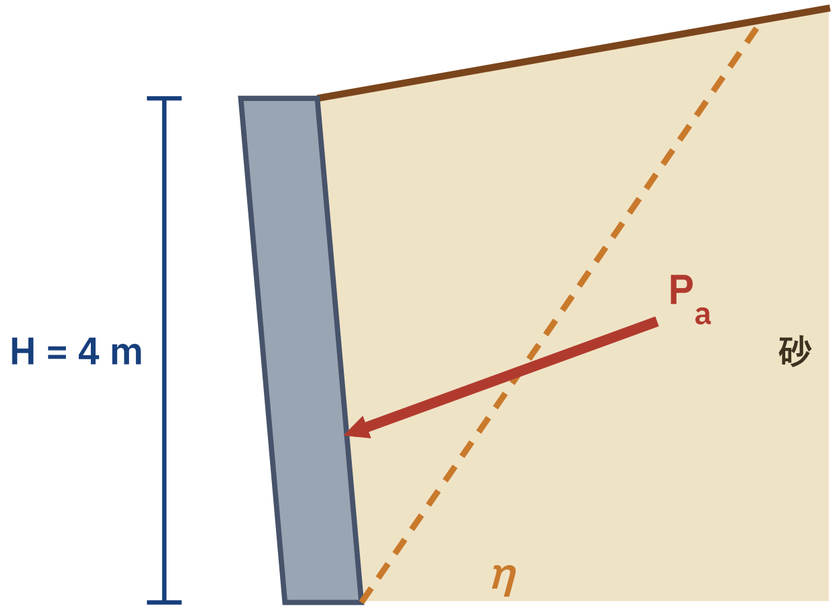
地盤工学講義スライド・土圧

Coulomb土圧

講義：壁面背後の平面的なすべりくさび、壁面摩擦、傾斜した壁面および傾斜した背面土に対するCoulombの主働・受働土圧；上載荷重、地下水および成層した背面土；各項目に計算例。

試行くさび
壁面摩擦角 δ′
主働と受働
上載荷重・水・層
粘性土層



この講義で学ぶこと

- Coulombの**試行くさび**の考え方：3つの力（W, F, P_a）のつり合いと最も危険なくさび
- 壁面摩擦（δ'）、壁面の傾き（θ）、背面土の勾配（α）が**K_aおよびK_p**係数をどのように変化させるか
- **主働**力はくさびのうち**最大**のもの、**受働**力はくさびのうち**最小**のものであること
- 力の位置（H/3）、方向（壁面法線からδ'）、および水平・鉛直成分を求めること
- **上載荷重**（$q_e = q \cos\theta / \cos(\theta - \alpha)$）、**地下水**、および成層した背面土
- 受働時にCoulombの解が**安全側でない**のはどのような場合か

講義の流れ

各項目は**3つの手順**で扱う：

1. **理論**：規則は何か、なぜそうなるのか
2. **問題**：与条件と求めるもの
3. **解答**：数値を用いて手順ごとに

力は壁の単位長さ当たりである（kN/m）。角度は度。θ は壁面が鉛直となす角度、α は背面土が水平となす角度である。

Coulombの平面くさび

理論

Coulomb (1776)は壁背後の地盤を、かかとを通る平面上を滑る**剛体くさび**とみなし、Rankineと異なり壁と地盤の間の**摩擦**を考慮する。粘着力のない背面土では、試行くさびに3つの力が作用する：

W：くさびの重量

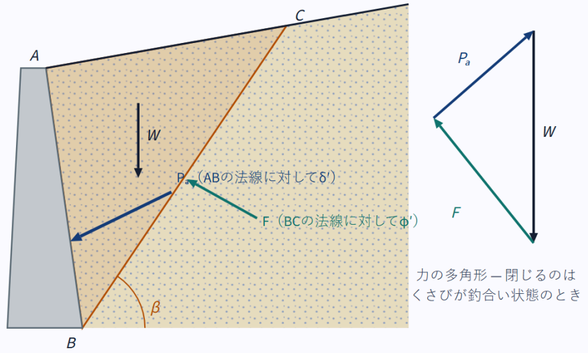
F：すべり面BC上の合力で、面の法線からϕ'傾斜する

P_a：壁に作用する力、壁面の法線からδ'傾斜

平面が水平と角度βをなす場合、力の多角形における正弦定理：

$$\frac{W}{\sin(90^\circ+\theta+\delta'-\beta+\varphi')}=\frac{P_a}{\sin(\beta-\varphi')}$$

$$P_a=\tfrac{1}{2}\gamma H^2\,\frac{\cos(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)\sin(\beta-\varphi')}{\cos^2\theta\,\sin(\beta-\alpha)\,\sin(90^\circ+\theta+\delta'-\beta+\varphi')}$$



問題

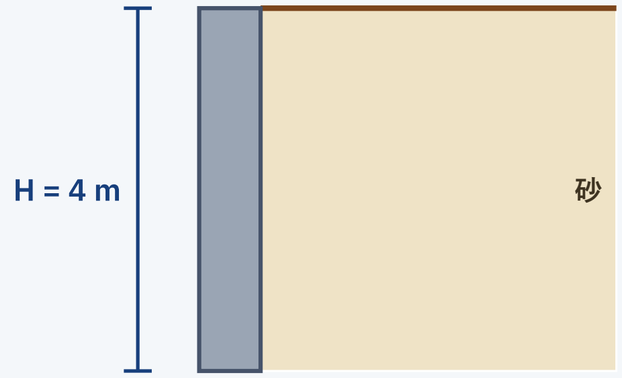
例題

与条件

壁	$H = 4$ m、鉛直（$\theta = 0$）。盛土表面は水平（$\alpha = 0$）
地盤	乾燥砂：$\gamma = 17$ kN/m^3, $\varphi' = 32°$；壁面摩擦$\delta' = 16° = \varphi'/2$

