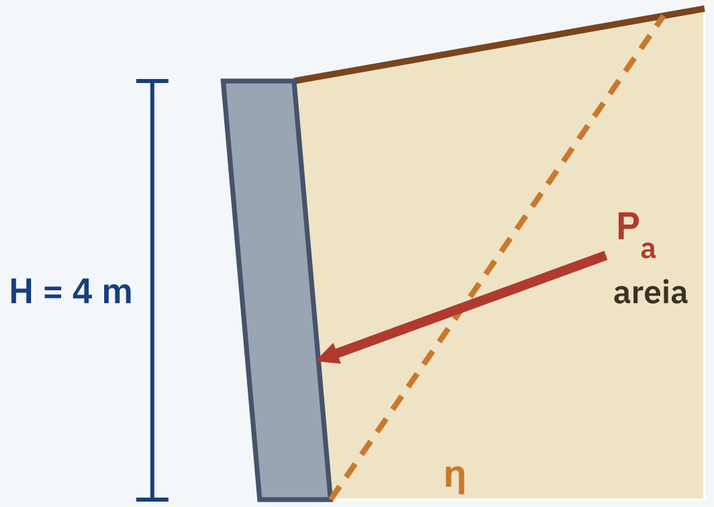
$$\bar{z} = \tfrac{H}{3} = \mathbf{1.33}\ \mathrm{m}$$

4 Direção: δ′ = 15° em relação à normal, θ + δ′ = 20° em relação à horizontal

$$P_h = P_a \cos 20^\circ = 43.66\ \mathrm{kN/m}$$

$$P_v = P_a \sin 20^\circ = 15.89\ \mathrm{kN/m}$$

P_a = **46.46 kN/m**, 1.33 m acima da base. A cunha crítica forma **β ≈ 55.5°** com a horizontal (ponto de máximo entre as cunhas de tentativa).



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

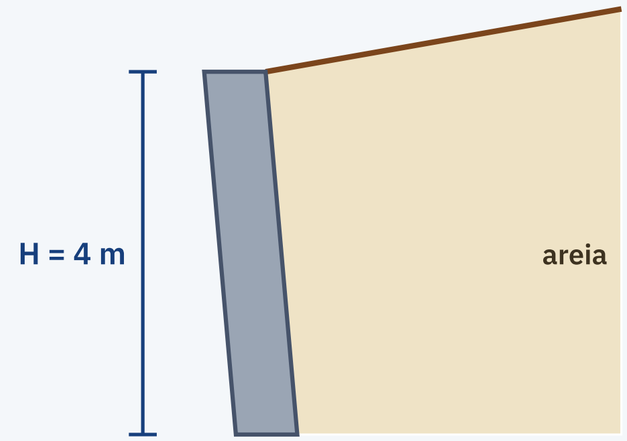
EXEMPLO

PEDE-SE

Para cada δ′, **K_a**; para qual δ′ ocorre o **menor** K_a? Faixa recomendada de δ′/φ′.

Dados

Muro e aterro	**O muro do Exemplo 3: $\theta = 5^\circ,\ \alpha = 10^\circ,\ \varphi' = 30^\circ$; para comparação, muro vertical, aterro horizontal ($\theta = \alpha = 0$)**
Variável	$\delta' = 0^\circ,\ 5^\circ,\ 10^\circ,\ 15^\circ,\ 20^\circ,\ 25^\circ,\ 30^\circ$



