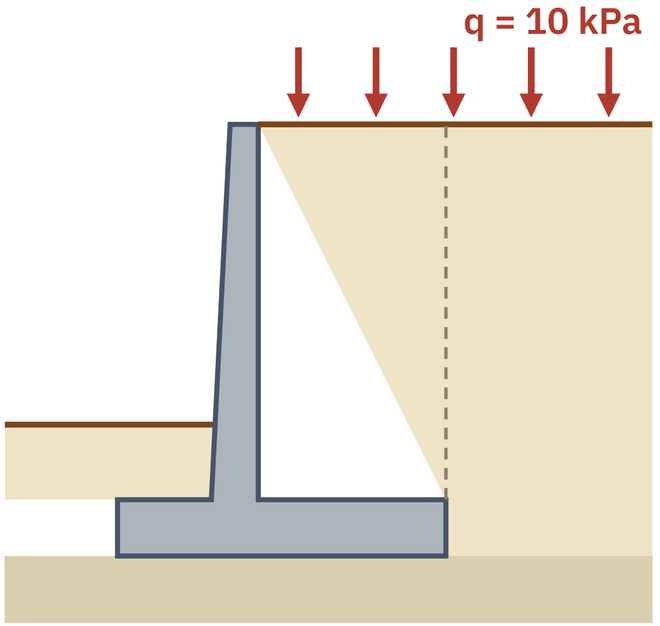
Apresentação de aula de geotecnia · Muros de arrimo

Muro de flexão

Aula: estabilidade externa de um muro de flexão de concreto armado (deslizamento, tombamento, capacidade de carga) e esforços solicitantes no fuste e nas lajes da ponta e do calcanhar; bloco do calcanhar, empuxo de terra, água, sismo, dente de cisalhamento e plataforma de alívio; exemplo resolvido em cada tópico.

- Fuste + laje de base
- Deslizamento · tombamento · capacidade de carga
- Esforços solicitantes no fuste, na ponta e no calcanhar
- Dente de cisalhamento · plataforma de alívio
- Água e sismo



Introdução

O que veremos nesta aula?

Muro de flexão: **fuste + laje de base** (ponta L_t, calcanhar L_h), com determinação do peso e do centro de gravidade a partir das partes componentes

O **bloco de solo** acima do calcanhar e o **plano de pressão vertical** na borda posterior da sapata; empuxo ativo, sobrecarga e resistência passiva frontal

Ler as verificações de **deslizamento, tombamento, excentricidade e capacidade de carga** e a condição de sismo (Mononobe–Okabe + inércia)

Os esforços cortantes e momentos nas lajes da ponta e do calcanhar, a partir da **tensão na base**, e no **fuste**, a partir do empuxo

Como o **dente de cisalhamento** e a **plataforma de alívio** aumentam a segurança; o efeito da água e da subpressão

Ver **como revisar** uma seção reprovada (deslizamento e excentricidade sob sismo)

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: qual é a regra e por que é assim?

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Tudo é referido a 1.00 m de comprimento do muro. Exemplo: H = 4.0 m de fuste, laje de base de 0.60 m, B = 3.5 m, muro de concreto armado (24 kN/m³), q = 10 kPa.

Fuste, laje de base e estrutura da ponta

TEORIA

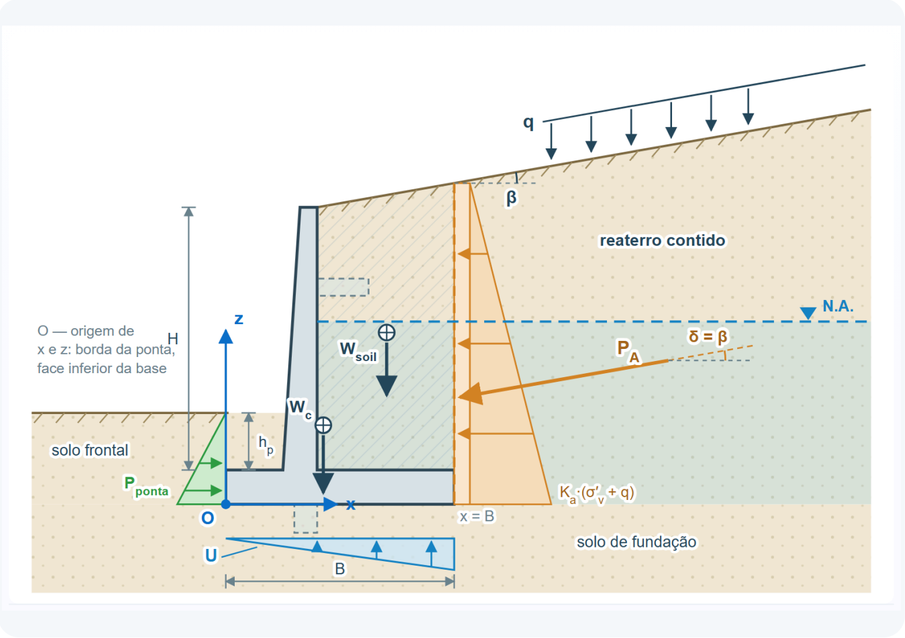
O muro de flexão também resiste ao deslizamento e ao tombamento **pelo peso do solo sobre a laje de base**: não só o peso próprio do muro, mas também o bloco de solo sobre o calcanhar é estabilizante. Módulo:

$$B = L_t + t_b + L_h \qquad z_T = t_f + H$$

Fuste: altura H; espessura t_t no topo, t_b na base (tardoz vertical, face frontal inclinada); **laje de base**: espessura t_f, ponta L_t, calcanhar L_h; concreto 24 kN/m³.

Solo: aterro não coesivo (c′ = 0), superfície plana ou inclinada, sobrecarga q, lençol freático, e aterro de altura h_p sobre a laje de base, na frente.

Opções: dente de cisalhamento, plataforma de alívio; **verificações**: deslizamento, tombamento, excentricidade, capacidade de carga; **esforços solicitantes**: fuste, ponta, calcanhar, plataforma, dente.



Laje de base + retângulo do fuste + triângulo do fuste

TEORIA

O peso do muro é dividido em três figuras simples (área e centro de gravidade conhecidos); seu momento em relação à ponta é resistente:

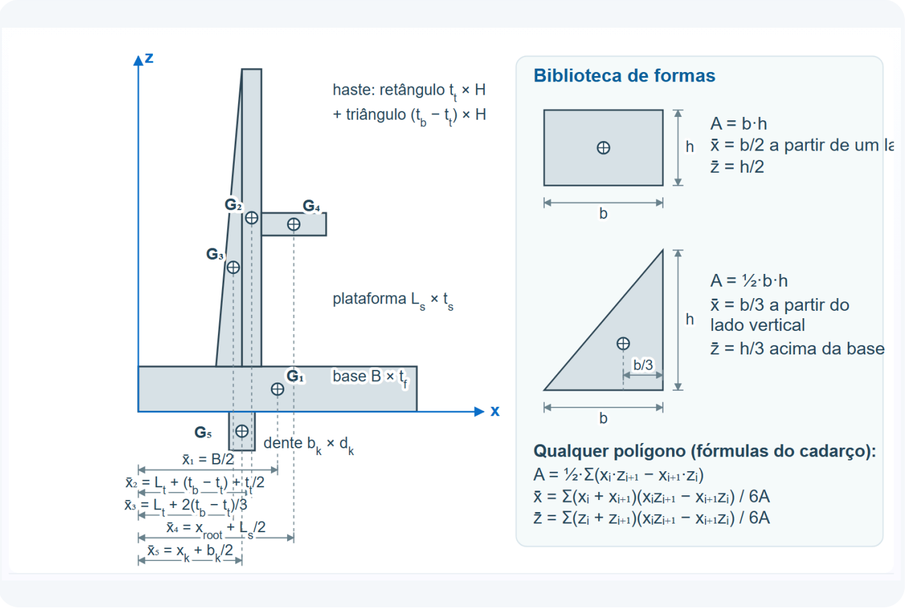
$$W_i = \gamma_c A_i \qquad W_c = \sum W_i \qquad \bar{x}_c = \frac{\sum W_i \bar{x}_i}{W_c} \qquad \bar{z}_c = \frac{\sum W_i \bar{z}_i}{W_c}$$

Placa de base: A = B t_f, $\bar{x}$ = B/2, $\bar{z}$ = t_f/2.

Retângulo do fuste (junto ao tardoz): A = t_tH, $\bar{x}$ = L_t + (t_b − t_t) + t_t/2, $\bar{z}$ = t_f + H/2.

Triângulo do fuste (inclinação da face frontal): A = ½(t_b − t_t)H, $\bar{x}$ = L_t + 2(t_b − t_t)/3, $\bar{z}$ = t_f + H/3.

No quadro de forças, o muro é um único item: F_z = −W_c em $\bar{x}_c$; $\bar{z}_c$ é usado apenas para a inércia horizontal (sismo).



Enunciado

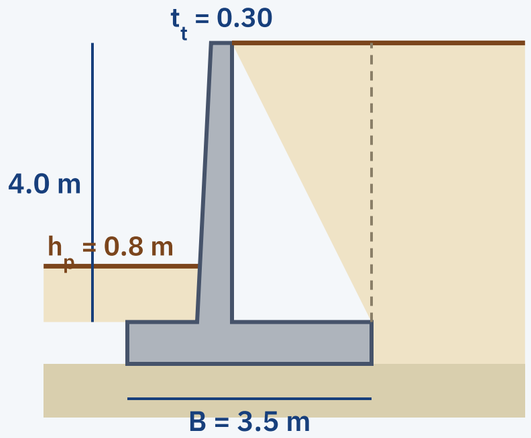
EXEMPLO

PEDE-SE

Área, peso e posição das três partes; $\mathbf{W_C}$, $\mathbf{\bar{x}_C}$, $\mathbf{\bar{z}_C}$.