求めるもの

試行すべり面β = 45°、60°、75°に対する$P_a(\beta)$；**最大**の力とそのβ角。



解答

解答

1 鉛直壁、水平背面土：$\theta = \alpha = 0 \Rightarrow P_a(\beta) = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 \cdot \cos\beta \sin(\beta - \phi') / [\sin\beta \cos(\beta - \phi' - \delta')]$

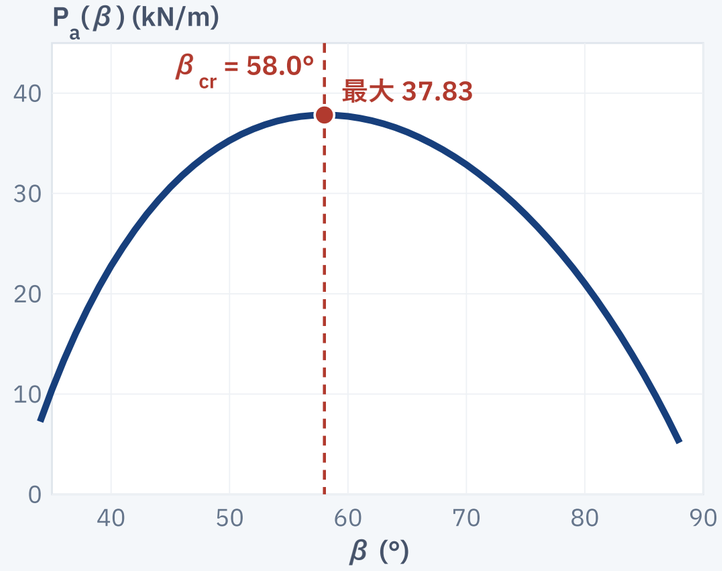
$\beta = 45^\circ$: $P_a = \mathbf{30.64}$ kN/m　　$\beta = 60^\circ$: $P_a = \mathbf{37.69}$ kN/m

$\beta = 75^\circ$: $P_a = \mathbf{27.89}$ kN/m

2 最大の試行くさび（$dP_a/d\beta = 0$）

$\beta_{cr} = \mathbf{58.0}^\circ$　　$P_{a,max} = \mathbf{37.83}$ kN/m

試行くさびのうち**最大の37.83 kN/m**（β = 58.0°）がCoulombの主働土圧である。より急な、あるいはより緩いくさびはより小さい力を要する。擁壁は最も危険なくさびのみを支えられればよい。



GeoTervaで解答を確認する ↗

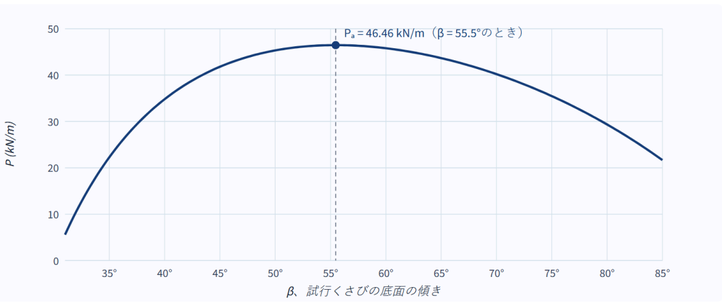
Coulombの主働係数K_a

理論

未知数はβのみであった。壁が保持すべき最も危険なくさびは$P_a(\beta)$の最大値である（$dP_a/d\beta = 0$）。その解：

$$K_a = \frac{\cos^2(\varphi' - \theta)}{\cos^2\theta\cos(\delta' + \theta)\left[1 + \sqrt{\dfrac{\sin(\delta' + \varphi')\sin(\varphi' - \alpha)}{\cos(\delta' + \theta)\cos(\theta - \alpha)}}\right]^2} \qquad P_a = \tfrac{1}{2}K_a\gamma H^2$$

ϕ'	$\delta' = 0°$	$\delta' = 5°$	$\delta' = 10°$	$\delta' = 15°$	$\delta' = 20°$	$\delta' = 25°$
28°	0.3610	0.3448	0.3330	0.3251	0.3203	0.3186
32°	0.3073	0.2945	0.2852	0.2791	0.2755	0.2745
36°	0.2596	0.2497	0.2426	0.2379	0.2354	0.2350
40°	0.2174	0.2098	0.2045	0.2011	0.1994	0.1995



力は底面から**H/3**上方で、壁面の法線から**δ'**傾いて作用する；水平とのなす角は$\theta + \delta'$である。

$\alpha = \theta = \delta' = 0$のときRankineである。壁面摩擦は主働土圧を**減少**させる。

問題

例題

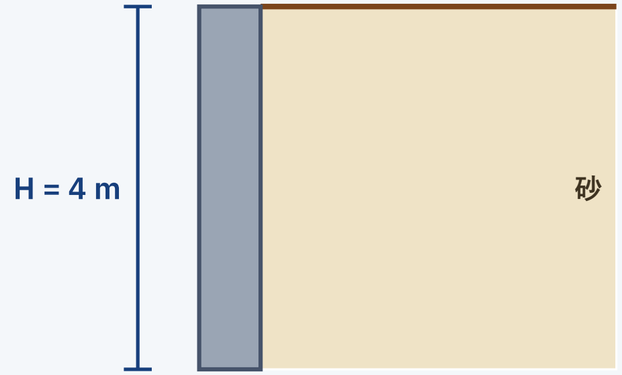
与条件

壁体と地盤

例題1の壁：$H = 4$ m、$\theta = \alpha = 0$；$\gamma = 17$ kN/m^3, $\varphi' = 32°$, $\delta' = 16°$

求めるもの

K_a、P_a、作用高さ、水平および鉛直成分；Rankineとの比較。



解答

解答

1 係数 ($\theta = \alpha = 0$)