α = 10°, θ = 5°, φ′ = 30°

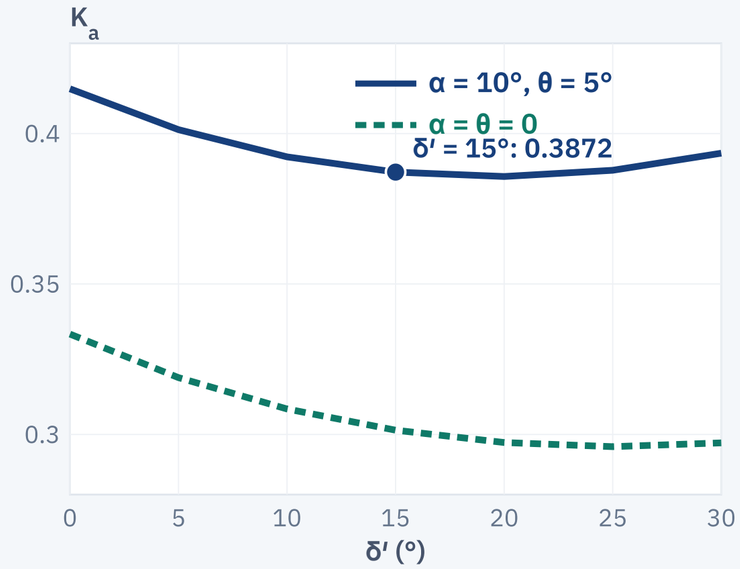
Solução

SOLUÇÃO

1 Sete valores de δ′ com a mesma fórmula

δ′	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°
K_a (θ = 5°, α = 10°)	0.4149	0.4013	0.3923	0.3872	0.3857	0.3878	0.3935
K_a (θ = α = 0)	0.3333	0.3189	0.3085	0.3014	0.2973	0.2959	0.2972

À medida que δ′ aumenta, K_a primeiro **diminui** (de 0.415 em δ′ = 0 para 0.387 em 15°), atinge o valor mínimo em δ′ ≈ 20–25° e volta a **aumentar**. Na prática, adota-se δ′ = (1/2 – 2/3)φ′; adotar δ′ = φ′ não está a favor da segurança, pois depende de o muro deslizar para baixo em relação ao solo.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

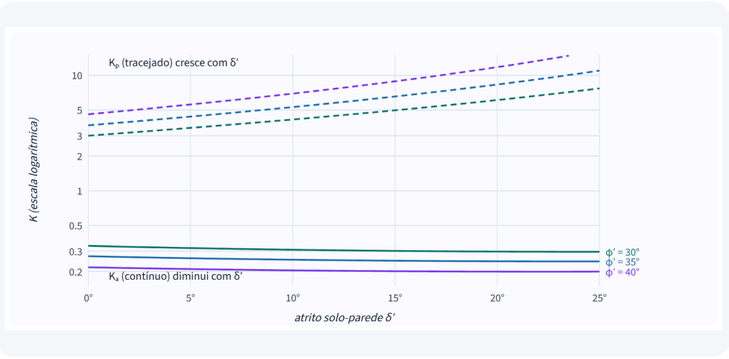
Coeficiente passivo de Coulomb K_p

TEORIA

Quando o muro é empurrado contra o solo, a resultante e a força do muro passam para o **outro lado** das normais; a força passiva é a **menor** entre as cunhas de tentativa:

$$K_p = \frac{\cos^2(\varphi' + \theta)}{\cos^2\theta\cos(\delta' - \theta)\left[1 - \sqrt{\dfrac{\sin(\varphi' + \delta')\sin(\varphi' + \alpha)}{\cos(\delta' - \theta)\cos(\alpha - \theta)}}\right]^2} \qquad P_p = \tfrac{1}{2}K_p\gamma H^2$$

φ′	δ′ = 0°	δ′ = 5°	δ′ = 10°	δ′ = 15°	δ′ = 20°
15°	1.698	1.901	2.131	2.403	2.735
20°	2.040	2.313	2.635	3.029	3.525
25°	2.464	2.833	3.285	3.855	4.597
30°	3.000	3.505	4.143	4.977	6.105
35°	3.690	4.391	5.309	6.555	8.324
40°	4.599	5.593	6.946	8.872	11.771



O atrito solo-muro **aumenta rapidamente o empuxo passivo** (φ′ = 30°: K_p passa de 3.00 a 6.11 para δ′ = 0 → 20°).