Dados

Corte	$H = 4.0$ **m;** $t_t = 0.30$**,** $t_b = 0.50$ **m;** $L_t = 1.00$**,** $L_h = 2.00$ **m;** $t_f = 0.60$ **m (B = 3.5 m)**
Material	**concreto armado:** $\gamma_c = 24\ \mathrm{kN/m^3}$



Solução

SOLUÇÃO

1 Partes (por exemplo, triângulo: A = ½(0.50 − 0.30)(4.0) = 0.40; $\bar{x}$ = 1.00 + 2(0.20)/3 = 1.133; $\bar{z}$ = 0.60 + 4.0/3 = 1.933)

Peça	A (m²)	$\bar{x}$ (m)	$\bar{z}$ (m)	W = 24A (kN/m)	W·$\bar{x}$	W·$\bar{z}$
Laje de base	2.100	1.750	0.300	50.40	88.20	15.12
Retângulo do fuste	1.200	1.350	2.600	28.80	38.88	74.88
Triângulo do fuste	0.400	1.133	1.933	9.60	10.88	18.56
Total				**88.80**	**137.96**	**108.56**

2 Centroide

$$\bar{x}_c = \frac{137.96}{88.80} = \mathbf{1.554}\ \text{m} \qquad \bar{z}_c = \frac{108.56}{88.80} = \mathbf{1.223}\ \text{m}$$

O peso do muro é **W_c = 88.80 kN/m**, a $\bar{x}_C$ = 1.55 m da ponta e $\bar{z}_C$ = 1.22 m da base; seu momento é M = −137.96 kN·m/m (resistente).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Solo e plano de pressão que se movem juntamente com o muro

TEORIA

O solo acima do calcanhar da laje de base não pode deslizar em relação à laje: se o muro se move, o solo se move **junto com ele**. Os planos de ruptura partem **da aresta posterior do calcanhar**, e não do dorso do fuste. Corpo livre = muro + bloco do calcanhar; sua face externa é o **plano de pressão vertical** em x = B (solo contra solo: sem atrito solo-muro, empuxo com δ = β):

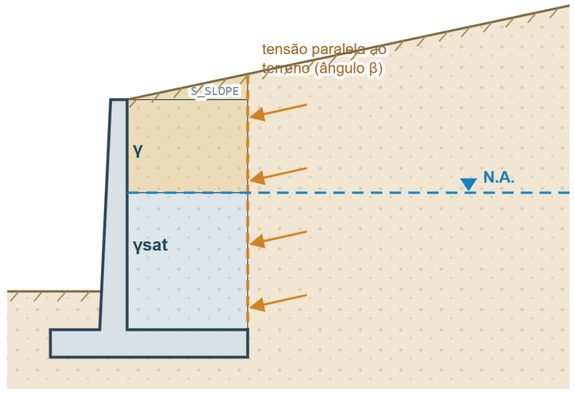
Peso do bloco de solo sobre o calcanhar $W_s = \gamma\, L_h\, H$ (dividido em zonas úmidas/saturadas; como se trabalha com tensões totais, usa-se γ_{sat} abaixo da água, e o empuxo da água constitui parcela à parte).

Na ponta, o aterro acima da laje de base (h_p) move-se com a laje: carga vertical W_{toe}.

A sobrecarga sobre o calcanhar $\mathbf{Q_{heel} = qL_h}$ é favorável, mas, por ser uma carga que também pode estar ausente, **não entra em nenhuma verificação**; seu efeito lateral é sempre considerado.

Altura do plano de pressão $h = t_f + H$ (incluindo a elevação da superfície).

Plano vertical na extremidade do calcanhar (todos os métodos)



Enunciado

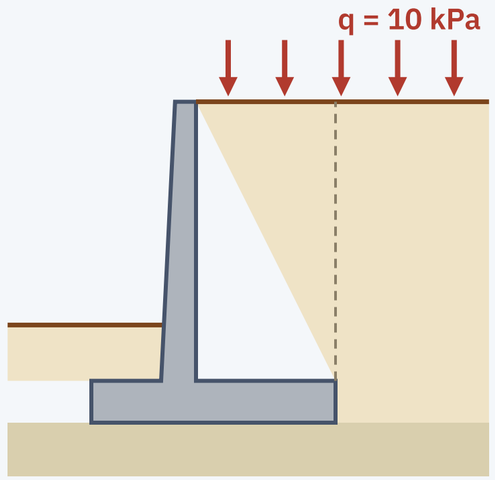
EXEMPLO

Dados

Muro	**Seção do Exemplo 1; altura do aterro frontal $h_p = 0.80$ m (acima da laje de base)**
Solo	**aterro seco: $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$; superfície horizontal**
Sobrecarga	$q = 10$ **kPa**

PEDE-SE

Peso e posição do bloco do calcanhar; o **aterro frontal**; **Q_{heel}**; carga vertical total N.



Solução

SOLUÇÃO

1 Bloco do calcanhar (retângulo L_h × H, atrás do fuste)

$$A_s = L_h H = 2.00(4.0) = 8.0\ \text{m}^2 \qquad W_s = 18(8.0) = \mathbf{144.0}\ \text{kN/m}$$

$$\bar{x}_s = L_t + t_b + \frac{L_h}{2} = 2.50\ \text{m} \qquad \bar{z}_s = t_f + \frac{H}{2} = 2.60\ \text{m}$$

2 Aterro frontal (trapezoidal: na base L_t = 1.00, no topo $x_{toe}(h_p)$ = 1.04) e sobrecarga

$$A_{toe} = \tfrac{1}{2}(1.00 + 1.04)(0.80) = 0.816\ \text{m}^2 \quad W_{toe} = 18(0.816) = \mathbf{14.69}\ \text{kN/m}\ (\bar{x} = 0.510)$$

$$Q_{heel} = qL_h = 10(2.00) = \mathbf{20.0}\ \text{kN/m}\ (\text{não entra em nenhuma verificação})$$

N = W_c + W_s + W_{toe} = 88.80 + 144.00 + 14.69 = **247.49 kN/m**; Q_{heel} = 20.00 kN/m é o item “não utilizado” na tabela.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Empuxo no plano vertical, sobrecarga e passivo combinado

TEORIA

O plano de pressão está na altura h = t_f + H. Como o reaterro é horizontal e δ = β = 0, Rankine = Coulomb:

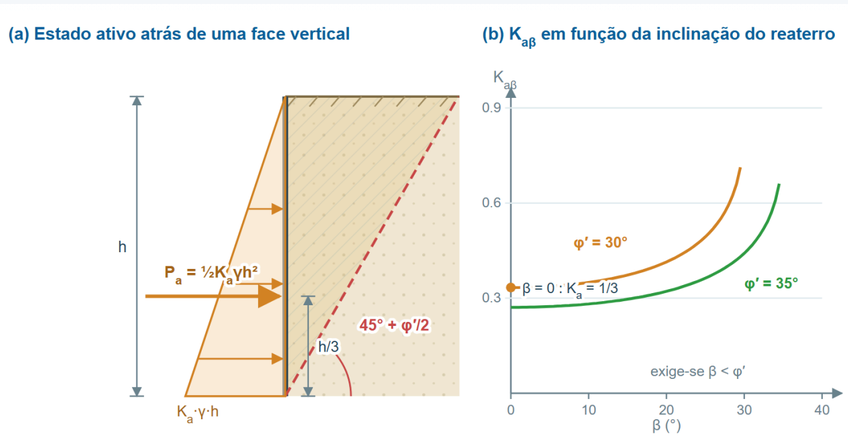
$$K_a = \frac{1-\sin\varphi'}{1+\sin\varphi'} \qquad P_A = \tfrac{1}{2}K_a\gamma h^2\ (h/3) \qquad P_Q = K_a q h\ (h/2)$$

Em aterro inclinado, a tensão no plano é paralela à superfície ($K_{a\beta}$), e a componente vertical do empuxo é resistente. Resistência frontal (apenas no deslizamento):

$$K_{mob} = wK_p + (1-w)K_0 \qquad P_P = \tfrac{1}{2}K_{mob}\gamma D_p^2\ (D_p/3) \qquad D_p = t_f + h_p$$

w = 1/3 por padrão; se o solo frontal puder ser removido, o crédito é reduzido com h_p = 0 ou h_{ignore}; **a resistência frontal não é usada no tombamento nem na capacidade de carga**.

Detalhes (equivalência Rankine/Coulomb, K_{mob}, h_{ignore}) constam na apresentação do muro de gravidade.



Enunciado

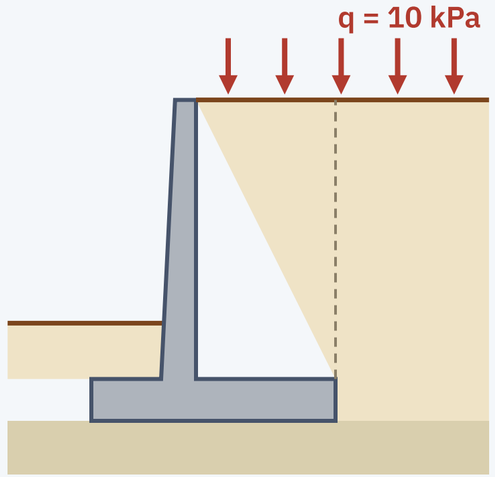
EXEMPLO

PEDE-SE

P_A, P_Q, P_P e o momento de tombamento em relação à ponta.