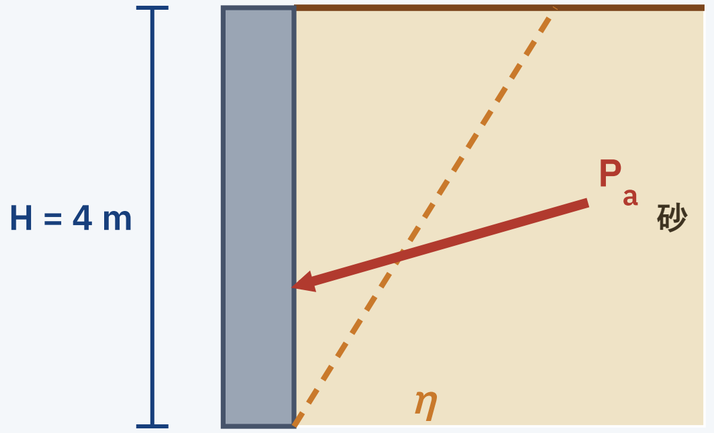
$$\sqrt{\frac{\sin 48^\circ \sin 32^\circ}{\cos 16^\circ}} = 0.6401$$

$$K_a = \frac{\cos^2 32^\circ}{\cos 16^\circ \,(1+0.6401)^2} = \frac{0.7192}{2.5856} = \mathbf{0.2782}$$

2 力、作用位置および成分（水平からの $\delta' = 16°$）

$$P_a = \tfrac{1}{2}(0.2782)(17)(4)^2 = \mathbf{37.83}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \tfrac{4}{3} = 1.33\ \text{m}$$

$$P_h = P_a \cos 16^\circ = 36.36 \qquad P_v = P_a \sin 16^\circ = 10.43\ \text{kN/m}$$



P_a = **37.83 kN/m**；試行くさびの最大のもの（例題1）と同一である。Rankine（$\delta' = 0$、$K_a = 0.3073$）では41.79 kN/mとなる：壁面摩擦により力は9%減少した。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

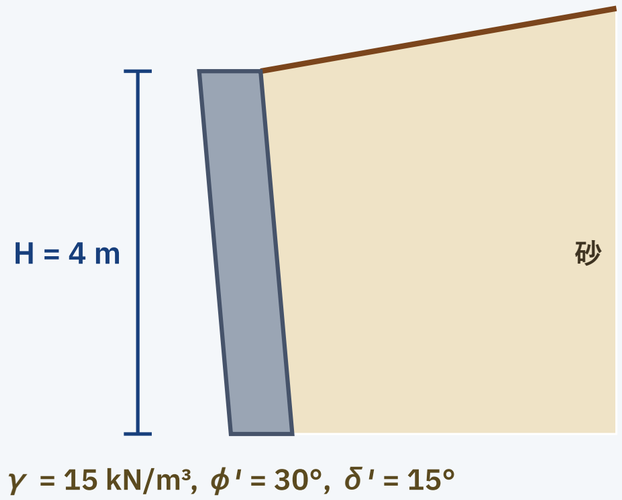
例題

与条件

壁	$H = 4$ m；表面は鉛直から$\theta = 5°$傾斜
盛土	地表面勾配$\alpha = 10°$；$\gamma = 15$ kN/m^3, $\varphi' = 30°$
壁面摩擦	$\delta' = 15°$ $(\delta'/\varphi' = \frac{1}{2})$

求めるもの

K_a、P_a、その作用方向と位置、臨界くさびβ。モジュールはこの壁で開く。



解答 (1/2)

解答

1 分子と根号の項

$$\cos^2(30^\circ - 5^\circ) = 0.8214 \qquad \cos^2 5^\circ \cos(15^\circ + 5^\circ) = 0.9326$$

$$\sqrt{\frac{\sin 45^\circ \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ \cos(-5^\circ)}} = \sqrt{0.2583} = 0.5083$$

2 係数

$$K_a = \frac{0.8214}{0.9326\,(1 + 0.5083)^2} = \mathbf{0.3872}$$

解答 (2/2)

解答

3 力と作用位置

$$P_a = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_a = \tfrac{1}{2}(15)(4)^2(0.3872) = \mathbf{46.46}\ \text{kN/m}$$

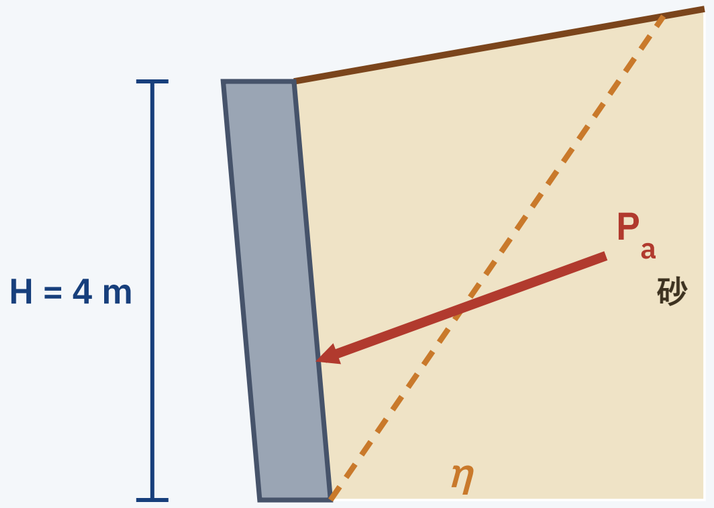
$$\bar{z} = \frac{H}{3} = \mathbf{1.33}\ \text{m}$$

4 方向：法線から $\delta' = 15°$、水平から $\theta + \delta' = 20°$

$$P_h = P_a \cos 20^\circ = 43.66\ \text{kN/m}$$

$$P_v = P_a \sin 20^\circ = 15.89\ \text{kN/m}$$

P_a = **46.46 kN/m**、底面から1.33 m上方。臨界くさびは水平と $\boldsymbol{\beta} \approx$ **55.5°**をなす（試行くさびの頂点）。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