Para δ′ grande, a cunha plana fornece uma resistência passiva **maior do que a real** (contra a segurança): módulo da espiral logarítmica.

Enunciado

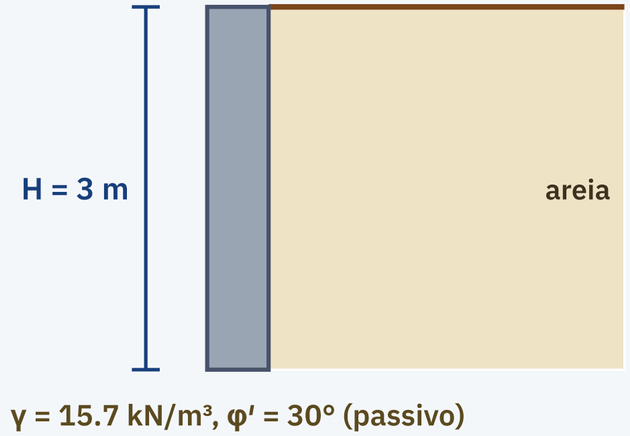
EXEMPLO

PEDE-SE

Para cada δ′: **K_p**, **P_p** e suas componentes; para δ′ = 15°, comparação com soluções de superfície curva (302–326 kN/m).

Dados

Muro	$H = 3$ **m, vertical; reaterro horizontal**
Solo	**areia seca:** $\gamma = 15.7\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ$
Atrito solo-muro	$\delta' = 0^\circ,\ 10^\circ,\ 15^\circ,\ 20^\circ$

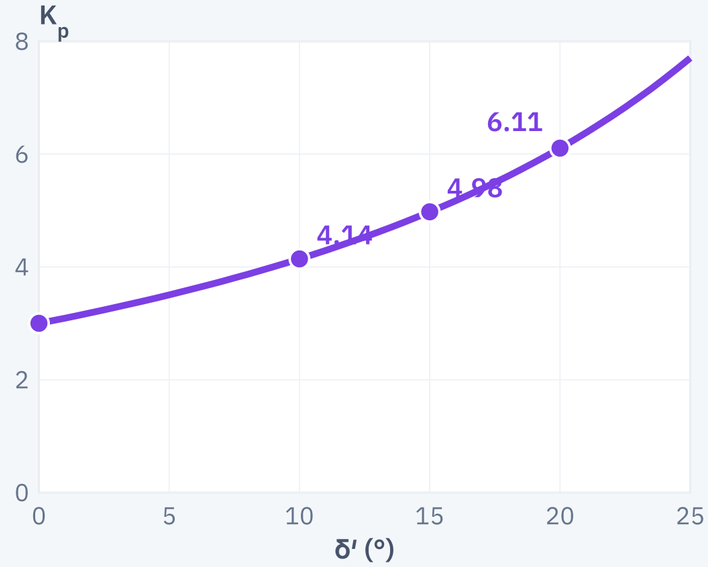


Solução

SOLUÇÃO

1 Fórmula de K_p, $P_p = \frac{1}{2}K_p\gamma H^2 = \frac{1}{2}K_p(15.7)(9) = 70.65\ K_p$

δ′	K_p	P_p (kN/m)	P_h	P_v	β (cunha crítica)
0°	3.000	212.0	212.0	0.0	30.0°
10°	4.143	292.7	288.3	50.8	23.4°
15°	4.977	351.6	339.6	91.0	20.7°
20°	6.105	431.3	405.3	147.5	18.1°



De δ′ = 0 a 20°, P_p passa de 212.0 a 431.3 kN/m: sobe a **2.0 vezes**. Para δ′ = 15°, Coulomb fornece 351.6 kN/m; as soluções com superfície curva ficam na faixa de 302–326 kN/m, ou seja, a cunha plana superestima o empuxo passivo em cerca de **8%** (contra a segurança).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Extensão da solução de Coulomb no módulo