Dados

Muro e solo	**O muro dos Exemplos 1–2: h = t_f + H = 4.60 m;** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$**; superfície horizontal;** $q = 10$ **kPa**
Solo frontal	$D_p = t_f + h_p = 1.40$ **m; w = 1/3**



Solução

SOLUÇÃO

1 K_a = 0.3333; empuxos (h = 4.60 m)

$$P_A = \tfrac{1}{2}K_a\gamma h^2 = \tfrac{1}{2}(0.3333)(18)(21.16) = \mathbf{63.48}\ \text{kN/m}\ \ (z = 1.533\ \text{m})$$

$$P_Q = K_a q h = 0.3333(10)(4.6) = \mathbf{15.33}\ \text{kN/m}\ \ (z = 2.30\ \text{m})$$

2 Resistência frontal: K_{mob} = ⅓(3.00) + ⅔(0.50) = 1.333

$$P_P = \tfrac{1}{2}(1.333)(18)(1.40)^2 = \mathbf{23.52}\ \text{kN/m}\ \ (z = D_p/3 = 0.467\ \text{m})$$

3 Empuxo horizontal e momento de tombamento (em relação à ponta)

$$\Sigma H_{drive} = 63.48 + 15.33 = \mathbf{78.81}\ \text{kN/m}$$

$$M_o = 63.48(1.533) + 15.33(2.30) = 97.34 + 35.27 = \mathbf{132.60}\ \text{kN·m/m}$$

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Quatro verificações a partir do mesmo quadro de forças

TEORIA

$$FS_s = \frac{\mu_b N + P_{toe}}{\Sigma H_{drive}} \qquad FS_o = \frac{\Sigma M_{res}}{\Sigma M_{ov}} \qquad x_R = -\frac{\Sigma M}{V} \qquad e = \frac{B}{2} - x_R$$

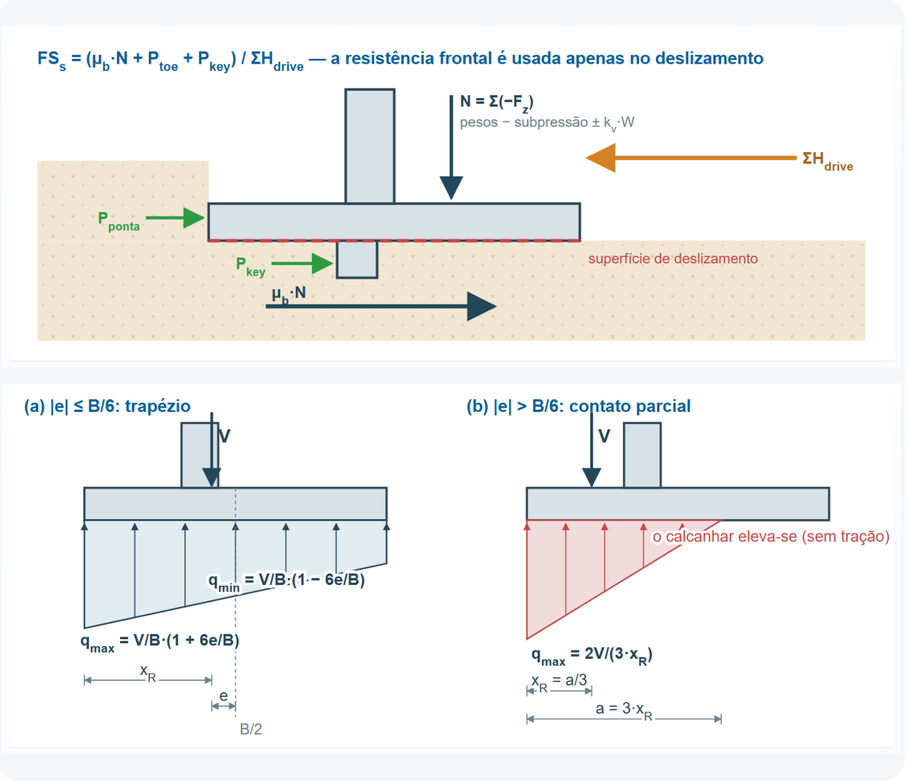
$$|e| \le \frac{B}{6}: \quad q_{max,min} = \frac{V}{B}\left(1 \pm \frac{6e}{B}\right) \qquad |e| > \frac{B}{6}: \quad q_{max} = \frac{2V}{3x_R}$$

Deslizamento: N é a força normal efetiva (exclui Q_{heel}, descontada a subpressão); $\mu_b = \tan \delta_b$; sem adesão.

Tombamento: em torno da ponta (o canto inferior frontal da laje de base); as parcelas $-zF_x$ e xF_z de cada item são contadas com o próprio sinal; a resistência frontal não entra.

Capacidade de carga: se a resultante está no terço médio da base ($|e| \le B/6$), a base está totalmente em contato; caso contrário, o solo não resiste à tração e apenas um comprimento $a = 3x_R$ fica em contato.

Requisitos: em condição estática, $FS_s \ge 1.5$, $FS_o \ge 2.0$; sob sismo, ≥ 1.1; $q_{max} \le q_{all}$.



Enunciado

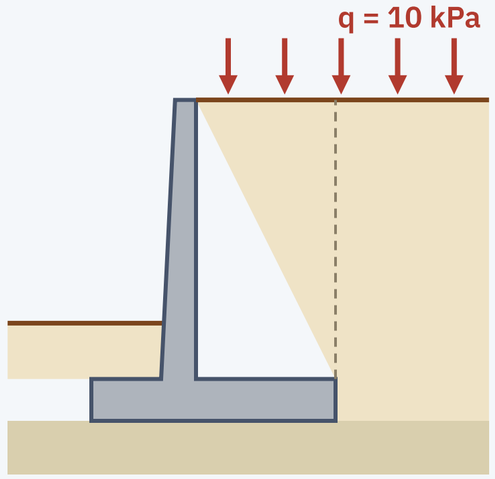
EXEMPLO

Dados

Muro e cargas	**O muro dos Exemplos 1–3:** $B = 3.5$ **m;** $W_c = 88.8,\ W_s = 144.0,\ W_{toe} = 14.69\ \mathrm{kN/m}$**;** $P_A = 63.48,\ P_Q = 15.33\ \mathrm{kN/m}$
Resistência	$\mu_b = 0.55$**;** $P_P = 23.52$ **kN/m;** $q_{all} = 200$ **kPa**
Necessário	$FS_s \geq 1.5,\ \ FS_o \geq 2.0$**; base totalmente em contato**

PEDE-SE

FS_s, FS_o, x_R, e, q_{max}, q_{min} e os resultados.



Solução (1/3)

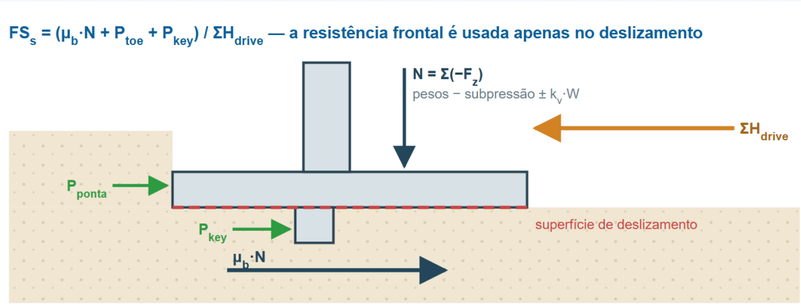
SOLUÇÃO

1 Atrito na base (N = $W_c + W_s + W_{toe}$)

$$N = 88.8 + 144.0 + 14.69 = \mathbf{247.49}\ \text{kN/m}$$

$$\mu_b N = 0.55(247.49) = 136.12\ \text{kN/m}$$

$$FS_s = \frac{136.12 + 23.52}{78.81} = \mathbf{2.026}\ \geq 1.5\ \checkmark$$



Solução (2/3)

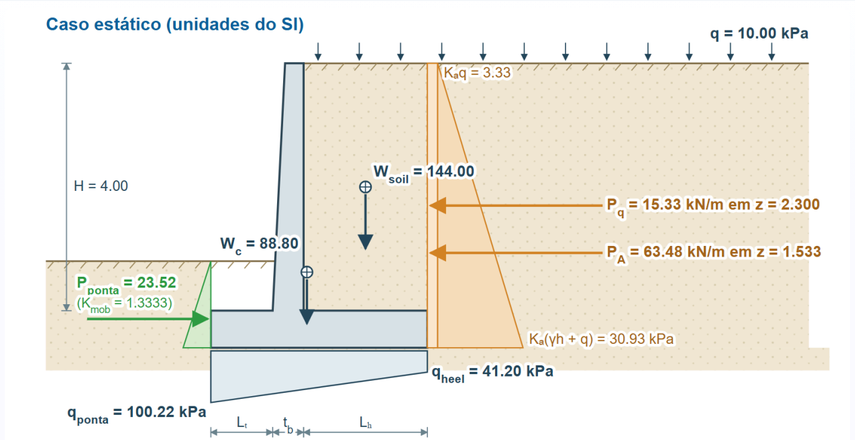
SOLUÇÃO

2 Momento de tombamento (empuxos) e momento resistente (muro, bloco do calcanhar, aterro frontal)

$$M_o = 97.34 + 35.27 = \mathbf{132.60}$$

$$M_r = 137.96 + 360.00 + 7.49 = \mathbf{505.45}\ \mathrm{kN\cdot m/m}$$

$$FS_o = \frac{505.45}{132.60} = \mathbf{3.812}\ \geq 2.0\ \checkmark$$



Solução (3/3)

SOLUÇÃO

3 Posição da resultante e excentricidade

$$\Sigma M = M_o - M_r = -372.85$$

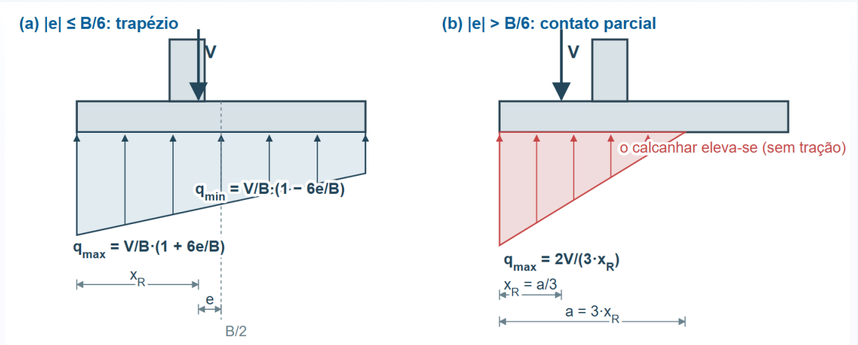
$$x_R = -\frac{\Sigma M}{V} = \frac{372.85}{247.49} = \mathbf{1.5065}\ \text{m}$$

$$e = \frac{B}{2} - x_R = \mathbf{0.2435}\ \text{m} \ \leq\ \frac{B}{6} = 0.583\ \checkmark$$