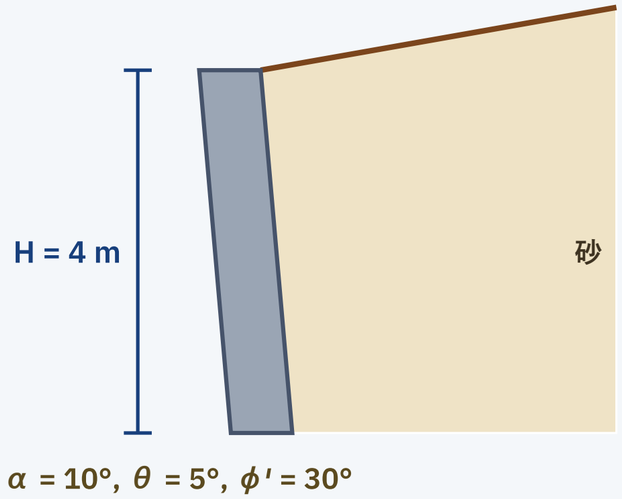
例題

与条件

壁体と背面土	**例題3の壁：$\theta = 5^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $\varphi' = 30^\circ$。比較のため鉛直壁、水平背面土（$\theta = \alpha = 0$）**
変数	$\delta' = 0^\circ,\ 5^\circ,\ 10^\circ,\ 15^\circ,\ 20^\circ,\ 25^\circ,\ 30^\circ$

求めるもの

各 δ' に対する**K_a**；K_aが**最小**となる δ' はどれか。推奨される δ'/ϕ' の範囲。

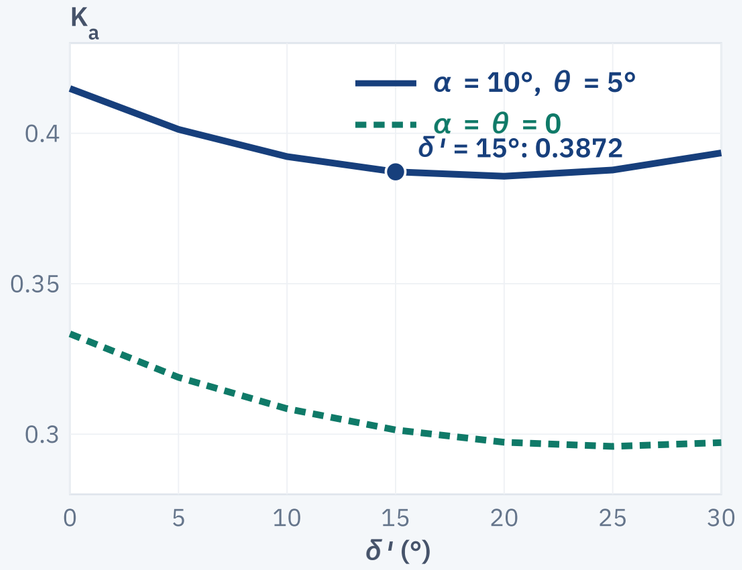


解答

解答

1 同一式による7つの δ' 値

δ'	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°
K_a（θ = 5°, α = 10°）	0.4149	0.4013	0.3923	0.3872	0.3857	0.3878	0.3935
K_a（$\theta = \alpha = 0$）	0.3333	0.3189	0.3085	0.3014	0.2973	0.2959	0.2972



δ' が増加すると K_a はまず**減少**し（$\delta' = 0$ で0.415、15°で0.387）、$\delta' \approx 20$–25°で最小値に達した後、再び**増加**する。実務では $\delta' = (1/2 – 2/3)\,\phi'$ を採用する。$\delta' = \phi'$ とすることは、壁が地盤に対して下方へ滑動することを前提とするため、安全側ではない。

GeoTervaで解答を確認する ↗

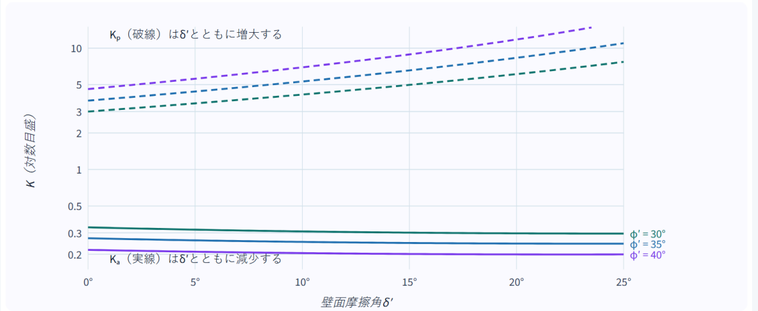
Coulombの受働係数K_p

理論

壁が地盤に押し込まれると、合力と壁面に作用する力の法線は**反対側**に回転する。受働土圧は試行くさびのうち**最小**である：

$$K_p = \frac{\cos^2(\varphi' + \theta)}{\cos^2\theta\cos(\delta' - \theta)\left[1 - \sqrt{\dfrac{\sin(\varphi' + \delta')\sin(\varphi' + \alpha)}{\cos(\delta' - \theta)\cos(\alpha - \theta)}}\right]^2} \qquad P_p = \tfrac{1}{2}K_p\gamma H^2$$

ϕ'	$\delta' = 0°$	$\delta' = 5°$	$\delta' = 10°$	$\delta' = 15°$	$\delta' = 20°$
15°	1.698	1.901	2.131	2.403	2.735
20°	2.040	2.313	2.635	3.029	3.525
25°	2.464	2.833	3.285	3.855	4.597
30°	3.000	3.505	4.143	4.977	6.105
35°	3.690	4.391	5.309	6.555	8.324
40°	4.599	5.593	6.946	8.872	11.771