TEORIA

A **sobrecarga q** (vertical, por unidade de área da superfície inclinada) é somada ao peso de cada cunha de tentativa na mesma proporção do solo; a cunha crítica e K_a não se alteram. A tensão equivalente por unidade de profundidade vertical:

$$q_e = q\,\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} \qquad P_a = \tfrac{1}{2}K_a\gamma H^2 + K_a q_e H$$

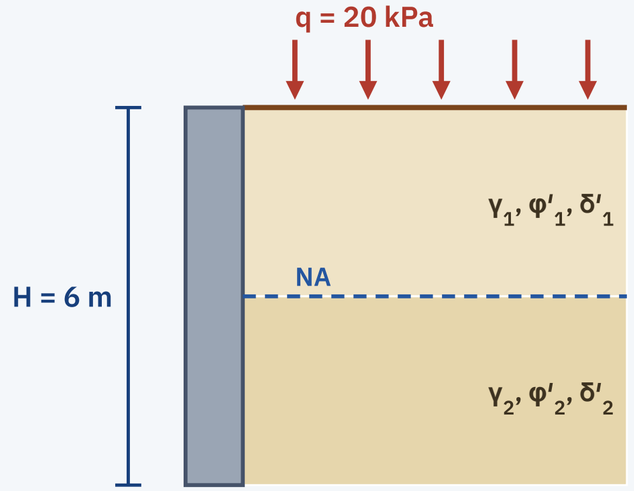
A primeira parcela fica a H/3 acima da base; a segunda, a H/2. **Em reaterro estratificado** (limites horizontais, espessuras medidas na vertical a partir do topo A da face do muro), cada camada adota o seu próprio coeficiente K_i, com os seus próprios γ, φ′ e δ′:

$$\sigma'_v = q_e + \sum \gamma_i h_i \qquad \sigma' = K_i\,\sigma'_v\cos\theta$$

σ′ atua por unidade de comprimento da face do muro, inclinada em relação à normal pelo ângulo δ′ da camada; no limite em que K muda, a pressão sofre um salto.

Abaixo do **lençol freático** (horizontal, z_w), $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$; $u = \gamma_w(z - z_w)$ é adicionada **perpendicularmente** ao muro. As forças são decompostas em componentes normal (N) e paralela (T) à face e somadas: $P = \sqrt{(N^2 + T^2)}$, $\beta = \tan^{-1}(T/N)$.

ATERRO ESTRATIFICADO E ÁGUA



Enunciado

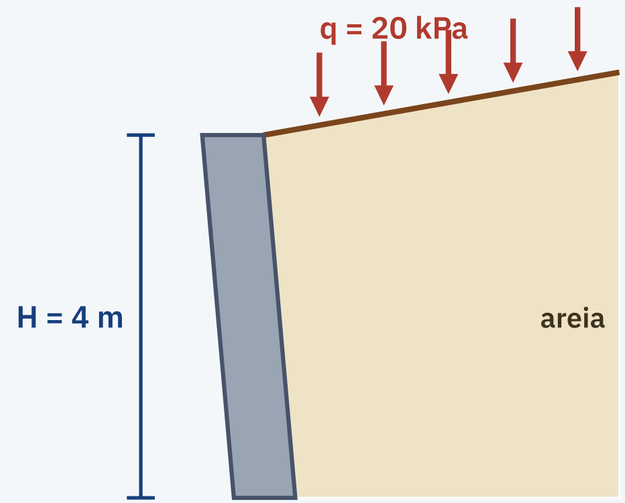
EXEMPLO

Dados

Muro e solo	**O muro do Exemplo 3:** $H = 4$ **m,** $\theta = 5^\circ,\ \alpha = 10^\circ$**;** $\gamma = 15\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ,\ \delta' = 15^\circ$
Sobrecarga	$q = 20$ **kPa uniformemente distribuídos sobre a superfície inclinada (perpendiculares à superfície)**

PEDE-SE

q_e, P_a total e altura de aplicação; parcela da sobrecarga.