4 Tensões na base (contato total)

$$q_{max} = \frac{247.49}{3.5}\left(1 + \frac{6(0.2435)}{3.5}\right) = \mathbf{100.22}\ \text{kPa}$$

$$q_{min} = \mathbf{41.20}\ \text{kPa}$$



FS_s = **2.03**, FS_o = **3.81**, e = 0.243 m, q_{max} = **100.2 kPa** ≤ 200, q_{min} = 41.2 kPa > 0: **todas as verificações são atendidas no caso estático**.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Empuxo de Mononobe–Okabe e adição da inércia

TEORIA

No caso sísmico, em lugar do empuxo estático $P_A + P_Q$, adota-se o empuxo de **Mononobe–Okabe** P_{AE}; a inércia $k_h W$ do muro, do bloco do calcanhar e do aterro frontal também empurra para a frente em seus centros de gravidade (se $k_v > 0$, os dois sentidos são analisados). Em plano vertical, para reaterro horizontal:

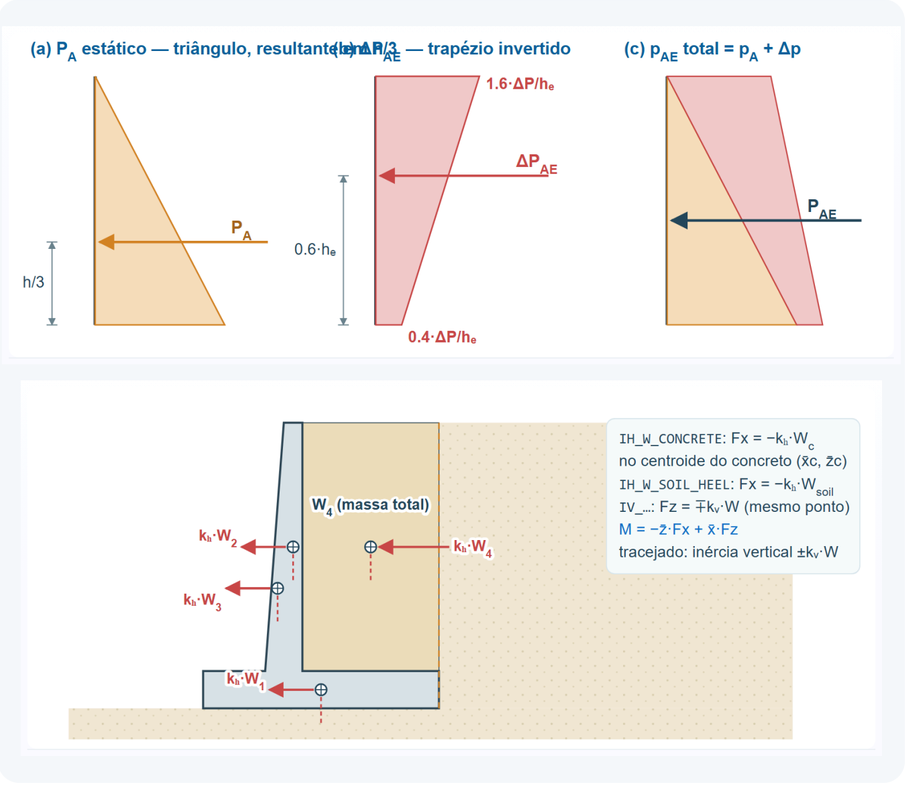
$$\theta = \tan^{-1}\frac{k_h}{1-k_v} \qquad K_{AE} = \frac{\cos^2(\varphi'-\theta)}{\cos^2\theta\left[1+\sqrt{\dfrac{\sin\varphi'\sin(\varphi'-\theta)}{\cos\theta}}\right]^2}$$

$$P_{AE} = \left(\tfrac{1}{2}\gamma h^2 + qh\right)K_{AE} \qquad \Delta P_{AE} = P_{AE} - (P_A + P_Q) \quad (0.6h)$$

ΔP_{AE} distribui-se como um trapézio invertido (1.6ΔP/h no topo e 0.4ΔP/h na base); a parcela estática mantém a sua forma. Havendo água, acrescenta-se a pressão hidrodinâmica $(7/12)k_h\gamma_w h_w^2$.

A parcela passiva frontal é multiplicada por $\eta_{p,E}$; o **padrão é 0** (a segurança ao deslizamento provém apenas do atrito na base).

Se a resultante cair fora do terço médio da base, ocorre **contato parcial** ($q_{max} = 2V/(3x_R)$).



Enunciado

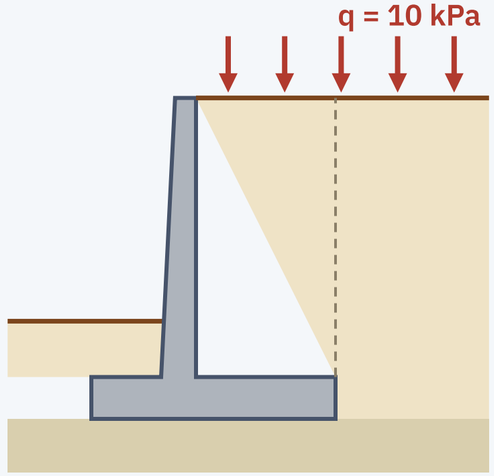
EXEMPLO

PEDE-SE

K_{AE}, P_{AE}, $\bar{z}$, forças de inércia; FS_s, FS_o, e, q_{max} e o resultado de cada verificação.

Dados

Muro e solo	**O muro dos Exemplos 1–4 (estático FS_s = 2.03; FS_o = 3.81)**
Sismo	$k_h = 0.15$, $k_v = 0$; $\eta_{p,E} = 0$; **requerido** $FS_s,\ FS_o \geq 1.1$; **a base deve estar totalmente em contato (|e| ≤ B/6)**



Solução (1/4)

SOLUÇÃO

1 Ângulo sísmico e coeficiente

$$\theta = \tan^{-1} 0.15 = 8.53^\circ$$

$$\sqrt{\sin 30^\circ \sin(30^\circ - 8.53^\circ)/\cos 8.53^\circ} = 0.4302$$

$$K_{AE} = \frac{\cos^2(21.47^\circ)}{\cos^2 8.53^\circ (1 + 0.4302)^2} = \mathbf{0.4329}$$

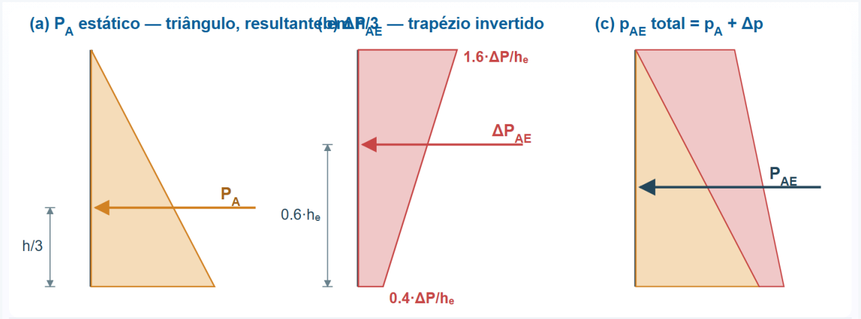
2 Empuxo dinâmico (estático P_A + P_Q = 78.81 kN/m) e sua posição

$$P_{AE} = (190.44 + 46.0)(0.4329) = \mathbf{102.36}\ \text{kN/m}$$

$$\Delta P_{AE} = 102.36 - 78.81 = 23.55\ \text{kN/m}\ \ (0.6h)$$

$$\bar{z}_{AE} = [63.48(1.533) + 15.33(2.30) + 23.55(2.76)]/102.36$$

$$= \mathbf{1.930}\ \text{m}$$



Solução (2/4)

SOLUÇÃO

3 Forças de inércia $k_h W$ e deslizamento (sem considerar a resistência passiva frontal)

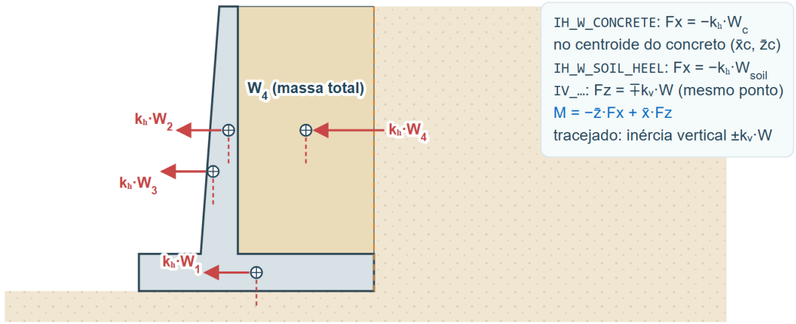
$$IH_c = 0.15(88.8) = 13.32 \;\; (z = 1.223\ \text{m})$$

$$IH_s = 0.15(144.0) = 21.60 \;\; (z = 2.60\ \text{m})$$

$$IH_{toe} = 0.15(14.69) = 2.20\ \text{kN/m}$$

$$\Sigma H_{drive} = 102.36 + 13.32 + 21.60 + 2.20 = 139.49$$

$$FS_{s,E} = \frac{\mu_b N}{\Sigma H_{drive}} = \frac{136.12}{139.49} = \mathbf{0.976} \;<\; 1.1 \;\; \text{✗}$$