壁面摩擦は受働力を**急激に増大させる**（$\phi' = 30°$：$\delta' = 0 \to 20°$でK_pは3.00 → 6.11）。

大きなδ'では平面くさびは受働抵抗を**過大に**与える（安全側でない）：対数らせんモジュール。

問題

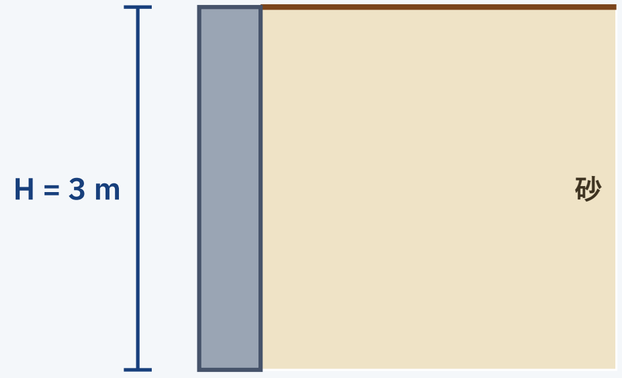
例題

与条件

壁	$H = 3$ m、鉛直方向；水平な背面土
地盤	乾燥砂：$\gamma = 15.7$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$
壁面摩擦	$\delta' = 0^\circ,\ 10^\circ,\ 15^\circ,\ 20^\circ$

求めるもの

各 δ' について K_p、P_p およびその成分；$\delta' = 15°$ については曲面すべり解（302–326 kN/m）との比較。



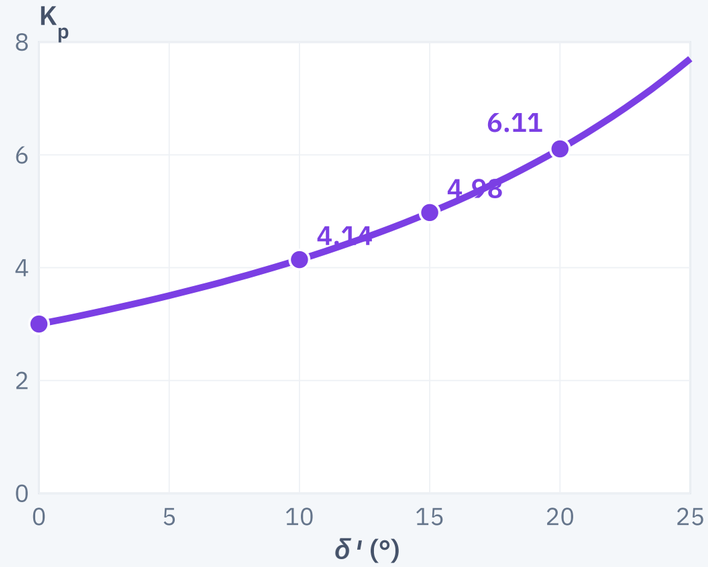
γ = 15.7 kN/m³、ϕ' = 30°（受働）

解答

解答

1 K_pの式、$P_p = \frac{1}{2}K_p \gamma H^2 = \frac{1}{2}K_p(15.7)(9) = 70.65\ K_p$

δ'	K_p	P_p (kN/m)	P_h	P_v	β（臨界くさび）
0°	3.000	212.0	212.0	0.0	30.0°
10°	4.143	292.7	288.3	50.8	23.4°
15°	4.977	351.6	339.6	91.0	20.7°
20°	6.105	431.3	405.3	147.5	18.1°



$\delta' = 0$から20°でP_pは212.0 → 431.3 kN/m：**2.0倍**に増加する。$\delta' = 15°$ではCoulombは351.6 kN/mを与える；曲面すべり面の解は302〜326 kN/mの範囲にあり、つまり平面くさびによる受働土圧は約**8 %過大**である（不安全）。

GeoTervaで解答を確認する ↗

Coulomb解のモジュール拡張

理論

上載荷重q（傾斜表面の単位面積当たり鉛直）は各地盤と同一の割合で各試行くさびの重量に加えられる。臨界くさびおよびK_aは変化しない。鉛直単位深さ当たりの等価応力：

$$q_e = q\,\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} \qquad P_a = \tfrac{1}{2}K_a\gamma H^2 + K_a q_e H$$

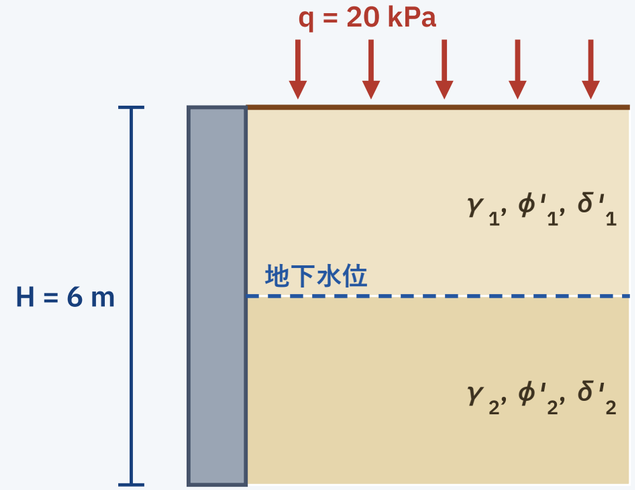
第1の部分は底面からH/3、第2の部分はH/2の高さにある。**成層した背面土**（境界は水平、層厚は壁面の頂部Aから鉛直に測る）では、各層が自身のγ、ϕ'、δ'に対応するK_i係数をとる：

$$\sigma'_v = q_e + \sum \gamma_i h_i \qquad \sigma' = K_i\,\sigma'_v\cos\theta$$

σ'は壁面の単位長さに、層のδ'の角度だけ法線から傾いて作用する；Kが変化する境界では圧力が不連続に変化する。

地下水位（水平、z_w）より下では$\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$；$u = \gamma_w(z - z_w)$を壁面に**直交**する方向に加える。力は壁面に直交する成分（N）と平行な成分（T）に分解して合計する：$P = \sqrt{(N^2 + T^2)}$、$\beta = \tan^{-1}(T/N)$。