Solução

SOLUÇÃO

1 Tensão vertical equivalente

$$q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} = 20\frac{\cos 5^\circ}{\cos(-5^\circ)} = \mathbf{20.00}\ \text{kPa}$$

2 Forças do solo e da sobrecarga (K_a = 0.3872)

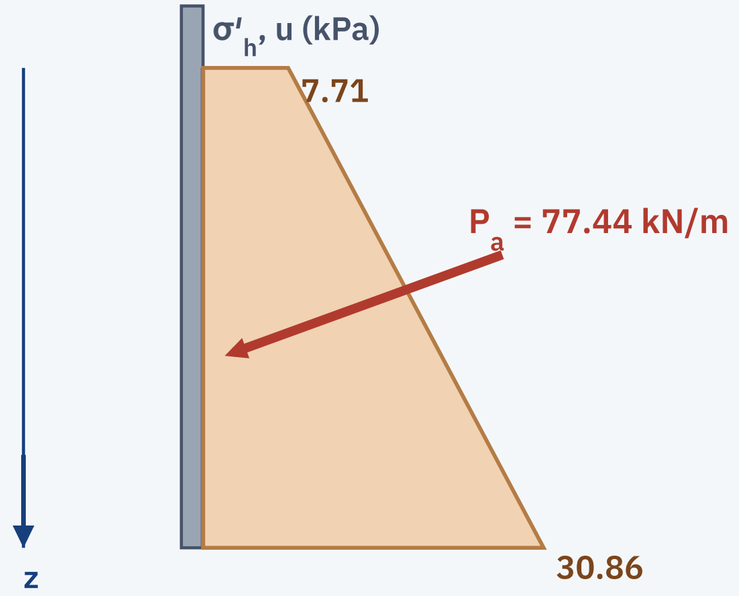
$$P_\gamma = \tfrac{1}{2}K_a\gamma H^2 = 46.46\ \text{kN/m}\ \ (H/3 = 1.33\ \text{m})$$

$$P_q = K_a q_e H = 0.3872(20)(4) = 30.97\ \text{kN/m}\ \ (H/2 = 2.00\ \text{m})$$

3 Total e posição

$$P_a = 46.46 + 30.97 = \mathbf{77.44}\ \text{kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{46.46(1.33) + 30.97(2.00)}{77.44} = \mathbf{1.60}\ \text{m}$$



A sobrecarga aumentou a força em 67% (P_a = 77.44 kN/m); o ponto de aplicação subiu de 1.33 m para **1.60 m**.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

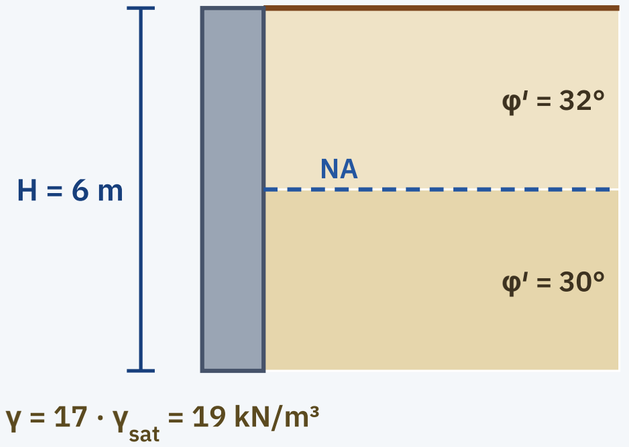
EXEMPLO

PEDE-SE

Pressões em cada camada; forças do solo e da água; **P**, β e altura de aplicação.