Solução (3/4)

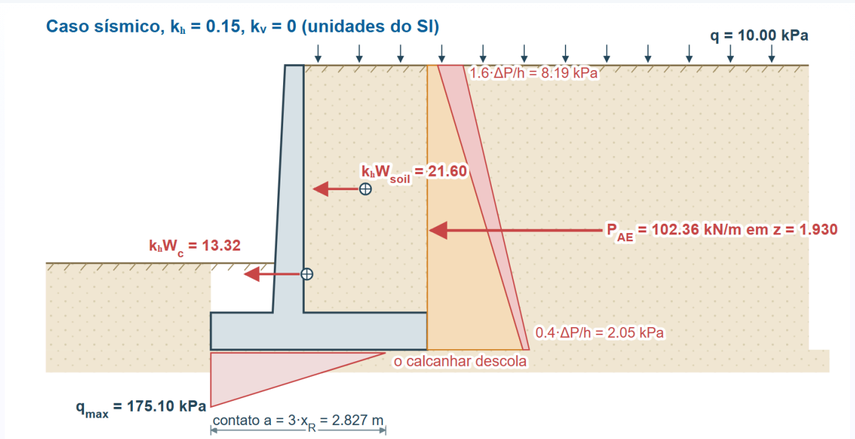
SOLUÇÃO

4 Tombamento (braços de alavanca: $\bar{z}_{AE}$ = 1.930; z_c = 1.223; 2.60; 1.003 m)

$$M_{o,E} = 197.60 + 16.28 + 56.16 + 2.21 = 272.26$$

$$FS_{o,E} = \frac{505.45}{272.26} = \mathbf{1.857} \;\geq 1.1 \;\checkmark$$

$$x_R = \frac{505.45 - 272.26}{247.5} = 0.942 \text{ m}$$



Solução (4/4)

SOLUÇÃO

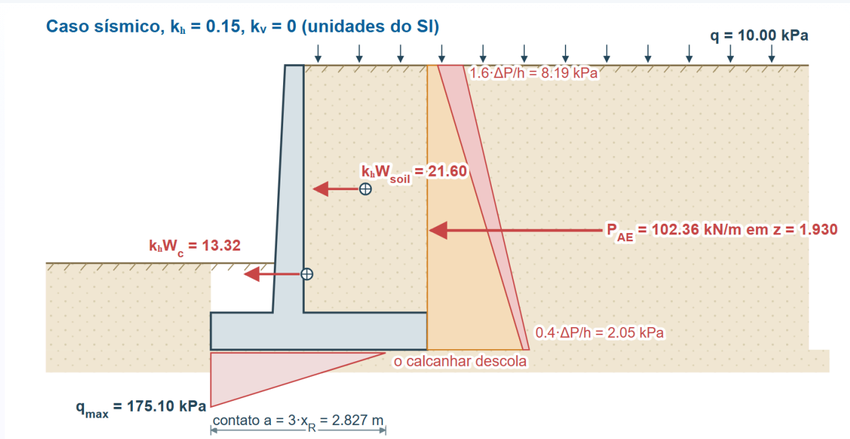
5 Excentricidade e contato parcial

$$e = \frac{B}{2} - x_R = 1.750 - 0.942 = \mathbf{0.808}\ \text{m} > \frac{B}{6} = 0.583 \quad ✗$$

$$a = 3x_R = 2.827\ \text{m} \quad \text{(apenas este comprimento em contato)}$$

$$q_{max} = \frac{2V}{a} = \frac{2(247.5)}{2.827} = \mathbf{175.1}\ \text{kPa} \quad q_{min} = 0$$

Em sismo, o **deslizamento (FS_s = 0.98 < 1.1)** e a **excentricidade (e = 0.81 m > B/6)** não são atendidos; o tombamento (FS_o = 1.86) e q_{max} = 175.1 kPa são adequados. A seção **deve ser revisada** (Exemplo 6).



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

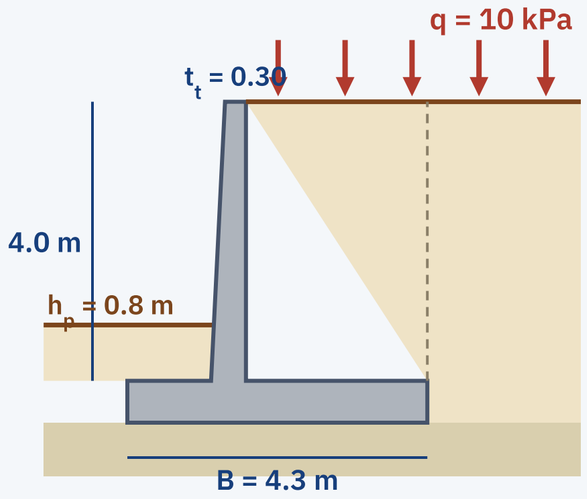
EXEMPLO

Dados

Problema	**No Exemplo 5, sob sismo, FS_s = 0.98 < 1.1 e e = 0.81 m > B/6 = 0.58 m**
Alteração proposta	**ponta e calcanhar prolongados: $L_t = 1.20$ m, $L_h = 2.60$ m (B = 4.30 m); demais dimensões e solo inalterados**

PEDE-SE

Com a nova seção, **FS_s**, **FS_o**, **e** e **q_{max}** para o caso estático e o sísmico; a seção é suficiente?



Solução

SOLUÇÃO

1 Mesmo carregamento, nova geometria (módulo; B = 4.30 m, W_c = 100.3 kN/m, N = 305.1 kN/m)

	Atual (B = 3.5 m)	Revisado (B = 4.3 m)	Necessário
FS_s estático	2.026	2.427	≥ 1.5
FS_o estático	3.812	5.753	≥ 2.0
e estático (m) / q_{max} (kPa)	0.243 / 100.2	0.084 / 79.3	|e| ≤ B/6
Sismo FS_s	0.976 ✗	1.133 ✓	≥ 1.1
Sismo FS_o	1.857	2.630	≥ 1.1
Sismo e (m) / contato	0.808 / parcial ✗	0.600 / total ✓ (B/6 = 0.717)	|e| ≤ B/6
Sismo q_{max} (kPa)	175.1	130.4	≤ 200

Prolongar a ponta e o calcanhar elevou N de 247 para 305 kN/m e aumentou o atrito: sob sismo, **FS_s = 1.13 ≥ 1.1**; a resultante passou a cair dentro do terço médio (e = 0.60 ≤ B/6 = 0.717): **todas as verificações são satisfeitas**. Alternativas: dente de cisalhamento + $\eta_{p,E}$ (Exemplo 9), calcanhar mais largo.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Fuste, ponta e calcanhar: seções críticas

TEORIA

Satisfeita a estabilidade externa, determinam-se os **esforços solicitantes** dos elementos. O **fuste** é uma viga em balanço carregada pela pressão do tardoz e engastada na base (acima da laje de base):

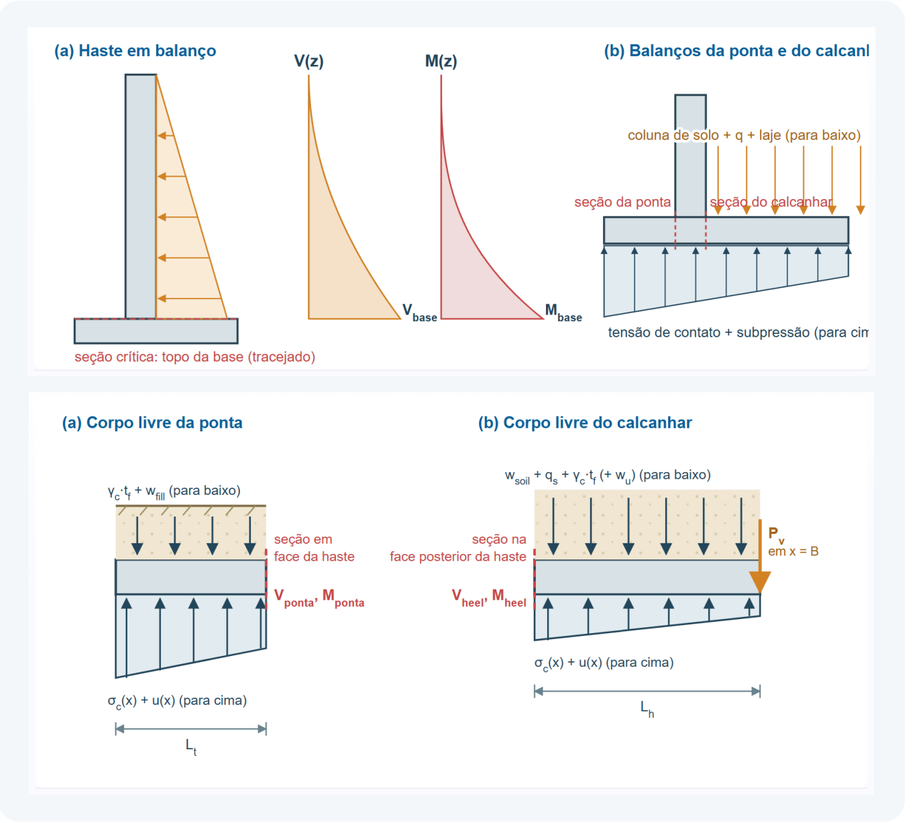
$$V_{st} = K_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + qH\right) \qquad M_{st} = K_a\left(\frac{\gamma H^3}{6} + \frac{qH^2}{2}\right)$$

No sismo: $V_E = V + \Delta P_{AE,st} + k_h W_{body}$, $M_E = M + \Delta P_{AE,st}(0.6H) + k_h W_{body}\bar{z}$ ($\Delta P_{AE,st} = K_{AE}(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + qH) - V_{st}$). A **ponta e o calcanhar** são lajes engastadas nas faces do fuste; carga = tensão na base − peso da laje e do solo acima dela:

$$V_{toe} = L_t\frac{q_0 + q_L}{2} - w_{toe}L_t \qquad M_{toe} = \frac{L_t^2(2q_0 + q_L)}{6} - \frac{w_{toe}L_t^2}{2}$$

$$V_{heel} = w_h L_h - L_h\frac{q_a + q_b}{2} \qquad M_{heel} = \frac{w_h L_h^2}{2} - \frac{L_h^2(q_a + 2q_b)}{6}$$

$w_{toe} = \gamma_c t_f + \gamma h_p$; $w_h = \gamma H + q + \gamma_c t_f$; q_0, q_L, q_a, q_b são as tensões na base nas seções críticas (distribuição linear).