成層した盛土と水



問題

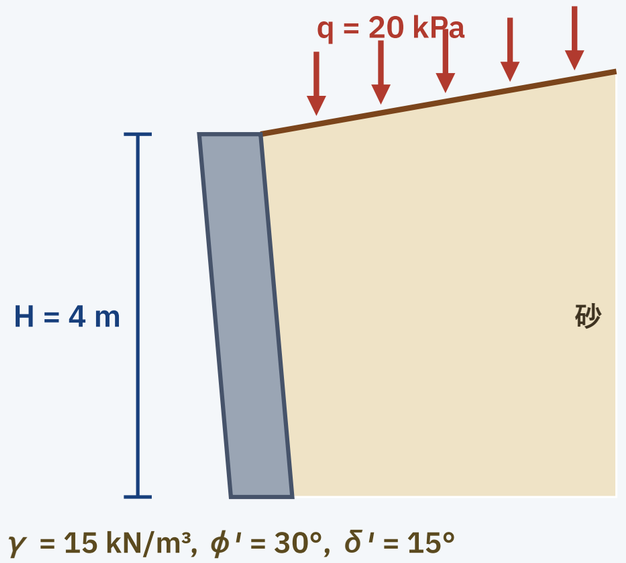
例題

与条件

壁体と地盤	**例題3の壁：** $H = 4$ **m、** $\theta = 5^\circ$, $\alpha = 10^\circ$ **；** $\gamma = 15$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$, $\delta' = 15^\circ$
上載荷重	**傾斜面に等分布** $q = 20$ **kPa（面に鉛直）**

求めるもの

q_e、全P_aおよびその作用高さ。上載荷重の寄与。



解答

解答

1 等価鉛直応力

$$q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)} = 20\frac{\cos 5^\circ}{\cos(-5^\circ)} = \mathbf{20.00}\ \text{kPa}$$

2 土圧と上載荷重による力（$K_a = 0.3872$）

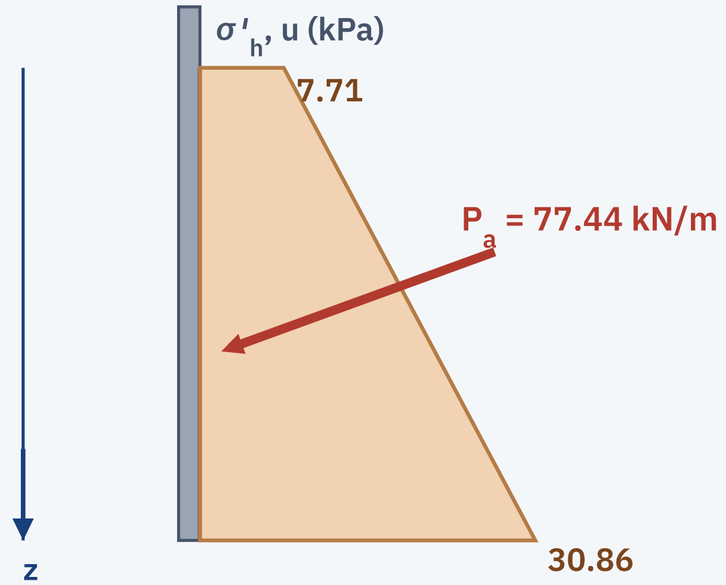
$$P_\gamma = \tfrac{1}{2}K_a\gamma H^2 = 46.46\ \text{kN/m}\quad (H/3 = 1.33\ \text{m})$$

$$P_q = K_a q_e H = 0.3872(20)(4) = 30.97\ \text{kN/m}\quad (H/2 = 2.00\ \text{m})$$

3 合計と位置

$$P_a = 46.46 + 30.97 = \mathbf{77.44}\ \text{kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{46.46(1.33) + 30.97(2.00)}{77.44} = \mathbf{1.60}\ \text{m}$$



上載荷重により力は67%増加した（$P_a = 77.44$ kN/m）；作用点は1.33 mから**1.60 m**へ上昇した。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

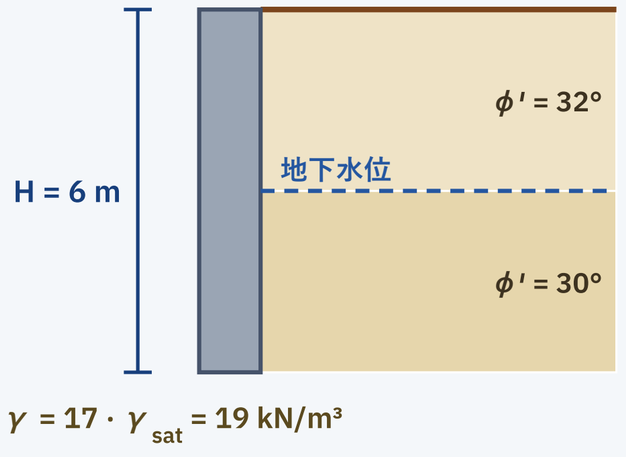
例題

与条件

壁	$H = 6$ m、鉛直、水平背面土、上載荷重なし
第1層（0–3 m）	$\gamma = 17$ kN/m^3, $\varphi' = 32°$, $\delta' = 16°$
第2層（3–6 m）	$\gamma_{sat} = 19$ kN/m^3, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$
地下水位	深さ3 mで

求めるもの

各層における土圧；土および水の力；**P**、β および作用高さ。



解答 (1/2)

解答

1 係数

$$K_1(32^\circ, 16^\circ) = \mathbf{0.2782} \qquad K_2(30^\circ, 15^\circ) = \mathbf{0.3014}$$