Dados

Muro	$H = 6$ **m, vertical; reaterro horizontal; sem sobrecarga**
Camada 1 (0–3 m)	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 32°,\ \delta' = 16°$
Camada 2 (3–6 m)	$\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°,\ \delta' = 15°$
Nível do lençol freático	**A 3 m de profundidade**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Coeficientes

$$K_1(32^\circ, 16^\circ) = \mathbf{0.2782} \qquad K_2(30^\circ, 15^\circ) = \mathbf{0.3014}$$

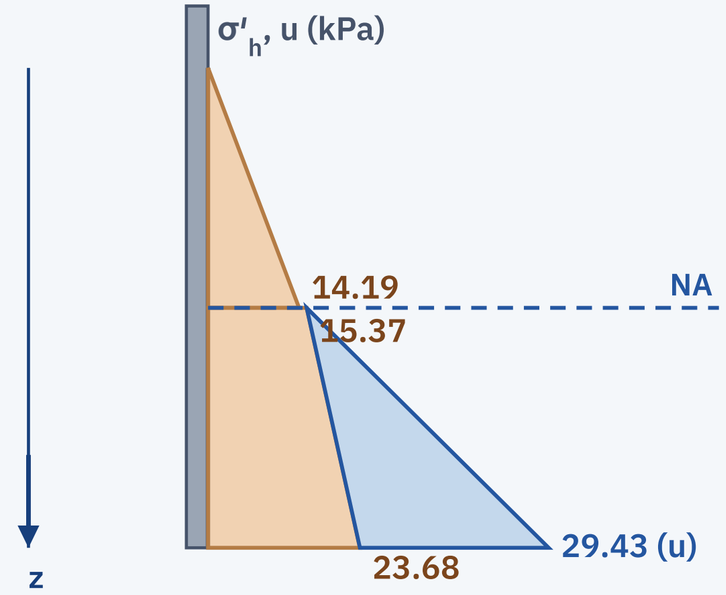
2 Tensões: $\sigma'_v(3) = 17(3) = 51$; $\sigma'_v(6) = 51 + 3(19 - 9.81) = 78.57$ kPa

$$p_1 = 0.2782(51) = \mathbf{14.19}\ \text{kPa (topo)}$$

$$p_2 = 0.3014(51) = \mathbf{15.37}\ \text{kPa (base)}$$

$$p(6) = 0.3014(78.57) = \mathbf{23.68}\ \text{kPa}$$

$$u(6) = 9.81(3) = \mathbf{29.43}\ \text{kPa}$$



Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Forças do solo (atuando na face, cada camada com seu próprio ângulo δ′): triângulo · retângulo · triângulo

$$P_s = \tfrac{1}{2}(3)(14.19) + 3(15.37) + \tfrac{1}{2}(3)(8.31) = 21.28 + 46.12 + 12.47 = 79.86\ \text{kN/m}$$

$$P_w = \tfrac{1}{2}(29.43)(3) = 44.14\ \text{kN/m}\ \text{(perpendicular ao muro)}$$

4 Componentes, resultante e posição

$$N = N_s + N_w = 77.04 + 44.14 = 121.18 \qquad T = 21.03\ \text{kN/m}$$

$$P = \sqrt{N^2 + T^2} = \mathbf{123.00}\ \text{kN/m} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{T}{N} = 9.84^\circ \qquad \bar{z} = \mathbf{1.69}\ \text{m}$$

A resultante é de **123.00 kN/m** (solo 79.86 + água 44.14), 1.69 m acima da base. A força da água corresponde a 55% da do solo; no limite, p salta de 14.19 para 15.37 kPa (K muda).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

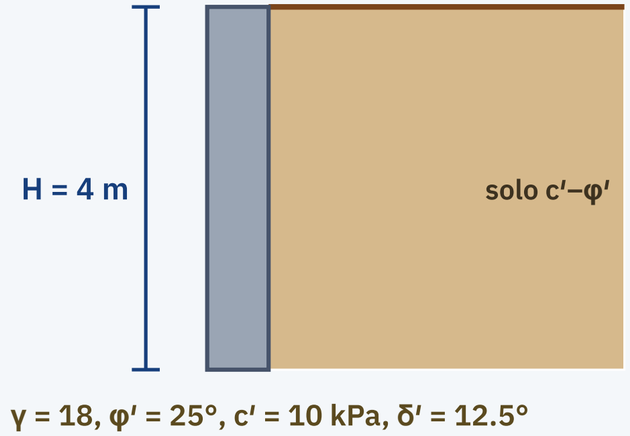
EXEMPLO

PEDE-SE

K_a, profundidade da zona de tração z_0, **P_a** com e sem trinca; comparação com Rankine.