Enunciado

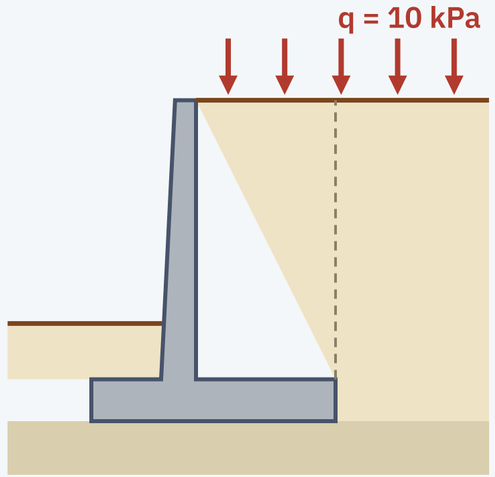
EXEMPLO

PEDE-SE

V e **M** na base do fuste: nos casos estático e sísmico.

Dados

Muro e solo	**O muro dos Exemplos 1–5:** $H = 4.0$ **m;** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$**;** $q = 10$ **kPa; fuste:** $t_t = 0.30$, $t_b = 0.50$ **m**
Sismo	$k_h = 0.15$ $(K_{AE} = 0.4329)$



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Estático (na base do fuste, H = 4.0 m)

$$V_{st} = K_a\left(\tfrac{1}{2}\gamma H^2 + qH\right) = 0.3333(144 + 40) = \mathbf{61.33}\ \mathrm{kN/m}$$

$$M_{st} = K_a\left(\frac{\gamma H^3}{6} + \frac{qH^2}{2}\right) = 0.3333(192 + 80) = \mathbf{90.67}\ \mathrm{kN\cdot m/m}$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

2 Sismo: acréscimo sísmico e inércia do muro

$$\Delta P_{AE,st} = K_{AE}(184) - V_{st} = 79.66 - 61.33 = 18.33\ \text{kN/m} \quad (0.6H = 2.40\ \text{m})$$

$$k_h W_{st} = 0.15(24)(1.2 + 0.4) = 5.76\ \text{kN/m}; \qquad M_i = 10.56\ \text{kN·m/m}$$

3 Efeitos sísmicos totais

$$V_E = 61.33 + 18.33 + 5.76 = \mathbf{85.42}\ \text{kN/m}$$

$$M_E = 90.67 + 18.33(2.40) + 10.56 = \mathbf{145.21}\ \text{kN·m/m}$$

Na base do fuste, no caso estático, **V = 61.33 kN/m, M = 90.67 kN·m/m**; no sismo, **V_E = 85.42, M_E = 145.21** (aumento de 60% no momento). O dimensionamento em concreto armado é feito com esses esforços.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

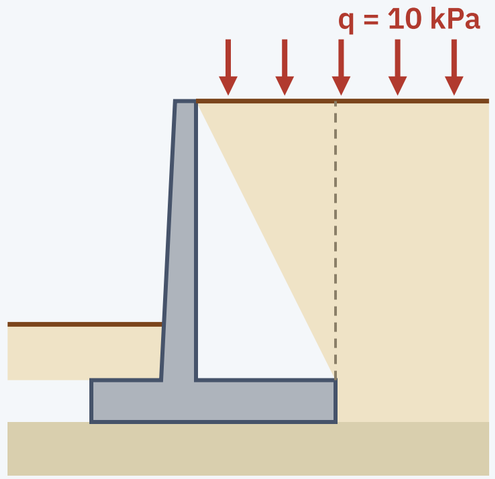
EXEMPLO

PEDE-SE

Valores de **V** e **M** das lajes da ponta e do calcanhar na face do fuste (estáticos); valores para o sismo.

Dados

Tensões na base (Exemplo 4)	$q_{max} = 100.22$ **(ponta),** $q_{min} = 41.20$ **kPa (extremidade do calcanhar);** $B = 3.5$ **m**
Cargas da laje	$L_t = 1.00$, $L_h = 2.00$ **m,** $t_b = 0.50$ **m,** $t_f = 0.60$ **m;** $\gamma_c = 24$**; aterro frontal** $h_p = 0.8$ **m**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Tensões na base nas seções críticas (linear): q_0 na ponta, q_L e q_a na face do fuste, q_b na extremidade do calcanhar

$$q_0 = 100.22 \qquad q_L = q_0 + (q_{min} - q_0)\frac{L_t}{B} = 83.36$$

$$q_a = q_0 + (q_{min} - q_0)\frac{L_t + t_b}{B} = 74.93 \qquad q_b = 41.20\ \text{kPa}$$

2 Ponta (w_{toe} = 24(0.60) + 18(0.80) = 28.8 kPa)

$$V_{toe} = 1.00\frac{100.22 + 83.36}{2} - 28.8(1.00) = \mathbf{62.99}\ \text{kN/m}$$

$$M_{toe} = \frac{1^2(2\cdot 100.22 + 83.36)}{6} - \frac{28.8(1)^2}{2} = \mathbf{32.90}\ \text{kN·m/m}$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Calcanhar (w_h = 18(4.0) + 10 + 24(0.60) = 96.4 kPa; carga para baixo, tensão de base para cima)

$$V_{heel} = 96.4(2.00) - 2.00\frac{74.93+41.20}{2} = \mathbf{76.67}\ \mathrm{kN/m}$$

$$M_{heel} = \frac{96.4(2)^2}{2} - \frac{2^2(74.93+2\cdot 41.20)}{6} = \mathbf{87.92}\ \mathrm{kN\cdot m/m}$$

Ponta: **V = 62.99, M = 32.90**; calcanhar: **V = 76.67, M = 87.92** (ponta com flexão para cima, calcanhar com flexão para baixo). Em sismo (contato parcial, módulo): ponta V = 115.33, M = 62.83; calcanhar V = 138.28, M = 168.69: **o momento no calcanhar aumenta 1.9 vez**.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Método simplificado do dente de cisalhamento

TEORIA

Se o atrito da base for insuficiente, lança-se abaixo da base, no solo não perturbado, um **dente**; a face frontal do dente soma à superfície de deslizamento a resistência passiva do solo à sua frente. O método é deliberadamente simples: a face do dente recebe uma pressão **mobilizada** $K_{mob}\sigma'_v$, totalmente considerada no deslizamento; já os **esforços internos** do dente são obtidos do diagrama **passivo pleno bruto**:

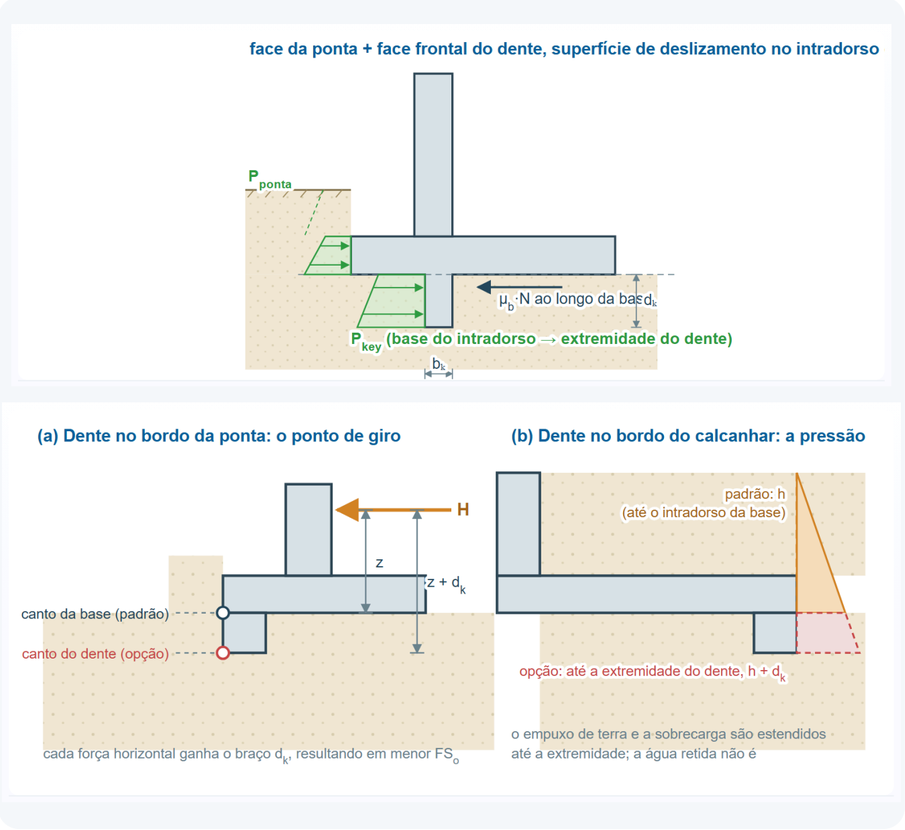
$$P_{key} = \tfrac{1}{2}\left(p_{top} + p_{bot}\right) d_k \quad (p = K_{mob}\sigma'_v) \qquad V_{key} = \tfrac{1}{2}\left(p^g_{top} + p^g_{bot}\right) d_k \quad (p^g = K_p\sigma'_v)$$

$$M_{key} = p^g_{top}\frac{d_k^2}{2} + \left(p^g_{bot} - p^g_{top}\right)\frac{d_k^2}{3}$$

O peso do dente de cisalhamento (em N_{eff}) é incluído tanto no caso estático quanto no sísmico. As resistências passivas são usadas **somente no deslizamento**; no sismo, ambas são multiplicadas por $\eta_{p,E}$ (padrão 0, ou seja, sem crédito).