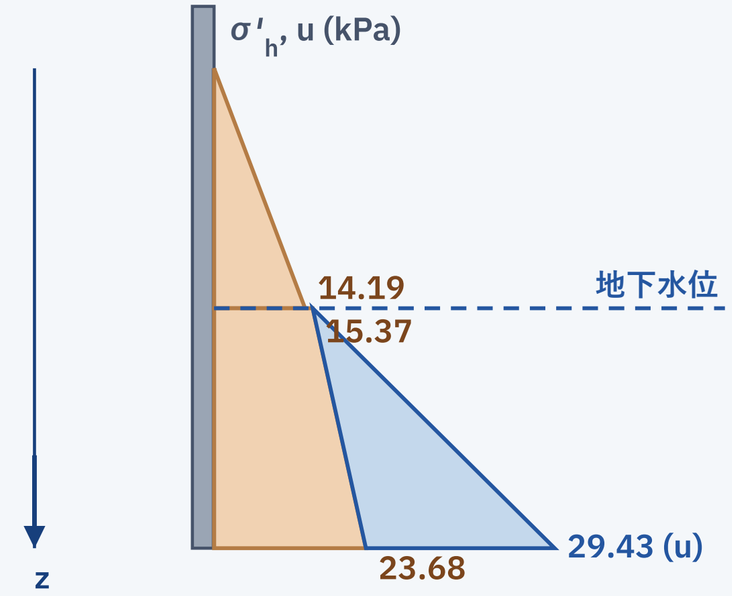
2 応力：$\sigma'_v(3) = 17(3) = 51$；$\sigma'_v(6) = 51 + 3(19 - 9.81) = 78.57$ kPa

$$p_1 = 0.2782(51) = \mathbf{14.19}\ \text{kPa}\ （上部）$$

$$p_2 = 0.3014(51) = \mathbf{15.37}\ \text{kPa}\ （下部）$$

$$p(6) = 0.3014(78.57) = \mathbf{23.68}\ \text{kPa}$$

$$u(6) = 9.81(3) = \mathbf{29.43}\ \text{kPa}$$



解答 (2/2)

解答

3 土圧（壁面に作用し、各層がそれぞれの δ'をもつ）：三角形・長方形・三角形

$$P_s = \tfrac{1}{2}(3)(14.19) + 3(15.37) + \tfrac{1}{2}(3)(8.31) = 21.28 + 46.12 + 12.47 = 79.86 \text{ kN/m}$$

$$P_w = \tfrac{1}{2}(29.43)(3) = 44.14 \text{ kN/m} \quad \text{（壁面に直角）}$$

4 成分、合力およびその位置

$$N = N_s + N_w = 77.04 + 44.14 = 121.18 \qquad T = 21.03 \text{ kN/m}$$

$$P = \sqrt{N^2 + T^2} = \mathbf{123.00} \text{ kN/m} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{T}{N} = 9.84^\circ \qquad \bar{z} = \mathbf{1.69} \text{ m}$$

合力は**123.00 kN/m**（土 79.86 + 水 44.14）で、底面から1.69 m上方に作用する。水の力は土の力の55%である；境界でpは14.19 → 15.37 kPaと跳躍する（Kが変化する）。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

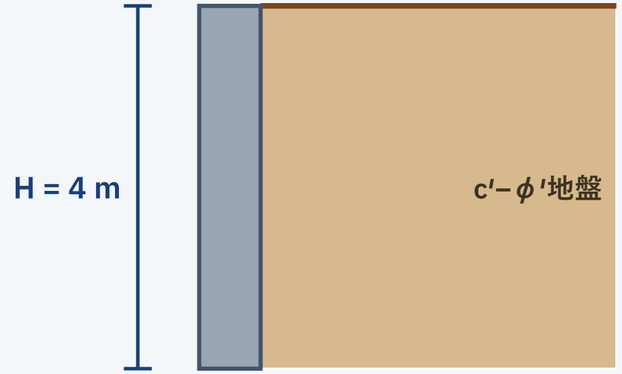
例題

与条件

壁	$H = 4$ m、鉛直方向；水平な背面土
地盤	**c′–ϕ′:** $\gamma = 18$ kN/m^3, $\varphi' = 25°$, $c' = 10$ kPa; $\delta' = 12.5° = \varphi'/2$

求めるもの

K_a、引張深さ z_0、亀裂あり・なしの場合の P_a；Rankineとの比較。



$\gamma = 18$, $\phi' = 25°$, $c' = 10$ kPa, $\delta' = 12.5°$

解答 (1/2)

解答

1 Coulomb係数と粘着力項（付着力は無視する）

$$K_a(25^\circ, 12.5^\circ) = \mathbf{0.3674} \qquad \sigma' = K_a\sigma'_v - 2c'\sqrt{K_a}$$

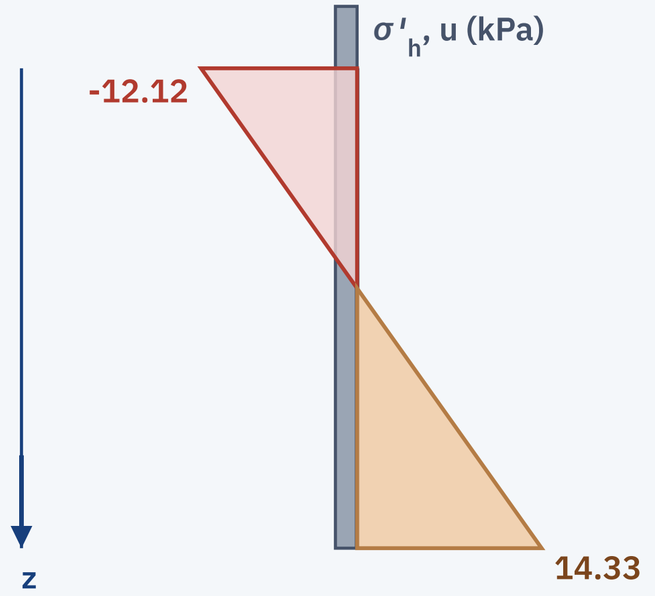
$$2c'\sqrt{K_a} = 2(10)(0.6061) = 12.12 \text{ kPa}$$