Dados

Muro	$H = 4$ **m, vertical; reaterro horizontal**
Solo	**c′–φ′:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 25^\circ,\ c' = 10$ **kPa;** $\delta' = 12.5^\circ = \varphi'/2$



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Coeficiente de Coulomb e termo de coesão (a adesão é desconsiderada)

$$K_a(25^\circ, 12.5^\circ) = \mathbf{0.3674} \qquad \sigma' = K_a \sigma'_v - 2c'\sqrt{K_a}$$

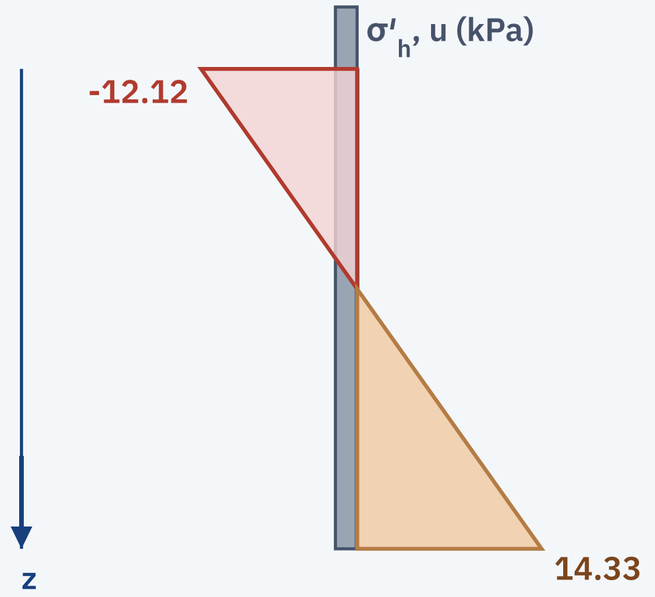
$$2c'\sqrt{K_a} = 2(10)(0.6061) = 12.12 \text{ kPa}$$

2 No topo, na base e na profundidade de tração

$$\sigma'(0) = -\mathbf{12.12} \text{ kPa (tração)}$$

$$\sigma'(4) = 0.3674(18)(4) - 12.12 = \mathbf{14.33} \text{ kPa}$$

$$z_0 = \frac{2c'}{\gamma\sqrt{K_a}} = \frac{20}{18(0.6061)} = \mathbf{1.83} \text{ m}$$



Solução (2/2)

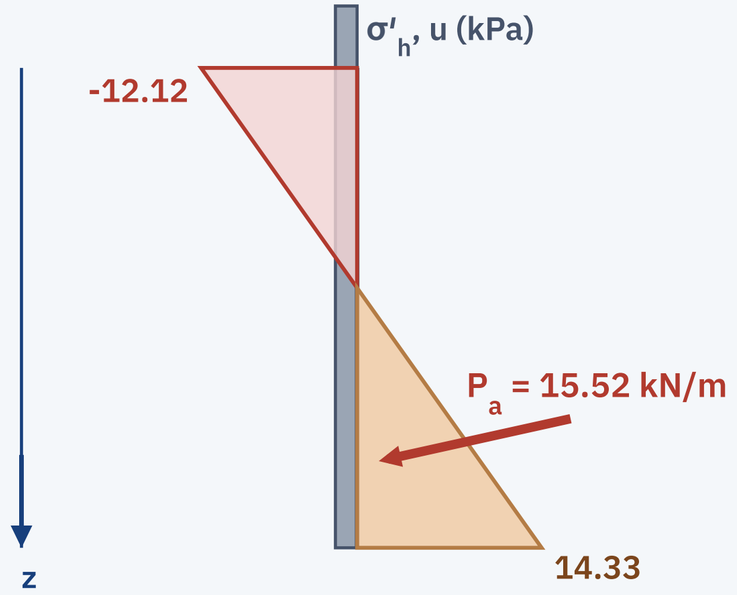
SOLUÇÃO

3 Força com trinca (apenas o triângulo positivo)

$$P_a = \tfrac{1}{2}(14.33)(4 - 1.83) = \mathbf{15.52}\ \mathrm{kN/m} \qquad \bar{z} = 0.72\ \mathrm{m}$$