Centro de rotação: para o dente na borda da ponta, o pivô de tombamento pode ser o canto inferior frontal da laje de base (padrão) ou o canto inferior frontal do dente; para o dente na borda do calcanhar, a pressão ativa pode ser prolongada até a extremidade do dente.

$\Delta FS = P_{key}/\Sigma H_{drive}$ é apresentado em todos os casos.



Enunciado

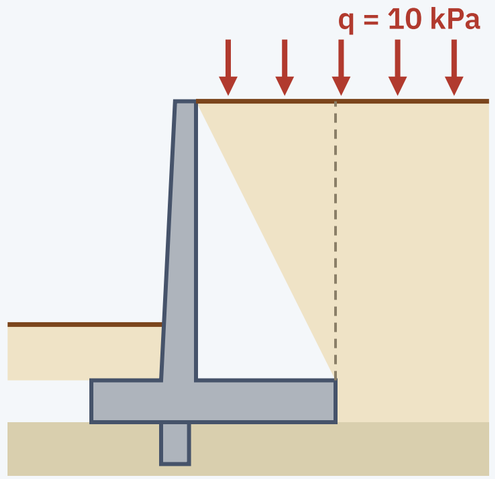
EXEMPLO

Dados

Muro	**O muro dos Exemplos 1–5; dente de cisalhamento próximo à borda da ponta: $x_k = 1.0$ m, $b_k = 0.40$ m, $d_k = 0.60$ m (abaixo da base)**
Solo	$\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$**; solo frontal** $D_f = 1.4$ **m (2.0 m abaixo da base);** $w = 1/3$ **(**$K_{mob} = 1.333$**)**
Sismo	$\eta_{p,E} = 0$ **(padrão) e** $\eta_{p,E} = 0.5$

PEDE-SE

Resistência do dente de cisalhamento **P_{key}**, estática **FS_s**; esforços solicitantes no dente **V_{key}**, **M_{key}**; efeito de $\eta_{p,E}$ sob sismo.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Pressão combinada na face do dente de cisalhamento ($\sigma'_v = 18\,z$; $z = 1.4 \rightarrow 2.0$ m)

$$p_{top} = K_{mob}(25.2) = 33.6 \qquad p_{bot} = K_{mob}(36.0) = 48.0\ \text{kPa}$$

$$P_{key} = \tfrac{1}{2}(33.6 + 48.0)(0.60) = \mathbf{24.48}\ \text{kN/m}$$

2 Deslizamento estático (o peso do dente, 5.76 kN/m, entra em N; o empuxo passivo na ponta é considerado com 23.52)

$$N_{eff} = 253.25 \qquad \mu_b N = 139.29\ \text{kN/m}$$

$$FS_s = \frac{139.29 + 23.52 + 24.48}{78.81} = \mathbf{2.376}\ \ (\text{sem dente } 2.066)$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Esforços seccionais do dente: empuxo passivo pleno bruto (K_p = 3.00): p^g_{top} = 75.6; p^g_{bot} = 108.0 kPa

$$V_{key} = \tfrac{1}{2}(75.6 + 108.0)(0.60) = \mathbf{55.08}\ \mathrm{kN/m}$$

$$M_{key} = 45.36(0.30) + 9.72(0.40) = \mathbf{17.50}\ \mathrm{kN\cdot m/m}$$

O dente elevou o fator de segurança estático ao deslizamento de 2.07 para **2.38** (ΔFS = 0.31). No sismo, com $\eta_{p,E}$ = 0, o dente **não oferece contribuição**; com $\eta_{p,E}$ = 0.5, $FS_{s,E}$ passa de 0.98 para **1.16** (≥ 1.1 é atendido), mas a excentricidade (0.80 m > B/6) persiste: por isso a alteração da geometria do Exemplo 6 é mais eficaz.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Água hidrostática em ambos os lados, subpressão linear na base

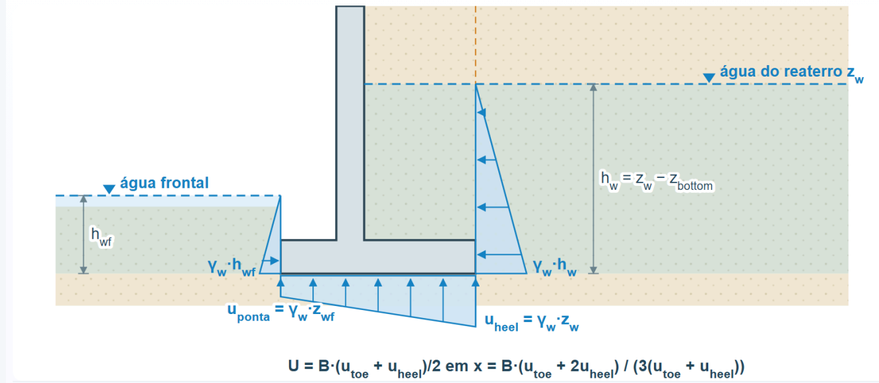
TEORIA

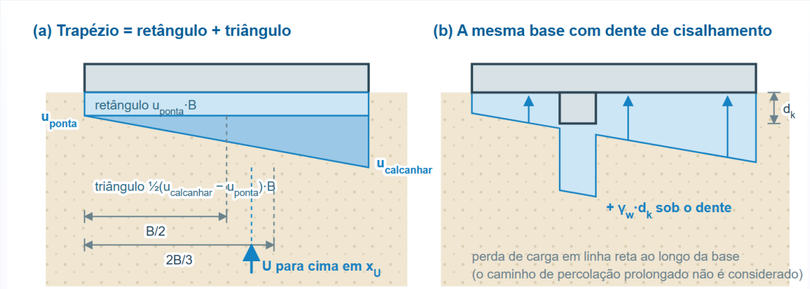
A pressão da água é isotrópica e atua perpendicularmente a cada superfície. O corpo livre é circundado por água em três contornos: o plano de pressão posterior, a face frontal do muro e a face inferior da base. Cada um deles é um item distinto no quadro de forças; o solo é computado com a tensão total (γ_{sat}):

$$U_{rear} = \tfrac{1}{2}\gamma_w h_w^2 \;\; (h_w/3) \qquad U = \frac{B(u_{toe} + u_{heel})}{2} \qquad x_U = \frac{B(u_{toe} + 2u_{heel})}{3(u_{toe} + u_{heel})}$$

A subpressão atua para cima: reduz N (e, portanto, o atrito) e acrescenta um momento de tombamento. A pressão sob a base varia linearmente entre as cargas de água na ponta e no calcanhar.

No caso sísmico, acrescenta-se ainda a pressão hidrodinâmica da água livre nos poros $(7/12)k_h\gamma_w h_w^2$ $(0.4h_w)$.





Enunciado

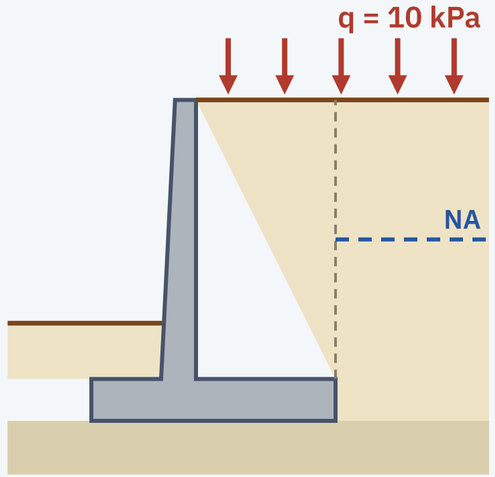
EXEMPLO

PEDE-SE

Quadro de forças; **FS_s**, **FS_o**, **e**, **q_{max}**; efeito da água.

Dados

Muro e solo	**O muro e o reaterro dos Exemplos 1–4 ($\gamma = 18,\ \gamma_{sat} = 20\ \mathrm{kN/m^3}$); condição estática**
Água	**no aterro, o nível do lençol freático está 2.0 m abaixo do topo do muro; subpressão linear sob a base**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Quadro de forças (módulo; $M = xF_Z - zF_X$, tombamento +)

Item	F_x (kN/m)	F_z (kN/m)	x (m)	z (m)	M (kN·m/m)
Muro	0.00	−88.80	1.55	1.22	−137.96
Bloco do calcanhar (com γ_{sat})	0.00	−152.00	2.50	2.55	−380.00
Q_{heel} (não utilizado)	0.00	−20.00	2.50	4.60	−50.00
Aterro frontal	0.00	−14.69	0.51	1.00	−7.49
Empuxo do solo P_A	−54.68	0.00	3.50	1.64	89.71
Empuxo devido à sobrecarga P_Q	−15.33	0.00	3.50	2.30	35.27
Empuxo da água no tardoz	−33.16	0.00	3.50	0.87	28.74
Subpressão	0.00	44.64	2.33	0.00	104.15
Resistência frontal	23.52	0.00	0.00	0.47	−10.98

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

2 Verificações

$$N = 210.85\ \text{kN/m} \quad FS_s = \frac{116.0 + 23.5}{103.2} = \mathbf{1.352} \quad FS_o = \frac{525.5}{257.9} = \mathbf{2.038}$$

$$e = 0.481\ \text{m}\ (\leq B/6 = 0.583) \qquad q_{max} = 109.9\ \text{kPa} \qquad q_{min} = 10.6\ \text{kPa}$$

A água fez a segurança ao deslizamento passar de 2.03 → **1.35** (< 1.5 ✗), a segurança ao tombamento de 3.81 → **2.04** e a excentricidade e de 0.243 → 0.481 m; a subpressão reduziu N em 44.6 kN/m. **O deslizamento estático não é atendido**: exigem-se drenagem, dente de cisalhamento ou base mais larga.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Plataforma de alívio do fuste

TEORIA

A plataforma de alívio é uma laje de concreto armado que se estende do dorso do fuste para o interior do reaterro; é usada em muros altos (o momento no fuste cresce com H^3) ou para reforçar um muro insuficiente. Tem três efeitos: (1) suporta o solo acima dela; (2) **alivia** o fuste abaixo dela: sob a plataforma, a pressão devida ao peso próprio do solo recomeça; (3) acrescenta peso ao muro.