2 頂部、底面および引張深さにおいて

$$\sigma'(0) = -\mathbf{12.12} \text{ kPa（引張）}$$

$$\sigma'(4) = 0.3674(18)(4) - 12.12 = \mathbf{14.33} \text{ kPa}$$

$$z_0 = \frac{2c'}{\gamma\sqrt{K_a}} = \frac{20}{18(0.6061)} = \mathbf{1.83} \text{ m}$$



解答 (2/2)

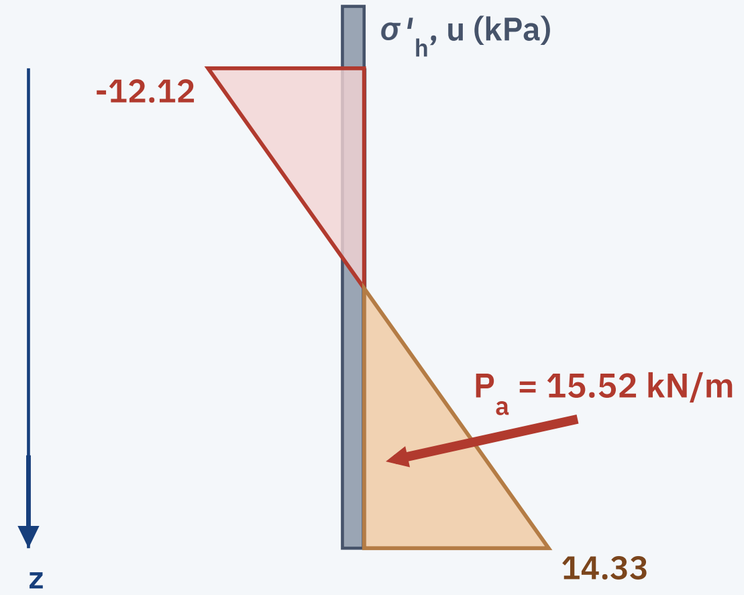
解答

3 ひび割れ部の力（正の三角形のみ）

$$P_a = \tfrac{1}{2}(14.33)(4 - 1.83) = \mathbf{15.52}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = 0.72\ \text{m}$$

亀裂なし： $P_a = 4.41$ kN/m

亀裂を考慮したP_a = **15.52 kN/m**、亀裂なし（負の領域を含む）では4.41 kN/m：引張領域を計上すると、そこでの力は小さいため合力は非常に小さくなる。Rankine（$\delta' = 0$）では18.59 kN/mとなる。



GeoTervaで解答を確認する ↗

Coulomb解の適用範囲

理論

すべり面は平面である。主働ではこれは実際のすべり面のよい近似である。受働では大きな δ' に対して曲面から離れ、抵抗を**実際より大きく**求めることになる（$\delta' > \phi'/3$ では注意；対数らせんモジュール）。

壁面摩擦 δ' は入力値である：壁面材料および地盤が壁面に対して行う移動に依存し、概略値として $\delta' = (1/2 – 2/3)\,\phi'$（コンクリート–砂）をとる。

粘性土層：粘着力の項はRankine形で、その層のCoulombのK値を用いて取る。壁面と地盤の付着は無視する。引張領域は引張亀裂によって除外する。

成層解はモジュールの工学的拡張である（文献には閉形式の成層Coulomb解は存在しない）。単層では閉形式解に、$\delta' = 0$ かつ水平盛土ではRankineに帰着する。

地震はMononobe–Okabeモジュールにある；Coulombは静的解法である。

まとめ

ポイントのまとめ

くさび：W、F（法線からϕ'）、P（法線からδ'）；$P_a(\beta)$は正弦定理による；**主働＝最大**のくさび、**受働＝最小**のくさび

$K_a = \cos^2(\phi' - \theta) / \{\cos^2\theta \cos(\delta' + \theta)[1 + \sqrt{(...)}]^2\}$；力は底面からH/3、水平に対して$\theta + \delta'$の方向に作用する；$\delta' = 0$かつ直線形状ではRankineとなる

壁面摩擦は主働土圧を減少させ（$\delta' \approx 2\phi'/3$まで）、受働土圧を急速に増大させる；受働の場合、大きなδ'に対して平面くさびは安全でない。

上載荷重 $q_e = q \cos\theta / \cos(\theta - \alpha)$：$P = \frac{1}{2} K \gamma H^2 (H/3) + K q_e H (H/2)$

成層＋水：$\sigma' = K_i \sigma'_v \cos\theta$、境界で不連続；u は壁面に直角；$P = \sqrt{(N^2 + T^2)}$、$\beta = \tan^{-1}(T/N)$

粘性土層：$\sigma' = K\sigma'_v - 2c'\sqrt{K}$、引張亀裂では負の領域を無視する

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Coulomb, C.A. (1776). Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. Mémoires de Mathématique et de Physique, Académie Royale des Sciences, Paris, 7, 343–382.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning — 傾斜した背面土上の上載荷重。

注記

数値例はすべてモジュール自身の計算エンジンで生成されている；モジュールは同じ値を与える。モジュールは例題3の擁壁（θ = 5°、α = 10°、δ' = 15°）で開く。

GeoTerva

オンライン地盤工学計算

理論から実務へ

自身の壁の勾配、盛土の勾配、摩擦、層、上載荷重、地下水をGeoTervaに入力する。モジュールは力、その方向、作用高さを同時に与える。

モジュールを開く →

理論ページ →

スマートフォンで開く
お試しモジュールは登録不要です。

講義で使用したい場合：info@geoterva.com