$$\text{sem trinca: } P_a = 4.41\ \mathrm{kN/m}$$

P_a com trinca = **15.52 kN/m**; sem trinca (incluindo a zona negativa), 4.41 kN/m: se a zona de tração for contabilizada, a força resulta muito menor que o valor real. Rankine (δ′ = 0) forneceria 18.59 kN/m.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Abrangência da solução de Coulomb

TEORIA

A superfície de ruptura é plana. No caso ativo, essa é uma boa aproximação da superfície real; no passivo, para δ′ grande ela se afasta da superfície curva e a resistência resulta **maior do que a real** (atenção para δ′ > φ′/3; módulo de espiral logarítmica).

O **atrito solo-muro** δ′ é um dado de entrada: depende do material do muro e do movimento do solo em relação ao muro; estimativas grosseiras são δ′ = (1/2 – 2/3)φ′ (concreto–areia).

Camada coesiva: o termo de coesão é tomado na forma de Rankine, com o valor de K de Coulomb da camada; a adesão muro–solo é desprezada; a zona de tração é excluída por meio de uma trinca.

A **solução em camadas** é a extensão de engenharia do módulo (não existe na literatura uma solução fechada de Coulomb para camadas); para uma única camada reduz-se à solução fechada e, com δ′ = 0 e reaterro horizontal, à de Rankine.

O **sismo** é tratado no módulo de Mononobe–Okabe; Coulomb é a solução estática.

Resumo

Pontos-chave

Cunha: W, F (inclinada de φ' em relação à normal), P (inclinada de δ' em relação à normal); $P_a(\beta)$ pela lei dos senos; **ativo = maior** cunha, **passivo = menor** cunha

$\mathbf{K_a} = \cos^2(\varphi' - \theta) / \{\cos^2\theta \cos(\delta' + \theta)[1 + \sqrt{(\ldots)}]^2\}$; a força atua a H/3 da base, formando o ângulo $\theta + \delta'$ com a horizontal; para $\delta' = 0$ e geometria plana, Rankine

O atrito solo-muro reduz o empuxo ativo (até $\delta' \approx 2\varphi'/3$) e aumenta rapidamente o empuxo passivo; no caso passivo, para δ' grande, a cunha plana é insegura

Sobrecarga $q_e = q \cos\theta / \cos(\theta - \alpha)$: $P = \frac{1}{2}K\gamma H^2 (H/3) + K\, q_e\, H\, (H/2)$

Estratificado + água: $\sigma' = K_i \sigma'_v \cos\theta$, com salto no limite entre camadas; u é normal ao muro; $P = \sqrt{(N^2 + T^2)}$, $\beta = \tan^{-1}(T/N)$

Camada coesiva: $\sigma' = K\sigma'_v - 2c'\sqrt{K}$; despreza-se a zona negativa na trinca de tração

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Coulomb, C.A. (1776). Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques problemas de statique relatifs à l'architecture. Mémoires de Mathématique et de Physique, Académie Royale des Sciences, Paris, 7, 343–382.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning — a surcharge on a sloping backfill.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o próprio motor de cálculo do módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O módulo abre com o muro do Exemplo 3 (θ = 5°, α = 10°, δ′ = 15°).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva a inclinação do próprio muro, a inclinação do reaterro, o atrito, as camadas, a sobrecarga e a água subterrânea; o módulo fornece em conjunto a força, a sua direção e a altura de aplicação.

Abrir o módulo → **Página de teoria →**

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.