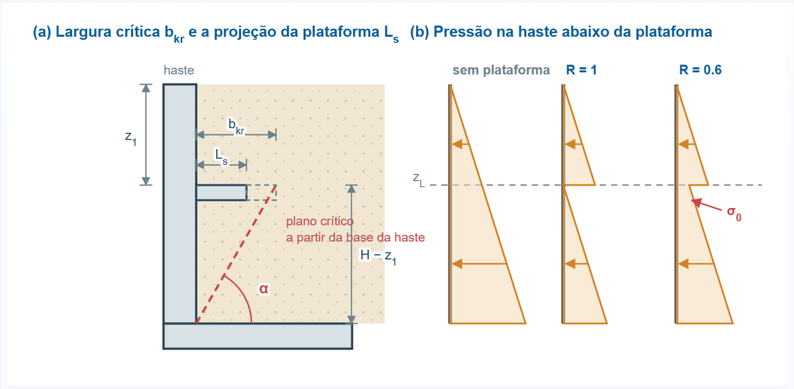
A plataforma de alívio só é plenamente eficaz se a sua extremidade atingir o **plano de ruptura crítico** que sobe a partir da base do tardoz do fuste (Rankine, aterro horizontal: $\alpha = 45° + \varphi'/2$). A largura crítica necessária da plataforma e a razão de alívio:

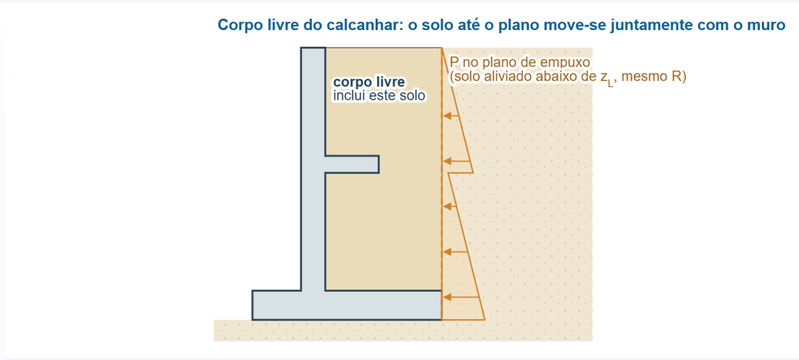
$$b_{kr} = (H - z_1)\,(\cot\alpha - \tan\beta_w) \qquad R = \min\left(\frac{L_s}{b_{kr}}, 1\right)$$

$$p(z) = K\,[\sigma'_v(z) - R\,\sigma'_v(z_L)] \qquad z > z_L \;\; \text{(abaixo do balanço)}$$

R = 1: dois triângulos separados (alívio total); R < 1: alívio parcial, com interpolação linear entre um muro sem plataforma de alívio e um muro com alívio total. Somente o empuxo estático do **peso do solo** é aliviado; a sobrecarga, a água e o acréscimo sísmico não são aliviados.

O momento da carga do balanço em relação ao fuste não é creditado ao fuste (a favor da segurança); o balanço é um elemento independente sob a própria carga (M_{root}).





Enunciado

EXEMPLO

Dados

Muro e solo	**Muro dos Exemplos 1–4 (H = 4.0 m; estático); aterro horizontal, $\varphi' = 30^\circ$**
Em balanço	**profundidade da face inferior da plataforma de alívio $z_1 = 2.15$ m (a partir do topo do muro), projeção $L_s = 1.00$ m, espessura $t_s = 0.30$ m**

PEDE-SE

O ângulo crítico α, a largura crítica **b_{kr}**, **R**; a variação de V e M na base do fuste; estabilidade externa.

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Plano crítico e largura (tardoz vertical: $\beta_W = 0$)

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} = 60.0^\circ \qquad b_{kr} = (4.0 - 2.15)\cot 60^\circ = 1.068\ \text{m}$$

$$R = \min(1.00/1.068,\ 1) = \mathbf{0.9362}\ \ (\text{alívio parcial})$$

2 Esforços na base do fuste (sem plataforma de alívio → com plataforma de alívio)

$$V:\ 61.33 \rightarrow 38.99\ \text{kN/m}\ \ (-\%36.4)$$

$$M:\ 90.67 \rightarrow 70.00\ \text{kN·m/m}\ \ (-\%22.8)$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Carga da plataforma de alívio e estabilidade externa (mesmo alívio no plano das pressões)

$$W_{soil} = 43.3\ \mathrm{kN/m}, \quad W_{self} = 7.2\ \mathrm{kN/m}, \quad M_{root} = 25.25\ \mathrm{kN{\cdot}m/m}$$

$$FS_s:\ 2.03 \rightarrow 3.26 \qquad FS_o:\ 3.81 \rightarrow 5.28 \qquad e:\ 0.243 \rightarrow 0.094\ \mathrm{m}$$

A plataforma de alívio (L_s = 1.00 m < b_{cr} = 1.07 m: R = 0.94) reduz o cisalhamento na base do fuste em 36% e o momento em 23%; a carga e o peso da plataforma são somados ao muro: FS ao deslizamento 2.03 → 3.26, excentricidade 0.243 → 0.094 m. A plataforma é ainda dimensionada para M_{root} = 25.3 kN·m/m na própria raiz.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Escopo da solução

TEORIA

A **estabilidade externa** considera o muro como um único bloco rígido; os **esforços solicitantes** (fuste, ponta, calcanhar, plataforma de alívio, dente) são obtidos a partir das ações fornecidas por este módulo; o dimensionamento em concreto armado (armadura, cisalhamento) está fora do escopo desta apresentação.

Reaterro não coesivo ($c' = 0$); camada única, superfície horizontal ou com uma única inclinação; nível d'água horizontal e hidrostático; sobrecarga uniformemente distribuída (os empuxos laterais de cargas em faixa e pontuais são acrescentados por Boussinesq).

Atrito na base $\mu_b = \tan \delta_b$; sem adesão. A resistência passiva frontal é utilizada apenas no deslizamento, e não no tombamento nem na capacidade de carga; em sismo, entra com $\eta_{p,E}$ (padrão 0).

Sismo pseudoestático: Mononobe–Okabe + inércia + água hidrodinâmica; se $k_v > 0$, ambos os sentidos são analisados.

A plataforma de alívio e o dente de cisalhamento são modelados por métodos simplificados (plataforma: alívio parcial/total; dente: empuxo passivo combinado); a estabilidade global e o recalque estão fora do escopo.

Resumo

Pontos-chave

Muro: laje de base + fuste; $W_c = \Sigma \gamma_c A_i$; o **bloco do calcanhar** e o aterro frontal movem-se com o muro; a pressão atua no plano vertical na borda posterior da fundação ($h = t_f + H$); Q_{heel} não entra em nenhuma verificação

Verificações a partir do mesmo quadro de forças: $FS_s = (\mu_b N + P_P)/\Sigma H$, $FS_o = \Sigma M_{res}/\Sigma M_{ov}$, x_R, e, $q = V/B(1 \pm 6e/B)$; se $|e| > B/6$, $q_{max} = 2V/(3x_R)$

Sismo: P_{AE} (Mononobe–Okabe) + ΔP_{AE} a 0.6h + forças de inércia $k_h W$; o muro do exemplo **falha por deslizamento e por excentricidade** sob sismo, e as verificações passam a ser satisfeitas quando é revisado com ponta/calcanhar mais largos

Esforços solicitantes: fuste $V = K_a(\frac{1}{2}\gamma H^2 + qH)$, $M = K_a(\gamma H^3/6 + qH^2/2)$; ponta e calcanhar, engastados na face do fuste: tensão na base – peso da laje e do solo

Dente de cisalhamento: P_{key} do empuxo passivo combinado (no deslizamento), V, M do K_p bruto; no sismo, com $\eta_{p,E}$

Plataforma de alívio: $b_{kr} = (H - z_1)(\cot \alpha - \tan \beta_w)$, $R = \min(L_s/b_{kr}, 1)$; abaixo da plataforma, a pressão do peso volta a atuar; a água e a sobrecarga não são aliviadas

Água: peso com γ_{sat} + empuxo hidrostático posterior separado; a subpressão reduz N′ e acrescenta tombamento (no exemplo, a verificação ao deslizamento estático não é satisfeita)

Referências bibliográficas

As três teorias do software e a fonte cujas formas fechadas (Ka, Kp, KAE) o manual segue. Tudo o que não for derivado delas é uma premissa deste módulo e está indicado no texto.

Coulomb C.A. (1776) Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences 7, Paris.

Das B.M. (2016) Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning, Boston.

Mononobe N., Matsuo H. (1929) On the determination of earth pressures during earthquakes. Proceedings of the World Engineering Congress, Tokyo, 9:177–185.

Okabe S. (1926) General theory of earth pressure. Journal of the Japanese Society of Civil Engineers 12(1).

Rankine W.J.M. (1857) On the stability of loose earth. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 147:9–27.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o próprio motor de cálculo do módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O exemplo passo a passo da página do módulo também é este muro (H = 4 m, q = 10 kPa, k_h = 0.15).

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva o fuste do muro em análise, a laje de base, o reaterro, a água, os coeficientes sísmicos, o dente de cisalhamento e a plataforma de alívio; o módulo fornece juntos o quadro de forças, as verificações e os esforços internos.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.